Examen partiel

26 octobre 2009, Trois heures

Les exercices sont indépendants.
Le barême est donné à titre indicatif.

Question de cours 5 points

Soit F un espace de Banach, A un ensemble non vide, et $B(A,F)$ l'ensemble des fonctions bornées de A dans F, muni de la norme

$$\|f\| := \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Montrer que $B(A,F)$ est un espace de Banach.

Exercice 1 6 points

On désigne par E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, et par F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que F est un sous-espace vectoriel strict de E.
2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E on pose
$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$
Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E puis montrer que F est dense dans E.
3. Montrer que E est complet. Est-ce que F l'est aussi ?
4. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$. On munit ℓ^1 de la norme
$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$
   (a) On fixe $u \in \ell^1$ et on note Φ_u l'application définie sur E par
   $$\Phi_u(v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$
   Montrer que Φ_u est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.

   (b) Montrer que $\Phi : u \mapsto \Phi_u$ est une isométrie bijective de ℓ^1 dans l'ensemble E' des formes linéaires continues sur E.

Exercice 2 **4 points**

Soit E un espace de Banach et soit $f : E \to E$ une application (pas nécessairement continue) telle qu'il existe un $0 < \alpha < 1/2$ tel que pour tous $(x, y) \in E \times E$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Indication : considérer une suite $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrer qu'elle est convergente.

Exercice 3 **5 points**

Pour cet exercice on admettra le résultat suivant.

Soient A et B deux espaces de Banach et T une application linéaire de A dans B. On note

$$G(T) = \{(x, T(x)),\ x \in A\} \subset A \times B$$

le graphe de T. Alors l'application T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $A \times B$.

On considère l'espace $C^0([0,1])$, que l'on munit de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On cherche à montrer que tout sous-espace vectoriel fermé F de $C^0([0,1])$ inclus dans $C^1([0,1])$ est de dimension finie.

1. Montrer que F muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.
2. Montrer que l'application $j : f \mapsto f'$ est continue de $(F, \|\cdot\|_\infty)$ dans $\big(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$.
   Indication : on pourra utiliser le théorème du graphe fermé, ainsi que l'identité, pour tout $f \in F$,
   $$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$
3. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
   $$\forall f \in F, \|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$
4. Montrer que la boule unité de F est relativement compacte (c'est-à-dire que son adhérence est compacte).
5. En déduire que F est de dimension finie.