UFR de Mathématiques | L3 Math-Info
Université Paris-Diderot | Analyse

# Partiel du 20 février 2008

## Correction

**Problème 1. (Théorème d'Ascoli)**

**I. Des exemples**

1. On sait qu'une application $k$-lipschitzienne est continue, donc l'ensemble des applications $k$-lipschitziennes est une partie de $C([0,1])$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout couple $(x,y)$ de $[0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq \dfrac{\varepsilon}{k}$ on a pour toute application $f$ $k$-lipschitzienne

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq k|x-y| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Soit l'ensemble

$$E = \left\{ f \in C^1([0,1];\mathbb{R}) \Big/ \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq 1 \right\}.$$

C'est une partie de $C([0,1])$. Par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout couple $(x,y)$ de $[0,1]^2$ et pour tout $f \in E$

$$|f(x)-f(y)| \leq |x-y| \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq |x-y|,$$

donc si $|x-y| \leq \varepsilon$, on a pour tout $f \in E$, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

*Remarque : on peut aussi constater que les fonctions de $E$ sont nécessairement 1-lispchitziennes, et appliquer la première question*

3. Si une partie est uniformément équicontinue, alors elle est clairement équicontinue. Montrons la réciproque. Soit $\varepsilon > 0$ donné. On peut toujours écrire

$$X = \bigcup_{x\in X} B\left(x, \eta(x,\varepsilon/3)/3\right)$$

puis comme $X$ est compact, extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini:

$$X = \bigcup_{j=1}^{p} B\left(x_j, \eta(x_j, \varepsilon/3)/3\right).$$

Soit alors $\eta = \min_j \eta(x_j, \varepsilon/3)/3$, et soient $x$ et $y$ tels que

$$\delta(x, y) \le \eta.$$

Soient alors $j$ et $k$ tels que

$$\delta(x, x_j) \le \eta(x_j, \varepsilon/3)/3 \quad \text{et} \quad \delta(y, x_k) \le \eta(x_k, \varepsilon/3)/3.$$

On remarque que

$$\delta(x_j, x_k) \le \delta(x, x_j) + \delta(x, y) + \delta(y, x_k) \le \eta(x_j, \varepsilon/3)/3 + \eta + \eta(x_k, \varepsilon/3)/3,$$

donc par définition de $\eta$, on peut écrire

$$\delta(x_j, x_k) \le \max\left(\eta(x_j, \varepsilon/3), \eta(x_k, \varepsilon/3)\right)$$

et par conséquent

$$|f(x_j) - f(x_k)| \le \varepsilon/3. \tag{1}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(y)| \\ &\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

par hypothèse sur $f$ et par (1). Le résultat suit.

### II. Le sens direct

Soit $\mathcal{A}$ une partie compacte de $C(X)$.

1. Montrons que, pour chaque $x \in X$, l'ensemble $\{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Si cet ensemble n'était pas borné, il existerait une suite $f_n$ de $\mathcal{A}$ telle que $|f_n(x)|$ tend vers l'infini avec $n$. Mais comme $\mathcal{A}$ est compact, on peut extraire une sous-suite $f_{n_k}$ uniformément convergente vers une fonction $f$, donc en particulier telle que $f_{n_k}(x)$ converge vers $f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $f_n$.

2. Montrons que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue. Sinon, pour un certain $\varepsilon > 0$, il existerait une suite $f_n$ et deux suites de points $(x_n)$, $(y_n)$ telles que $\delta(x_n, y_n) \le 1/n$ alors que $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \ge \varepsilon$. Mais il existe une sous-suite $f_{n_k}$ uniformément convergente, vers une limite $f$ qui est continue comme limite uniforme de fonctions continues. On a alors

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| &\le |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(y_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \\ &\le \sup_{x \in X} |f_{n_k}(x) - f(x)| + \sup_{y \in X} |f_{n_k}(y) - f(y)| + |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})|. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro par définition de $f$ et le dernier par continuité de $f$, ce qui contredit l'hypothèse de minoration uniforme par $\varepsilon$.

