ANALYSE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANALYSE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Isabelle Gallagher
avec des exercices de Louis-Pierre Chaintron

École Normale Supérieure de Paris
Année universitaire 2024–2025

Ces notes n'ont rien d'original, et s'inspirent largement notamment de notes de cours d'A.-L. Dalibard, de F. Golse, et des livres de J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, de H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, et de J. Hunter.

Table des matières

1. Introduction et outils utiles 1
1.1. Introduction 2
1.2. Équations différentielles ordinaires dans les Banach 4
1.3. Compacité, topologies faible et faible $*$ 5
1.4. Théorie des distributions 8
1.5. Transformée de Fourier 12
1.6. Séries de Fourier 14
1.7. Espaces de Sobolev 15
1.8. Résultats d'approximation 25
1.9. Intégrale de Bochner 26
1.10. Régularité et compacité 27
1.11. Différentes notions de solutions d'EDP étudiées dans ce cours 30
1.12. Exercices 32
1.13. Solutions de quelques exercices 35

2. Équations d'ordre 1, Équations de transport 37
2.1. Méthode des caractéristiques 37
2.2. Équation de transport 43
2.3. Exercices 52
2.4. Solutions de quelques exercices 58

3. Équations elliptiques et paraboliques 65

3.1. L'équation de Laplace-Poisson 65
3.2. EDP elliptiques : résolution par Lax-Milgram 70
3.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier 75
3.4. EDP paraboliques dans un domaine borné: résolution par la méthode de Galerkin 77
3.5. Exercices 83
3.6. Solutions de quelques exercices 85

4. Équation des ondes et de Schrödinger 89
4.1. Résolution d'une EDP d'évolution dans l'espace des distributions tempérées 90
4.2. Résolution de l'équation des ondes dans l'espace des distributions tempérées, et dans les espaces de Sobolev 93
4.3. Résolution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des distributions tempérées et de Lebesgue 98
4.4. Exercices 110

5. Équations de Navier-Stokes 115
5.1. Problème de Stokes dans le tore 116
5.2. Solutions faibles 117
5.3. Résultats de stabilité 123
5.4. Résultats d'existence et d'unicité 128
5.5. Comportement en temps grand en trois dimensions d'espace 134

CHAPITRE 1

Introduction et outils utiles

Sommaire

1.1. Introduction **2**
1.1.1. But de l'étude d'EDP et exemples 2
1.1.2. Classification 2
1.2. Équations différentielles ordinaires dans les Banach **4**
1.3. Compacité, topologies faible et faible $*$ **5**
1.4. Théorie des distributions **8**
1.4.1. Distributions tempérées et distributions à support compact 8
1.4.2. Produit de convolution 10
1.4.3. Solution fondamentale d'EDP 11
1.5. Transformée de Fourier **12**
1.6. Séries de Fourier **14**
1.7. Espaces de Sobolev **15**
1.7.1. Définitions 15
1.7.1.1. Le cas de l'espace entier 15
1.7.1.2. Le cas périodique 17
1.7.1.3. Le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ 18
1.7.2. Injections 18
1.8. Résultats d'approximation **25**
1.8.1. Approximation par régularisation 25
1.8.2. Approximation par différences finies 25
1.9. Intégrale de Bochner **26**
1.10. Régularité et compacité **27**
1.11. Différentes notions de solutions d'EDP étudiées dans ce cours **30**
1.12. Exercices **32**
1.13. Solutions de quelques exercices **35**

1.1. Introduction

1.1.1. But de l'étude d'EDP et exemples. — Il s'agit d'étudier l'évolution en temps et en espace de quantités "physiques" (par exemple la température d'un fluide, la densité de particules constituant un gaz, la concentration d'une espèce chimique, la courbure d'une surface, etc).

Les exemples emblématiques d'équations aux dérivées partielles (EDP) étudiées dans ce cours seront les suivants :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \text{(chaleur)} \\ \partial_t u + b\cdot\nabla u &= 0 \quad \text{(transport)} \\ \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \text{(ondes)} \\ i\partial_t u + \Delta u &= 0 \quad \text{(Schrödinger)} \end{aligned}$$

et des versions non linéaires, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla p &=& 0 \\ \operatorname{div} u &=& 0. \end{array} \right. \quad \text{(Navier-Stokes)}$$

Le but est de trouver des solutions explicites si possible, ou à défaut (ce qui sera le plus souvent le cas) de montrer l'existence, l'unicité, la stabilité de solutions et d'en étudier les propriétés (à partir de propriétés connues des données du problème). De même qu'une équation algébrique peut avoir ou ne pas avoir de solution suivant la nature de la solution cherchée (réelle ou non par exemple), dans le cas d'une EDP la réponse va dépendre du "type" de solution cherchée, i.e. de l'espace fonctionnel choisi (pour la donnée initiale, pour les conditions aux bords, pour la solution elle-même).

On va chercher à décrire les solutions de manière aussi précise que possible, tout en développant des techniques aussi générales que possible afin de les appliquer à plusieurs équations à la fois.

Nous renvoyons au Paragraphe 1.11 pour une discussion plus détaillée de la démarche que nous adopterons dans ce cours.

1.1.2. Classification. — On s'intéresse à des EDP d'ordre 2 au plus (en termes du nombre de dérivées partielles de l'inconnue intervenant dans l'équation), linéaires ou non linéaires, sous forme d'équations ou de systèmes d'équations.

