Corrigé de l'examen partiel

17 novembre 2008

Exercice 1

Soit $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ donné par

$$\forall f \in C([a,b]), \quad (Kf)(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt$$

où $k \in C([a,b] \times [a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $C([a,b])$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

1. *Rappeler pourquoi k est uniformément continue.*
2. *En déduire l'équicontinuité de $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$.*
3. *Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans $C([a,b])$.*

1. L'application k est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$ donc est uniformément continue. En particulier on a

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta > 0, \, \forall (x,y,t) \in [a,b]^3, \, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |k(x,t) - k(y,t)| \leq \varepsilon'.$$

2. Comme (f_n) est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{L^\infty} \leq M$. Fixons x dans $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot$ Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-y| \leq \eta$, $|k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon'$.

Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tous $(x,y) \in [a,b]$ tels que $|x-y| \leq \eta$ on a

$$|(Kf_n)(x) - (Kf_n)(y)| \leq \int_a^b |k(x,t) - k(y,t)| f_n(t)| \, dt \leq \int_a^b \varepsilon' M = \varepsilon' M(b-a) = \varepsilon$$

d'où l'équicontinuité de $\{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$.

3. On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli à la famille $A = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$. En effet cette famille est équicontinue, et pour tout $x \in [a,b]$, $A(x) = \{Kf_n, n \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ puisque

$$|Kf_n(x)| \ \leq M(b-a) \sup_{[a,b]\times[a,b]} |k(x,t)|.$$

On en déduit que $\overline{A(x)}$ est compact dans $\mathbb{R}$, et le théorème d'Ascoli permet de conclure que $\overline{A}$ est compact. La suite Kf_n possède donc une sous-suite convergente.

Exercice 2

1. *Soit t un réel fixé. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-xt} \sin x$.*

2. En remarquant que $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt$ *pour tout* $x > 0$*, et en utilisant le théorème de Fubini, donner une expression de l'intégrale* $\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$*, pour tout* $A > 0$*.*

3. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot$$

1. On remarque que $e^{-xt}\sin x = \mathrm{Im}\,(e^{x(i-t)})$. Une primitive de $x \mapsto e^{x(i-t)}$ est clairement l'application $x \mapsto \frac{1}{i-t}e^{x(i-t)}$, dont la partie imaginaire est la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}(-\cos x - t\sin x).$$

2. On remarque que la fonction

$$(x,t) \in [0,A] \times \mathbb{R}^+ \mapsto |\sin x| e^{-xt}$$

est intégrable, car par le théorème de Tonelli on a

$$\int_{[0,A]\times\mathbb{R}^+} |\sin x| e^{-xt}\,dxdt = \int_0^A |\sin x| \left(\int_0^\infty e^{-xt}\,dt\right) dx = \int_0^A \frac{|\sin x|}{x}\,dx < \infty.$$

Donc par le théorème de Fubini on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{[0,A]\times\mathbb{R}^+} \sin x e^{-xt}\,dxdt &= \int_0^\infty \left(\int_0^A \sin x\, e^{-xt}\,dx\right) dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\cos A + t\sin A}{1+t^2}e^{-tA} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt\end{aligned}$$

par la question précédente.

3. On cherche la limite $A \to \infty$ de cette intégrale. On remarque que la fonction à intégrer converge vers $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et qu'elle est majorée uniformément (pour $A > 1$ par exemple) par $t \mapsto \frac{(1+t)e^{-t} - 1}{1+t^2}$ qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 3

Soit p *tel que* $1 \leq p \leq +\infty$*. Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, soit* $g \in L^p(\mathbb{R})$*. Soit* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $1/||f||_1 > |a|$*. Montrer que l'application*

$$L : h \longmapsto af * h + g$$

définit une application contractante de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même. En déduire que l'équation

$$h - af * h = g$$

possède une unique solution dans $L^p(\mathbb{R})$.

On commence par remarquer que par l'inégalité de Young, l'application L est linéaire continue de L^p sur lui-même. Montrons que c'est une contraction. Soient h et h' deux fonctions dans $L^p(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|L(h) - L(h')\|_{L^p} &= \|af * (h - h')\|_{L^p} \\ &\leq |a| \|f\|_{L^1} \|h - h'\|_{L^p} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Young. Le résultat suit par hypothèse sur a.

L'espace L^p étant un espace de Banach, on conclut par le théorème de point fixe qu'il existe une unique application h telle que $L(h) = h$.

Exercice 4

Dans tout cet exercice, p désigne un réel dans $[0, \infty[$. Soit X un sous-espace mesurable de $\mathbb{R}$. Pour f une fonction mesurable sur X, on note

$$m_f(t) = \lambda(\{x \in X,\ |f(x)| > t\})$$

la fonction de répartition de f, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. *Soit $f \in L^p(X)$. Montrer que $m_f(t) \leq \dfrac{\|f\|_p^p}{t^p}$.*
2. *Soit $f \in L^p(X)$. Montrer que*
$$\int |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt$$
3. *On appelle espace L^p faible l'ensemble L^p_f des fonctions mesurables f telles qu'il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$, $m_f(t) \leq \dfrac{C}{t^p}$.*
Montrer que $L^p \subset L^p_f$ mais que l'inclusion est stricte.

1. Il s'agit simplement de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. On applique le théorème de Tonelli : on a en effet

$$p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) dt = p \int_0^\infty \int_{|f(x)|>t} t^{p-1}\, dx dt = \int_X \int_0^{|f(x)|} p t^{p-1}\, dt dx$$

ce qui donne le résultat.

3. Soit $f \in L^p$, alors la question 1 donne directement que $f \in L^p_f$ car $t \mapsto t^p m_f(t) t$ est bornée par $\|f\|^p_{L^p}$.

En revanche si f est une fonction telle que $m_f(t) = \frac{C}{t^p}$ alors f n'est pas dans L^p par la question 2. Par exemple on peut choisir $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ avec $X = \mathbb{R}^+$.