**III. Réciproque : le théorème d'Ascoli**

On se donne une partie $\mathcal{A}$ de $C(X)$, qui possède les deux propriétés suivantes:

- l'ensemble $\{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné pour tout $x$,
- $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

1. Montrons que l'ensemble $\{f(x), f \in \overline{\mathcal{A}}\}$ est borné pour tout $x$, et que $\overline{\mathcal{A}}$ est uniformément équicontinue.

   On sait que $\{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est borné pour tout $x$. Supposons qu'il existe une suite $f_n$ de $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $|f_n(x)|$ tend vers l'infini avec $n$. Alors pour tout $n$, la fonction $f_n$ est limite uniforme d'une suite $f_{n_k}$ de fonctions de $\mathcal{A}$, et cette suite de fonctions vérifie par hypothèse que $f_{n_k}(x)$ est bornée, uniformément en $n$ et $k$, donc la suite $f_n(x)$ doit l'être aussi, contradiction.

   De même l'ensemble $\overline{\mathcal{A}}$ est uniformément équicontinu par le même argument d'approximation: si $f \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $f$ est limite uniforme d'une suite $f_n$ de fonctions de $\mathcal{A}$, et on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ indépendant de $n$ tel que si $\delta(x, y) \leq \eta$, alors $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$. Par passage à la limite (uniforme) en $n$, le résultat suit pour $f$.

2. Soit $(f_n)$ une suite d'éléments de $\overline{\mathcal{A}}$.

   (a) On écrit, pour tout $n \geq 1$

   $$X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1/n),$$

   et l'on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini

   $$X = \bigcup_{j=1}^{p(n)} B(x_j^n, 1/n).$$

   L'ensemble de tous ces centres, quand $n$ parcourt $\mathbb{N}$, est un ensemble dénombrable dense dans $X$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_j^n$ dans cet ensemble dénombrable, tel que $\delta(x, x_j^n) \leq 1/n$. Pour simplifier on renumérote ces centres de manière à écrire le sous-ensemble dénombrable sous la forme $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.

   (b) La suite $f_n(x_1)$ est bornée par hypothèse (car $\{f(x_1), f \in \overline{A}\}$ est borné dans $\mathbb{R}$), donc on peut en extraire une sous-suite convergente, que l'on note $f_{\varphi^1(n)}$. De même la suite $f_{\varphi^1(n)}(x_2)$ est bornée par hypothèse, donc on peut en extraire une sous-suite convergente, que l'on note $f_{\varphi^1(n) \circ \varphi^2(n)}$. On remarque que $f_{\varphi^1(n) \circ \varphi^2(n)}$ est une suite extraite de $f_{\varphi^1(n)}$, donc en particulier $f_{\varphi^1(n) \circ \varphi^2(n)}(x_1)$ converge. Par récurrence on construit une sous-suite $f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^j(n)}$ de $f_n$ telle que $f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^j(n)}(x_k)$ est convergente (quand $n$ tend vers l'infini) pour tout $1 \leq k \leq j$.

   (c) Soit $g_n = f_{\varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^n(n)}$. Alors $g_n$ est une suite extraite de $f_n$, car l'application $\psi(n)$ définie par $\psi(n) = \varphi^1 \circ \cdots \circ \varphi^n(n)$ est clairement une bijection croissante, par définition des $\varphi^j$.

Mais $g_n(x_j) = f_{\varphi^1\circ\cdots\circ\varphi^n(n)}(x_j)$ et pour $n$ assez grand on a $j \leq n$ et ainsi par la question précédente, $g_n(x_j)$ converge pour tout $j \in \mathbb{N}$ vers une limite notée $g(x_j)$.

(d) On a défini une application $g$ sur l'ensemble $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Montrer qu'elle est uniformément continue sur cet ensemble revient à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\delta(x_j, x_k) \leq \eta$, alors $|g(x_j) - g(x_k)| \leq 3\varepsilon$.