La classification suivante est une façon de repérer le type d'équation en jeu, et a pour but de permettre d'identifer des propriétés communes à de nombreuses équations de la même classe. Elle est loin d'être exhaustive ni complètement pertinente (certaines équations combinent des caractéristiques qui les font correspondre à différentes classes) mais on trouve souvent ces notions dans la littérature, et on étudiera ces différents types d'équations dans ce cours.

On considère 6 réels A, B, C, D, E, F et l'EDP linéaire à coefficients constants dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$A\partial_t^2 u + B\partial_t\partial_x u + C\partial_x^2 u + D\partial_t u + E\partial_x u + Fu = 0. \tag{1.1.1}$$

On peut considérer que t est la variable temporelle et x la variable d'espace, mais cela n'a pas d'importance ici. On pourrait également se placer en dimension supérieure, par extension de l'analyse ci-dessous. Supposons que l'on cherche une solution sous la forme

$$u(t,x) = U\exp\Big(\lambda t + kx\Big), \quad (\lambda,k)\in\mathbb{R}^2.$$

En injectant cette formule dans (1.1.1) on trouve que

$$A\lambda^2 + B\lambda k + Ck^2 + D\lambda + Ek + F = 0. \tag{1.1.2}$$

Dans le cas où $(A,B,C)\neq(0,0,0)$ cette équation est celle d'une conique, que l'on peut mettre sous la forme

$${}^tXQX + LQ + F = 0, \quad X = \begin{pmatrix} \lambda \\ k \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \quad L = (D \quad E).$$

La nature de l'ensemble des solutions $(\lambda,k)\in\mathbb{R}^2$ à cette équation polynômiale dépend du déterminant de Q, donc du signe de B^2-4AC (et sauf dans le cas où cette expression s'annule, les paramètres associés aux ordres inférieurs ne changent rien à la classification).

- Si $B^2-4AC<0$, l'ensemble $(\lambda,k)\in\mathbb{R}^2$ solution de (1.1.2) est une ellipse, on dit que l'équation est *elliptique*.

  Par exemple, l'équation de Laplace est dite elliptique, elle correspond au cas où $A=C=1$ et $B=0$:

  $$\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0.$$

- Si $B^2-4AC>0$, l'ensemble $(\lambda,k)\in\mathbb{R}^2$ solution de (1.1.2) est une hyperbole, on dit que l'équation est *hyperbolique*.

  Par exemple, l'équation des ondes est dite hyperbolique, elle correspond au cas où $A=-C=1$ et $B=0$:

  $$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0.$$

- Si $B^2-4AC=0$ avec soit $AE\neq 0$ ou $CD\neq 0$, l'ensemble $(\lambda,k)\in\mathbb{R}^2$ solution de (1.1.2) est une parabole, on dit que l'équation est *parabolique*.

  Par exemple, l'équation de la chaleur est dite parabolique, elle correspond au cas où $D=-C=1$, les autres paramètres étant nuls :

  $$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0.$$

Dans le cas à coefficients variables, on a le même type de classification, dépendant du signe de $B^2(t,x) - 4A(t,x)C(t,x)$, mais la classification n'est plus "universelle": par exemple l'équation $\partial_t^2 u + x\partial_x^2 u = 0$ change de nature suivant le signe de x.

On peut généraliser la notion au cas de systèmes. Par exemple

$$\partial_t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = 0$$

est hyperbolique car u et v vérifient une équation d'ondes. Pour des raisons qui seront apparentes plus tard dans ce cours, l'équation de transport

$$\partial_t u + b(t,x)\cdot\nabla u + c(t,x)u = 0$$

sera aussi dite hyperbolique.

On verra que les équations paraboliques ont un “effet régularisant” et une “vitesse infine de propagation”, alors que les équations hyperboliques “propagent les singularités” et ont une “vitesse finie de propagation”.

1.2. Équations différentielles ordinaires dans les Banach

On rappelle qu'un espace de Banach[1] est un espace vectoriel normé complet. Par exemple pour tout ensemble A et tout espace de Banach F, l'espace des fonctions bornées de A dans F est un espace de Banach si on le munit de la norme du sup

$$\|f\|_{L^\infty(A;F)} := \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F .$$

De même l'espace des applications continues bornées d'un espace métrique (X,d) à valeurs dans un espace de Banach F, muni de la norme du sup, est un espace de Banach. L'espace des suites bornées de $\mathbb{Z}^N$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\ell^\infty(\mathbb{Z}^N)$ est également un espace de Banach, ainsi que les suites tendant vers 0 à l'infini.

Si E est un espace vectoriel normé et si (x_n) est une suite de E, alors on dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} x_n$ converge dans E. La série est dite normalement convergente si $\sum \|x_n\|_E$ converge. Si E est un espace de Banach, les deux notions sont équivalentes.

Rappelons sans démonstration le théorème de Cauchy[2]-Lipschitz[3] donnant l'existence et l'unicité de solutions à une équation différentielle ordinaire (EDO).

