UFR de Mathématiques
Université Paris-Diderot

L3 Math-Info
Analyse

Partiel du 20 février 2008

Durée : 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. Le problème et les deux exercices sont indépendants. Le barême est donné à titre indicatif.

Les questions plus difficiles sont signalées par un signe $\star$.

Problème 1. (14 points) **(Théorème d'Ascoli)**

Soit (X, δ) un espace métrique compact, et $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles, muni de la distance de la convergence uniforme

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $C(X)$ est *uniformément équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, quels que soient $x \in X, y \in X$ et $f \in \mathcal{A}$, on ait

$$\delta(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

I. Des exemples

1. Montrer que l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément équicontinu.

2. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \Big/ \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \leq 1 \right\}$$

est uniformément équicontinu.

3. $\star$ Montrer que sur un métrique compact X, une partie $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue si et seulement si elle est équicontinue en chaque point, c'est-à-dire que pour tout x_0 dans X et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{A}$, on ait

$$\delta(x_0, y) \leq \eta(x_0, \varepsilon) \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Indication : pour tout $\varepsilon > 0$, recouvrir X par un nombre fini de boules centrées en des points x_j et de rayon $\eta(x_j, \varepsilon/3)/3$ et considérer $\eta = \min_j \eta(x_j, \varepsilon/3)/3$.

II. Le sens direct

Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de $C(X)$.

1. Montrer que, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $\{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné.

2. $\star$ Montrer que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

   Indication : raisonner par l'absurde et construire alors, pour un certain $\varepsilon > 0$*, une suite* f_n *et deux suites de points* (x_n)*,* (y_n) *telles que* $\delta(x_n, y_n) \leq 1/n$ *alors que* $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$*; en déduire que* f_n *ne peut avoir de sous-suite uniformément convergente.*

III. Réciproque : le théorème d'Ascoli

On se donne une partie $\mathcal{A}$ de $C(X)$, qui possède les deux propriétés suivantes:
- l'ensemble $\{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné pour tout x,
- $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

On souhaite démontrer que son adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ dans $C(X)$ est compacte dans $C(X)$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ possède les mêmes deux propriétés que $\mathcal{A}$.

2. $\star$ Soit (f_n) une suite d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}$.

   (a) Montrer qu'il existe un sous-ensemble dénombrable $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ dense dans l'ensemble X.

   Indication : pour chaque n*, on recouvrira* X *par un nombre fini de boules de rayon* $1/n$*, et on prendra l'ensemble des centres de ces boules.*

   (b) Extraire de la suite f_n une sous-suite $f_{\varphi^1(n)}$ telle que la suite (de réels) $f_{\varphi^1(n)}(x_1)$ soit convergente, puis extraire de la suite $f_{\varphi^1(n)}$ une sous-suite $f_{\varphi^1 \circ \varphi^2(n)}$ telle que la suite $f_{\varphi^1 \circ \varphi^2(n)}(x_2)$ soit convergente. Définir ainsi par récurrence une sous-suite $f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^j(n)}$ telle que la suite $f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^j(n)}(x_j)$ soit convergente.

   (c) Soit $g_n = f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^n(n)}$. Démontrer que g_n est une suite extraite de f_n et que $g_n(x_j)$ converge pour tout $j \in \mathbb{N}$ vers une limite, que l'on notera $g(x_j)$.

   (d) Montrer que g, définie ci-dessous, est uniformément continue sur l'ensemble dense $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, et que la suite g_n converge uniformément vers la fonction g prolongée continûment sur X.

3. Conclure.

IV. Un exemple d'application du théorème

Montrer que pour tout $k > 0$ donné, l'ensemble des applications k-lipschitziennes telles que $|f(0)| \leq 1$, est compact dans $C([0, 1])$.

Exercice 1. (3 points) Si A est une partie d'un espace métrique X, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que α et β sont des applications croissantes pour l'inclusion, de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$.

2. Montrer que si A est ouvert, alors $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermé, alors $\beta(A) \subset A$. En déduire que $\alpha^2 = \alpha$ et que $\beta^2 = \beta$.

3. Construire $A \subset \mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles $A, \mathring{A}, \overline{A}, \alpha(A), \beta(A)$ soient tous distincts.

Exercice 2. (3 points) On considère $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $g \in E$ vérifiant $\|g\|_\infty < 1/4$. On veut montrer qu'il existe une solution $f \in E$ à l'équation

$$2f(t) - f(t)^2 + f(t^2) = g(t).$$

On considère l'application $\phi : E \to E$ définie par

$$\phi(f)(t) = \frac{1}{2}\left(f(t)^2 - f(t^2) + g(t)\right).$$

1. Montrer que pour tout $a > 0$, ϕ est $(a + \frac{1}{2})$-lipschitzienne sur la boule $B(0,a)$.

2. Montrer que l'on peut trouver $a < 1/2$ tel que ϕ conserve $B(0,a)$.

3. Conclure.