Mais comme $\overline{\mathcal{A}}$ est uniformément équicontinue, on a, pour tous les $(j, k)$ tels que $\delta(x_j, x_k) \leq \eta$, uniformément en $n$,

$$\begin{aligned} |g(x_j) - g(x_k)| &\leq |g(x_j) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g(x_k)| \\ &\leq |g(x_j) - g_n(x_j)| + \varepsilon + |g_n(x_k) - g(x_k)|, \end{aligned}$$

et comme $g_n(x_j)$ (resp. $g_n(x_k)$) converge vers $g(x_j)$ (resp. $g(x_k)$) quand $n$ tend vers l'infini, le résultat suit car pour $n$ assez grand, on a $|g(x_j) - g_n(x_j)| \leq \varepsilon$ et $|g_n(x_k) - g(x_k)| \leq \varepsilon$.

On peut alors prolonger par continuité la fonction $g$ à l'ensemble $X$ tout entier, et cette fonction est uniformément continue puisque $X$ est compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que si $\delta(x, y) \leq \alpha$ alors $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$. En outre, comme $g_n$ appartient par construction à $\overline{\mathcal{A}}$, il existe $\eta$ (indépendant de $n$) tel que si $\delta(x, x_j) \leq \eta$, alors $|g_n(x) - g_n(x_j)| \leq \varepsilon$. Il est facile de voir que la suite $g_n$ converge simplement vers $g$ sur $X$. Montrons que $g_n$ converge uniformément vers $g$ sur $X$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Alors il existe $j$ tel que $\delta(x, x_j) \leq \min(\alpha, \eta)$ et on a alors

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \\ &\leq \varepsilon + |g_n(x_j) - g(x_j)| + \varepsilon. \qquad (2) \end{aligned}$$

Le second terme ci-dessus tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini, mais a priori de manière non uniforme en $j$ (et donc de manière non uniforme en $x$ puisque $j$ dépend de $x$): il existe $N(j)$ tel que si $n \geq N(j)$, alors $|g_n(x_j) - g(x_j)| \leq \varepsilon$. Montrons cependant que l'on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $j$, on ait $|g_n(x_j) - g(x_j)| \leq \varepsilon$. Sinon, on pourrait construire une sous-suite $n_k$ et des points $x_{j_k}$ telle que $|g_{n_k}(x_{j_k}) - g(x_{j_k})| \geq \varepsilon$. Mais cette suite $x_{j_k}$ étant dans le compact $X$, elle possède elle-même une sous-suite convergente, que l'on va appeller du même nom pour simplifier les notations. Notons $\bar{x}$ sa limite. Alors

$$|g_{n_k}(x_{j_k}) - g(x_{j_k})| \leq |g_{n_k}(x_{j_k}) - g_{n_k}(\bar{x})| + |g_{n_k}(\bar{x}) - g(\bar{x})| + |g(\bar{x}) - g(x_{j_k})|.$$

L'uniforme continuité de $\overline{\mathcal{A}}$ permet de rendre arbitrairement petits les deux termes extrêmaux de cette inégalité, alors que le second terme tend vers zéro par convergence simple de $g_{n_k}$ vers $g$. Cela contredit l'hypothèse faite sur la sous-suite $n_k$. On en déduit que $g_n(x_j)$ converge uniformément (en $j$) vers $g(x_j)$, ce qu'il fallait démontrer. En effet en revenant à (2) on obtient que dès que $n \geq N$ (qui ne dépend pas de $x$), alors

$$|g_n(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. On a donc construit une sous-suite de $f_n$ qui converge uniformément vers une fonction $g$. Comme $f_n$ appartient à $\overline{\mathcal{A}}$, cette valeur d'adhérence aussi car $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé. On conclut que $\overline{\mathcal{A}}$ est compact.

### IV. Un exemple d'application du théorème

Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications $k$-lipschitziennes telles que $|f(0)| \leq 1$. Cet ensemble est clairement fermé, donc égal à son adhérence, et uniformément équicontinu d'après le I. Enfin si $x \in [0,1]$, alors pour tout $f$ de $\mathcal{A}$ on a

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq kx + 1 \leq k + 1$$

donc les hypothèses du théorème d'Ascoli sont satisfaites. Cet ensemble est donc compact dans $C([0,1])$.

**Exercice 1.** Si $A$ est une partie d'un espace métrique $X$, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Le fait que $\alpha$ et $\beta$ sont des applications croissantes pour l'inclusion est simplement dû au même résultat pour l'intérieur et l'adhérence, qui sont toutes deux des applications croissantes (cela a été vu en TD).