Théorème 1.2.1. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit Ω un ouvert dans un espace de Banach F et soit $f : I\times\Omega \to F$ une application continue telle que pour tout couple (t_0,x_0) dans $I\times\Omega$, il existe un voisinage V de (t_0,x_0) dans $I\times\Omega$ et un réel $L_0>0$ tels que*

$$\forall\big((t,x_1),(t,x_2)\big)\in V\times V,\quad \big\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\big\| \le L_0\|x_1-x_2\| .$$

Alors pour tout couple (t_0,x_0) dans $I\times\Omega$, il existe un voisinage J de t_0 dans I tel que l'équation différentielle ordinaire

$$\text{(EDO)}\qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(t,x(t)\big) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

a une solution unique définie sur J.

Faisons quelques remarques sur ce théorème.

1. Notons que x est solution si x est différentiable sur J, à valeurs dans Ω. L'équation implique que x est de classe $\mathscr{C}^1$. On peut aussi considérer des solutions continues à
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t',x(t')\big)\,dt'$$
qui sont en fait $\mathscr{C}^1$ et vérifient (EDO).

2. La démonstration repose sur le théorème de point fixe de Banach, appliqué à l'espace de Banach $C(J;F)$. L'unicité se déduit du lemme de Grönwall[4] que l'on rappelle ici.

   Lemme 1.2.2. — *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $g : I\to\mathbb{R}$ est dérivable, si ℓ, f sont dans $L^1(I)$ et vérifient pour tout $t\in I$*
   $$\dot{g}(t) \le \ell(t)g(t) + f(t)$$

[1] 1892-1945
[2] 1789-1857
[3] 1832-1903
[4] 1877-1932

alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $t \geq t_0$ dans I

$$g(t) \leq \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \ell(t')\,dt'\Big) g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t'}^{t} \ell(t'')\,dt''\Big) f(t')\,dt'.$$

3. Si $0 \in I$, on peut définir le flot ψ de l'EDO
$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$$
par la solution unique de
$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,x) = f\big(t, \psi(t,x)\big) \\ \psi(0,x) = x. \end{cases}$$
L'application $t \mapsto \psi(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de 0, qui peut dépendre de x.
4. Une solution maximale de (EDO) est une solution x définie sur J telle qu'il n'y ait pas de fonction y (autre que x) définie sur $J' \supset J$, coïncidant avec x sur J et telle que $\dot{y}(t) = f\big(t, y(t)\big)$. Une solution est dite globale si elle est définie sur I et vérifie l'équation sur I. Sous les hypothèses du Théorème 1.2.1, il existe une unique solution maximale, définie sur un sous-intervalle J de I. Dans le cas où $I = [t_0, \infty[$, si $\sup J = T < \infty$ alors
$$\sup_{[t_0, T[} \big\|x(t)\big\| = \infty.$$
5. On peut demander moins sur f que le caractère Lipschitz: c'est le théorème d'Osgood[5] (voir les exercices, paragraphe 1.12). On peut supposer que
$$\forall \big((t,x_1),(t,x_2)\big) \in V \times V, \quad \big\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\big\| \leq \alpha(t)\omega\big(\|x_1 - x_2\|\big),$$
avec $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante, continue, nulle en 0 et positive ailleurs, telle qu'il existe $r_0 > 0$ tel que
$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\omega(r)} = \infty$$
et avec $\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Par exemple $\omega(r) = r|\log r|$, $\omega(r) = r|\log r|\log(|\log r|)$ conviennent, mais pas $\omega(r) = r^\beta$, si $\beta < 1$.
6. En dimension finie, d'après le théorème de Peano[6] il suffit que f soit continue pour avoir l'existence (sans unicité), ce n'est pas le cas en dimension infinie (sauf si on rajoute une hypothèse de compacité sur f).

1.3. Compacité, topologies faible et faible ∗

Le théorème de Riesz affirme que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte. Le critère de compacité suivant, dû à Arzelà[7] et Ascoli[8], est très important dans la pratique.

***Théorème 1.3.1* (Arzelà-Ascoli).** — *Soit (K,d) un espace métrique compact et F un espace de Banach. Soit A un sous-ensemble de l'espace $C(K;F)$ des fonctions continues de K dans F. Pour tout $x \in K$ on note*
$$A(x) := \big\{f(x),\ f \in A\big\}.$$

On suppose que

[5] 1864-1943
[6] 1854-1932
[7] 1847-1912
[8] 1843-1896

1. *pour tout* $x \in K$, $\overline{A(x)}$ *est compact dans* F;
2. A *est équicontinue en tout point de* K, *c'est-à-dire que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha(\varepsilon) > 0$ *tel que pour tout* $f \in A$,

$$d(x,y) < \alpha(\varepsilon) \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon\,.$$

Alors $\overline{A}$ *est compact dans* $C(K;F)$ *pour la norme du sup.*

Le cas des applications linéaires sera spécialement utile. On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels normés, alors une application linéaire $T : E \to F$ est continue si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E\,.$$

On notera $\mathscr{L}(E;F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F (appellées souvent "opérateurs bornés"), et $\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(E;E)$. Si F est un Banach, alors $\mathscr{L}(E;F)$ est un Banach.

