Examen partiel

17 novembre 2008, Trois heures

Les questions plus difficiles sont signalées par $\star$
Le barême est donné à titre indicatif.

Question de cours **(30 minutes) 4 points**

Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Exercice 1 **4 points**

Soit $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ donné par

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt$$

où $k \in C([a,b] \times [a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = C([a,b])$, muni de la norme $\| \cdot \|_{L^\infty}$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Exercice 2 **4 points**

1. Soit t un réel fixé. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-xt} \sin x$.
2. En remarquant que $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ pour tout $x > 0$, et en utilisant le théorème de Fubini, donner une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$, pour tout $A > 0$.
3. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 3 **4 points**

Soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, soit $g \in L^p(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $1/||f||_1 \geq |a|$. Montrer que l'application

$$h \longmapsto af * h + g$$

définit une application contractante de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même. En déduire que l'équation

$$h - af * h = g$$

possède une unique solution dans $L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 4 **4 points**

Soit X un sous-espace mesurable de $\mathbb{R}$. Pour f une fonction mesurable sur X, on note

$$m_f(t) = \lambda(\{x \in X,\ |f(x)| > t\})$$

la fonction de répartition de f, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in L^p(X)$. Montrer que $m_f(t) \leq \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.
2. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $f \in L^p(\mu)$. Montrer que
$$\int |f|^p d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} m_f(t) dt$$
3. On appelle *espace L^p faible* l'ensemble L_f^p des fonctions mesurables f telles qu'il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $m_f(t) \leq \dfrac{C}{t^p}$.
Montrer que $L^p \subset L_f^p$ mais que l'inclusion est stricte.
4. $\star$ Montrer que si on munit L_f^p de la distance $d(f,g) = a_{f-g}$ où $a_\varphi = \sup\,[t^p m_\varphi(t)]^{\frac{1}{p+1}}$, on obtient un espace métrique complet.