2. Supposons que $A$ est ouvert. Alors $\overset{\circ}{A} = A$. Mais on sait que $A \subset \overline{A}$, et donc $\overset{\circ}{A} = A \subset \alpha(A)$. De même si $A$ est fermé, alors $\overline{A} = A$. Mais $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $\beta(A) \subset \overline{A} = A$.

   Mais pour tout $A$, $\alpha(A)$ est ouvert, on a donc $\alpha(A) \subset \alpha^2(A)$. Réciproquement on remarque que comme $\overline{A}$ est fermé, on a $\beta(\overline{A}) \subset \overline{A}$. En prenant alors les intérieurs de ces ensembles on obtient que $\alpha^2(A) \subset \alpha(A)$.

   De même on sait que $\beta(A)$ est fermé, donc $\beta^2(A) \subset \beta(A)$. Réciproquement comme $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, on a $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A})$, donc en prenant les adhérences on obtient que $\beta(A) \subset \beta^2(A)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Soit par exemple
$$A = ]0,1[ \cup ]1,2[ \cup \{3\}.$$
   Alors
$$\overset{\circ}{A} = ]0,1[ \cup ]1,2[, \quad \overline{A} = [0,2] \cup \{3\}, \quad \alpha(A) = ]0,2[, \quad \beta(A) = [0,2].$$

**Exercice 2.** (3 points) On considère $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $g \in E$ vérifiant $\|g\|_\infty < 1/4$. On veut montrer qu'il existe une solution $f \in E$ à l'équation

$$2f(t) - f(t)^2 + f(t^2) = g(t).$$

On considère l'application $\phi : E \to E$ définie par

$$\phi(f)(t) = \frac{1}{2}\left(f(t)^2 - f(t^2) + g(t)\right).$$

On constate tout d'abord qu'une solution de l'équation vérifie $\phi(f) = f$ ; trouver une solution revient donc à trouver un point fixe de $\phi$.

1. Montrons que pour tout $a > 0$, $\phi$ est $(a + \frac{1}{2})$-lipschitzienne sur la boule $B(0, a)$. Soient donc $f$ et $h$ deux fonctions de la boule $B(0, a)$. On a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
|\phi(f)(t) - \phi(h)(t)| &= \frac{1}{2}\left(f(t)^2 - h(t)^2 - f(t^2) + h(t^2)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|f^2 - h^2\|_{L^\infty([0,1])} + \|f - h\|_{L^\infty([0,1])}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\|f - h\|_{L^\infty([0,1])}(\|f\|_{L^\infty([0,1])} + \|h\|_{L^\infty([0,1])} + 1) \\
&\leq \frac{1}{2}\|f - h\|_{L^\infty([0,1])}(1 + 2a).
\end{aligned}$$

   Le résultat est démontré.

2. Montrons que l'on peut trouver $a < 1/2$ tel que $\phi$ conserve $B(0, a)$. Soit $f$ une fonction de la boule $B(0, a)$. On a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
|\phi(f)(t)| &\leq \frac{1}{2}\left(\|f\|^2_{L^\infty([0,1])} + \|f\|_{L^\infty([0,1])} + \|g\|_{L^\infty([0,1])}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{4} - \varepsilon),
\end{aligned}$$

   où l'on a écrit $\|g\|_{L^\infty([0,1])} = \frac{1}{4} - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Donc démontrer le résultat revient à montrer qu'il existe $a < 1/2$ tel que

$$\frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{4} - \varepsilon) < a,$$

   c'est-à-dire tel que

$$a^2 - a + \frac{1}{4} - \varepsilon < 0.$$

   Il est facile de voir, en analysant les racines du polynôme dans le membre de droite, qu'il existe bien des $a < 1/2$ qui conviennent (à condition que $\varepsilon > 0$).

3. Les questions précédentes impliquent qu'il existe $a < 1/2$ tel que la fonction $\phi$ est $(a + \frac{1}{2})$-lipschitzienne de $B(0, a)$ sur $B(0, a)$. Cet ensemble étant complet (en choisissant la boule fermée), l'application $\phi$ admet un point fixe, ce qu'il fallait démontrer.