Une autre façon de "rendre compacte" une suite bornée dans un Banach est d'affaiblir la notion de convergence. Soit E un espace de Banach. On rappelle que si $\mathscr{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ est une famille de semi-normes[9] sur E, les ouverts de la topologie associée à $\mathscr{P}$ sont les parties U de E telles que

$$\forall x \in U\,, \quad \exists\, \alpha \in \mathscr{A} \text{ et } r > 0 \quad \text{tels que} \quad B_\alpha(x,r) := \left\{y \in E \,/\, p_\alpha(x-y) < r\right\} \subset U\,.$$

On rappelle que cette famille est séparante si

$$\left(p_\alpha(x) = 0 \ \forall \alpha \in \mathscr{A}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = 0\,.$$

On note $E^* := \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ l'espace (de Banach) des formes linéaires continues sur E (à valeurs réelles pour simplifier ici). On considère alors la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} E \times E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,f) &\longmapsto \langle f, x\rangle\,. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\left(\forall f \in E^\star\,, \quad \langle f, x\rangle = 0\right) \quad \Longrightarrow \quad x = 0\,.$$

En effet on peut appliquer le théorème de Hahn[10]-Banach géométrique[11] qui implique que pour tout $x \neq 0$ dans E, il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare strictement $\{x\}$ et $\{0\}$: ainsi

$$\langle f, x\rangle < \alpha < 0\,.$$

On peut donc définir une nouvelle topologie d'espace vectoriel localement convexe[12] séparé[13] sur E, que l'on note $\sigma(E,E^*)$, en considérant pour toute partie finie B de E^* la semi-norme

$$\begin{aligned} p_B : \quad E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sup_{f\in B} |\langle f, x\rangle|\,. \end{aligned}$$

---

[9] Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ sous-additive et absolument homogène:

$$\forall (x,y) \in E \times E\,, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)\,; \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \forall x \in E\,, \quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)\,.$$

[10] 1879-1934

[11] Si E est un espace vectoriel topologique réel localement convexe, et A et B sont deux convexes dans E, non vides et disjoints, avec A compact et B fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.

[12] E est localement convexe si l'origine admet un système fondamental de voisinages convexes – c'est équivalent à pouvoir y définir une topologie à l'aide d'une famille de semi-normes.

[13] E est séparé si pour tout vecteur $x \neq 0$ dans E, il existe un voisinage de 0 ne contenant pas x.

Les ouverts de E pour la topologie $\sigma(E,E^*)$ sont donc les $U \subset E$ tels que $\forall x \in U$, il existe une partie finie B de E^* et un réel $r>0$ tels que

$$\left\{y \in E \,/\, \sup_{f\in B} |\langle f, x-y\rangle| < r\right\} \subset U\,.$$

De même si $f \neq 0$ appartient à E^* alors il existe $x \in E$ tel que $\langle f, x\rangle \neq 0$ donc on a

$$\big(\forall x \in E,\ \ \langle f, x\rangle = 0\big) \quad \Longrightarrow \quad f = 0\,.$$

On peut donc définir une nouvelle topologie d'espace vectoriel localement convexe séparé sur E^*, que l'on note $\sigma(E^*,E)$, en considérant pour toute partie finie A de E, la semi-norme

$$q_A : \begin{array}{c} E^* \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in A} |\langle f, x\rangle|\,. \end{array}$$

Cette dernière ne nécessite pas Hahn-Banach pour être construite. Les ouverts de E^* pour la topologie $\sigma(E^*,E)$ sont donc les $V \subset E^*$ tels que $\forall f \in V$, il existe une partie finie A de E et un réel $r>0$ tels que

$$B_A(f;r) := \left\{g \in E^* \,/\, \sup_{x\in A} |\langle f-g, x\rangle| < r\right\} \subset V\,.$$

Par exemple, une suite f_n tend vers 0 pour cette topologie si pour tout $r>0$ et toute partie finie A de E, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, f_n appartient à $B_A(0;r)$. En d'autres termes, pour tout $r>0$ et pour tout $x \in E$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|\langle f_n, x\rangle| < r$. C'est la topologie de la convergence simple.

Définition 1.3.2. — *Soit E un espace de Banach.*

- *La topologie associée à $\|\cdot\|_E$ est dite topologie forte sur E.*
- *La topologie $\sigma(E,E^*)$ est dite topologie faible sur E.*
- *La topologie $\sigma(E^*,E)$ est dite topologie faible $*$ sur E.*

Concrètement :

- Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie forte ($x_n \to x$) si $\|x_n - x\|_E \to 0$.
- Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie faible ($x_n \rightharpoonup x$) si pour tout $f \in E^*$, $\langle f, x_n - x\rangle \to 0$.
- Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la topologie faible $*$ ($f_n \rightharpoonup^* f$) si pour tout $x \in E$, $\langle f_n - f, x\rangle \to 0$.

Si une suite converge fortement, elle converge faiblement. La réciproque n'est pas vraie, comme le montrent les exemples suivants : soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et soit ψ une fonction 2π-périodique dont la restriction à une période I est dans $L^2(I)$ (on note cet ensemble $L^2_{2\pi}$) non constante, alors

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot - n) &\rightharpoonup 0 \ \text{ dans } \ L^2(\mathbb{R}) && \text{(évanescence)} \\ n^{\frac{1}{2}}\varphi(n\cdot) &\rightharpoonup 0 \ \text{ dans } \ L^2(\mathbb{R}) && \text{(concentration)} \\ \psi(n\cdot) &\rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(t)\,dt \ \text{ dans } \ L^2_{2\pi} && \text{(oscillation)} \end{aligned}$$

et ces convergences ne sont pas fortes. On laisse la vérification de ces points en exercice (le dernier utilise le développement en série de Fourier d'une fonction 2π-périodique, voir le paragraphe 1.6).

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E alors elle est bornée dans E et par ailleurs $\|x\|_E \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E$: il y a "perte de masse" lors du passage à la limite faible. En revanche si E est uniformément convexe[14] et si $x_n \rightharpoonup x$ avec $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_E \le \|x\|_E$ alors $x_n \to x$.

Nous aurons souvent recours à la notion de convergence faible pour construire des solutions (faibles) aux EDP que nous étudierons, grâce au théorème suivant dit de compacité faible, dû à Banach et à Alaoglu[15].

***Théorème 1.3.3* (Banach-Alaoglu).** — *Si E un espace vectoriel normé, la boule unité fermée de $E^\star$ est compacte pour la topologie faible $*$.*

En particulier si E est un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans E alors il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement.

L'inconvénient majeur de la notion de convergence faible est qu'elle ne commute pas avec les opérations non linéaires. A titre d'exemple on peut considérer la suite de fonctions $x \mapsto \cos(nx)$, qui tend faiblement vers 0 mais dont le carré tend faiblement vers $1/2$. Pour passer à la limite faible dans des fonctions non linéaires d'une suite de fonctions qui converge faiblement, il sera nécessaire d'obtenir de la compacité forte sur la suite en question (par application d'un résultat du type Arzelà-Ascoli, Aubin-Lions (voir le Lemme 1.10.2), etc).

1.4. Théorie des distributions

On rappelle ici des rudiments de théorie des distributions qui pourront être utiles dans ce cours. On ne parlera que de distributions tempérées, ce qui sera suffisant ici.

Rappelons que l'espace de Schwartz[16] $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions indéfiniment différentiables, à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées: une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tous les entiers $m,k\in\mathbb{N}$,

$$N_{m,k}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\le k}} \left|\langle x\rangle^m \partial^\alpha \varphi(x)\right| < \infty,$$

avec $\langle x\rangle := \sqrt{1+|x|^2}$ et $|\alpha| := \sum_{1\le i\le n} \alpha_i$. On a noté $\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_d}^{\alpha_d}$.

1.4.1. Distributions tempérées et distributions à support compact. —

***Définition 1.4.1*.** — *Une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, autrement dit*

$$T: \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{C} \\ \psi & \mapsto & \langle T,\psi\rangle \end{array}$$

est telle qu'il existe une constante $C>0$ et deux entiers $m,k\in\mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left|\langle T,\psi\rangle\right| \le C N_{m,k}(\psi).$$

---

[14] Un espace vectoriel normé E est uniformément convexe si pour tout réel $\varepsilon>0$ il existe un réel $\delta>0$ tel que pour tous x,y dans B_E,

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_E \ge 1-\delta \quad\Longrightarrow\quad \|x-y\|_E \le \varepsilon.$$

Par exemple les espaces $L^p(\Omega)$ sont uniformément convexes si $1<p<\infty$.

[15] 1914-1981

[16] 1915-2002

On note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$.

Cette définition s'étend de manière naturelle à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ (dans le cas où l'ouvert est borné, la décroissance à l'infini n'est bien sûr plus une condition à imposer pour la classe de Schwartz, qui n'est autre que la classe des fonctions $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$).

Par exemple les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \le p \le \infty$ sont inclus dans l'espace des distributions tempérées.

On note que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication par x_j et par dérivation ∂_j. Ainsi $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'est aussi, en définissant pour tout $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle x_j T, \psi\rangle := \langle T, x_j\psi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \partial_j T, \psi\rangle := -\langle T, \partial_j\psi\rangle\,.$$

***Définition 1.4.2* (Convergence des distributions).** — *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathscr{S}'(\Omega)$. On dit que (T_n) converge vers T dans $\mathscr{S}'(\Omega)$ si*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\Omega)\,, \quad \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle\,, \quad n \to \infty\,.$$

Proposition 1.4.3. — *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions dans $\mathscr{S}'(\Omega)$ convergeant vers une distribution T dans $\mathscr{S}'(\Omega)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite de distributions $(\partial^\alpha T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathscr{S}'(\Omega)$.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ on a

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha\varphi\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle\,.$$

La proposition est démontrée. □

***Définition 1.4.4* (Suite régularisante).** — *Soit $\zeta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1, à support dans $B(0,1)$. La suite $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ définie par*

$$\zeta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^d}\zeta\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)$$

est appelée suite régularisante.

Soit $a \in \mathbb{R}^d$, on appelle masse de Dirac[17] en a et l'on note δ_a la distribution tempérée définie par

$$\langle \delta_a, \psi\rangle := \psi(a)\,, \quad \forall \psi \in \mathscr{S}(\Omega)\,.$$

Proposition 1.4.5. — *Soit ζ_ε une suite régularisante. Alors*

$$\zeta_\varepsilon \to \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathscr{S}'(\Omega)\,, \quad \varepsilon \to 0\,.$$

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\Omega)$ et calculons

$$I_\varepsilon := \int \zeta_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

Comme ζ_ε est d'intégrale 1 on a

$$I_\varepsilon = \int \zeta_\varepsilon(x)\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\,dx + \varphi(0)$$

et

$$\Big|\int \zeta_\varepsilon(x)\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)\,dx\Big| \le C\varepsilon \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(x)|$$

ce qui démontre le résultat. □

[17] 1902-1984

Remarque 1.4.6. — *Dans la démonstration de la Proposition 1.4.5 il n'est pas nécessaire que la fonction ζ définissant la suite régularisante soit à support compact. Par exemple la fonction*

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \quad avec \quad \rho(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifie de même

$$\rho_\varepsilon \to \delta_0 \quad dans \quad \mathscr{S}'(\Omega), \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.4.1}$$

Définition 1.4.7. — *Une distribution tempérée T est nulle au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ s'il existe un ouvert borné Ω contenant x tel que pour toute fonction $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\langle T, \psi\rangle = 0$. Le support d'une distribution tempérée T est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. On note $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions à support compact.*

Remarque 1.4.8. — *On peut identifier $\mathscr{E}'(\Omega)$ au dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$*[18]*. En effet si $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ alors pour toute fonction φ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, on peut montrer que la valeur $\langle T, \chi\varphi\rangle$ est indépendante du choix de $\chi \in \mathscr{S}(\Omega)$ égale à 1sur un voisinage ouvert de Supp$T$. On définit donc*

$$\langle T, \varphi\rangle := \langle T, \chi\varphi\rangle$$

pour toute telle χ.

Par exemple δ_a est une distribution à support compact, avec $\mathrm{Supp}\,\delta_a = \{a\}$.

1.4.2. Produit de convolution. — Si f, g sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors leur produit de convolution est la fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy.$$

On peut montrer que si $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $E \star \psi$ est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad E \star \psi(x) := \langle E, \psi(x - \cdot)\rangle.$$

De même si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $E \star \psi$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut aussi définir le produit de convolution de $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ par la distribution tempérée $S \star E$ définie par

$$\langle S \star E, \psi\rangle := \langle S, \check{E} \star \psi\rangle,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, où la distribution $\check{E}$ est définie par

$$\langle \check{E}, \psi\rangle := \langle E, \check{\psi}\rangle, \quad \check{\psi}(x) := \psi(-x).$$

On note que

$$\partial_j(S \star E) = (\partial_j S) \star E = S \star (\partial_j E) \text{ dans } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Enfin si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $S \star \psi$ définie comme ci-dessus par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad S \star \psi(x) := \langle S, \psi(x - \cdot)\rangle$$

est une distribution tempérée qui est en outre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Elle n'est en revanche pas forcément dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ donc on ne peut pas définir a priori la convolution de deux distributions tempérées.

---

[18] On rappelle que l'on peut munir $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ d'une topologie via la famille de seminormes

$$p_{j,k}(\varphi) := \sup_{x \in K_j} \sup_{|\alpha| \le k} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où (K_j) est une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}^d$.

Enfin on rappelle les inégalités de Young: si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors on peut définir $f \star g$ qui est dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $1 + 1/r = 1/p + 1/q$, et

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

1.4.3. Solution fondamentale d'EDP. — Un opérateur différentiel sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire P de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ dans lui-même définie par une expression de la forme

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq n \\ \alpha \in \mathbb{N}^d}} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

sur Ω, avec $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Le plus petit entier j tel que $a_\alpha = 0$ pour tout $|\alpha| > j$ est appelé l'ordre de l'operateur. On utilise souvent la notation

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_d}^{\alpha_d}, \quad D_{x_j} := \frac{1}{i} \partial_{x_j}.$$

Définition 1.4.9. — *Soit $P = P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$*

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha D^\alpha,$$

où les a_α sont des constantes dans $\mathbb{C}$.

Une solution fondamentale de $P(D)$ est une distribution tempérée $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$P(D)S = \delta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Remarquons qu'il n'y a en général pas unicité de la solution fondamentale. Par exemple si $a_0 \equiv 0$ alors si S est une solution fondamentale, $S + c$ est aussi solution fondamentale pour toute constante c.

Théorème 1.4.10. — *Soit $P = P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ et soit S une solution fondamentale de $P(D)$. Si E est une distribution à support compact alors l'équation aux dérivées partielles*

$$P(D)f = E \quad \textit{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$$

d'inconnue $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ admet au moins une solution, donnée par la formule

$$f = E \star S.$$

Démonstration. — Le produit de convolution $S \star E$ définit bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$ et l'on sait que

$$D^\alpha(E \star S) = (D^\alpha E) \star S \quad \text{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Comme P est à coefficients constants, on a donc par linéarité

$$P(D)(E \star S) = \big(P(D)E\big) \star S = \delta_0 \star S = S,$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.4.11. — *Posons*

$$E_1(x) := \frac{1}{2}|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors la distribution E_1 est une solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — On cherche $E_1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ telle que

$$E_1'' = \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}).$$

En notant H la fonction d'Heaviside[19] on a

$$E_1' = H + c,$$

avec c une constante arbitraire. On en déduit que E_1 est une fonction continue qui s'écrit

$$E_1 = x_+ + cx + c'$$

avec c et c' deux constantes. Le cas particulier $c = -\frac{1}{2}$ et $c' = 0$ donne le résultat souhaité. □

Les autres dimensions seront traitées en exercices (voir le paragraphe 1.12).

1.5. Transformée de Fourier

Définition 1.5.1. — *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier[20] de f est la fonction $\mathscr{F}f$, ou encore $\hat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par*

$$\mathscr{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini[21] permettent facilement de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.5.2. — *Soient f, g dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

1. *$\mathscr{F}f$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, $\|\mathscr{F}f\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$ et $\mathscr{F}f(\xi)$ tend vers zéro à l'infini.*
2. *On a $\mathscr{F}(f \star g) = (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)$.*

La proposition suivante montre que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini.

Proposition 1.5.3. — *Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}^d$.*

1. *Si $x \mapsto \langle x\rangle^m \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathscr{F}\varphi \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $|\alpha| \le m$*

$$(i\partial_\xi)^\alpha \big(\mathscr{F}\varphi\big)(\xi) = \mathscr{F}(x^\alpha \varphi)(\xi). \tag{1.5.1}$$

2. *Si $\varphi \in \mathscr{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \le m$, alors*

$$\forall |\alpha| \le m, \quad \mathscr{F}(\partial_x^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathscr{F}\varphi(\xi). \tag{1.5.2}$$

3. *La transformée de Fourier de la fonction $(\tau_a)_*\varphi := \varphi(\cdot - a)$ est donnée par*

$$\mathscr{F}\big((\tau_a)_*\varphi\big)(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

4. *La transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto e^{ia\cdot x}\varphi(x)$ est donnée par*

$$\mathscr{F}\big(e^{ia\cdot x}\varphi\big)(\xi) = (\tau_a)_*\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

[19] 1850-1925
[20] 1768-1830
[21] 1879-1943

***Théorème 1.5.4* (Inversion de Fourier).** — *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathscr{F} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a presque partout sur $\mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathscr{F} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)(x)\,,$$

où pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\overline{\mathscr{F}} g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi\,.$$

***Théorème 1.5.5*.** — *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, dont l'inverse est $(2\pi)^{-d}\overline{\mathscr{F}}$ avec les notations du Théorème* 1.5.4.

On note que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée est elle-même une distribution tempérée, définie par

$$\mathscr{F} T : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{C} \\ \psi & \mapsto & \langle T, \mathscr{F}\psi \rangle\,. \end{array}$$

Cette définition découle naturellement de la formule de Parseval[(22)]-Plancherel[(23)]

$$\int \mathscr{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)\, d\xi = \int \varphi(x)\mathscr{F}\psi(x)\, dx$$

pour φ et ψ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathscr{F}}$.

On définit pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$

$$e_\xi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{-ix\cdot\xi}\,. \end{array}$$

La transformée de Fourier d'une distribution E à support compact est la fonction de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ donnée par

$$\mathscr{F} E(\xi) := \langle E, e_\xi \rangle\,.$$

Cette fonction est à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées, au sens où pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante C tels que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_\xi^\alpha \mathscr{F} E(\xi)| \le C\langle\xi\rangle^m\,.$$

En fait on peut montrer que cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. L'inverse est aussi vrai, c'est le théorème de Paley[(24)]-Wiener[(25)].[(26)]

On note que si $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $E \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathscr{F}(S \star E) = \mathscr{F} E \mathscr{F} S \text{ dans } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\,.$$

Notons aussi que

$$\delta_0 \star \psi = \psi\,, \quad \forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\,. \tag{1.5.3}$$

(22) 1755-1836
(23) 1885-1967
(24) 1907–1933
(25) 1894–1964
(26) Une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact si et seulement si il existe N et R tels que

$$|f(z)| \le C\langle z\rangle^N \exp(R|\operatorname{Im} z|)\,.$$

Le support de la distribution sera alors dans $[-R, R]$.

On a

$$\mathscr{F}\delta_0 = 1 \quad \text{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d), \tag{1.5.4}$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$\mathscr{F}\delta_a(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

En outre

$$\big(\mathscr{F}\partial^\alpha \delta_0\big)(\xi) = (i\xi)^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

et plus généralement pour tout $a \in \mathbb{R}^d$

$$\big(\mathscr{F}\partial^\alpha \delta_a\big)(\xi) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot a}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On note pour toutes fonctions φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx.$$

On rappelle qu'il s'agit d'un produit scalaire qui fait de $L^2(\mathbb{R}^d)$ un espace de Hilbert[27].

Théorème 1.5.6. — *La transformation de Fourier définie dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\overline{\mathscr{F}}$. En outre on a la formule de Parseval-Plancherel*

$$(\varphi|\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\mathscr{F}\varphi|\mathscr{F}\psi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour tous φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.5.7 **(Principe d'incertitude).** — *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que xf et ∇f sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$*

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\|(x-x_0)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|(\xi-\xi_0)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. — On suppose sans perte de généralité que $x_0 = \xi_0 = 0$, et on écrit

$$\int f(x)\,x\cdot\nabla f(x)\,dx = -\frac{d}{2}\int f^2(x)\,dx.$$

On conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

1.6. Séries de Fourier

On note L^2_T l'espace des fonctions T-périodiques dont la restriction à $[0,T]$ est de carré sommable, et l'on définit le produit scalaire sur L^2_T

$$(f|g) := \int_0^T f(t)\overline{g}(t)\,\frac{dt}{T}\cdot$$

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n(t) := e^{-in\omega t}, \quad \omega := \frac{2\pi}{T}\cdot$$

[27] 1862-1943

Théorème 1.6.1. — *Les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de L^2_T, et toute fonction $f \in L^2_T$ peut se décomposer de manière unique en*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n\,, \quad c_n(f) := \int_0^T e_n(t) f(t)\,\frac{dt}{T}$$

dans L^2_T. On a la formule de Parseval

$$\int_0^T |f(t)|^2\,\frac{dt}{T} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|c_n(f)\right|^2.$$

On notera souvent $\hat{f}(n) := c_n(f)$. Notons que ce résultat ne dit rien de la convergence ponctuelle de la série de Fourier. On peut montrer (mais c'est un résultat difficile, dû à Carleson[28] en 1965) que les sommes partielles symétriques de la série de Fourier d'une fonction f de L^2_T convergent presque partout vers f.

Remarquons enfin que l'on peut étendre les séries de Fourier au cas multidimensionnel, pour des fonctions périodiques relativement un réseau (qui parfois n'a aucune relation avec la structure euclidienne, auquel cas il faut introduire la notion de "réseau réciproque" dans l'espace des variables de Fourier).

1.7. Espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe nous définissons les espaces de Sobolev[29], qui seront utilisés très fréquemment dans ce cours, et en donnons les propriétés principales.

1.7.1. Définitions. —

1.7.1.1. Le cas de l'espace entier. —

Définition 1.7.1 **(Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$).** — *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que*

$$\mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi)\,.$$

On pose alors

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} |\mathscr{F} f(\xi)|^2\, d\xi\,.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que $\mathscr{F} f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d; |\xi|^{2s}\, d\xi)\,.$$

On pose

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\mathscr{F} f(\xi)|^2\, d\xi < +\infty.$$

Proposition 1.7.2. — *L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\big(f \,|\, g\big)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} \mathscr{F} f(\xi) \overline{\mathscr{F} g(\xi)}\, d\xi\,.$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\big(f \,|\, g\big)_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \mathscr{F} f(\xi) \overline{\mathscr{F} g(\xi)}\, d\xi$$

[28] 1928-

[29] 1908-1989

si et seulement si $s < d/2$.

Démonstration. — Le cas des espaces inhomogènes $H^s(\mathbb{R}^d)$ se traite en remarquant que la transformée de Fourier est un isomorphisme isométrique entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d;\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi)$.

Dans le cas des espaces homogènes commençons par supposer que $s < d/2$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$ donc il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$ telle que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$. Montrons que φ est une distribution tempérée, que $f := \mathscr{F}^{-1}\varphi$ appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Puisque $s < d/2$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz[30]

$$\int_{B(0,1)} |\varphi(\xi)|\,d\xi \le \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{B(0,1)} |\xi|^{-2s}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On en déduit que $\mathbf{1}_{B(0,1)}\varphi$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, et plus généralement φ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathbf{1}_{^cB(0,1)}\varphi$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d;\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi)$ on obtient que φ est une distribution tempérée. On peut définir $f := \mathscr{F}^{-1}\varphi$, qui appartient à $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ par définition de φ, et on a bien que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ puisque $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $L^2(\mathbb{R}^d;|\xi|^{2s}\,d\xi)$. Donc $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est complet si $s < d/2$.

Dans le cas où $s \ge d/2$ on considère la fonction sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$

$$\phi : f \longmapsto \|\widehat{f}\|_{L^1(B(0,1))} + \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

On constate facilement que ϕ est une norme sur $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach pour cette norme. En considérant l'application identité

$$(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d),\phi) \longrightarrow \Big(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\Big)$$

qui est linéaire, continue et surjective on constate que si l'espace $\big(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\big)$ était un Banach, alors par le théorème de l'application ouverte[31] il existerait une constante C telle que

$$\forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \phi(f) \le C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui impliquerait que

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d), \quad \|\widehat{f}\|_{L^1(B(0,1))} \le C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Nous allons montrer que cette inégalité est fausse grâce à l'exemple suivant: soit $\mathscr{C}$ une couronne de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0, incluse dans la boule unité $B(0,1)$, telle que $\mathscr{C} \cap 2\mathscr{C} = \emptyset$ et soit la suite

$$f_n := \mathscr{F}^{-1}\Big(\sum_{q=1}^{n} \frac{2^{q(s+\frac{d}{2})}}{q}\mathbf{1}_{2^{-q}\mathscr{C}}\Big).$$

Alors l'hypothèse $\mathscr{C} \cap 2\mathscr{C} = \emptyset$ permet d'écrire que

$$\begin{aligned}\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))} &= \sum_{q=1}^{n} \frac{2^{q(s+\frac{d}{2})}}{q}|2^{-q}\mathscr{C}| \\ &= C_1 \sum_{q=1}^{n} \frac{2^{q(s-\frac{d}{2})}}{q}, \quad C_1 := |\mathscr{C}|\end{aligned}$$

[30] 1843-1921

[31] Si $L : E \to F$ est linéaire, continue, surjective entre deux espaces de Banach E et F alors L est ouverte, c'est-à-dire que l'image par L de tout ouvert de E est un ouvert de F, ou encore il existe $C > 0$ telle que $B_F(0,1) \subset L(B_E(0,C))$.

et

$$\|f_n\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \sum_{q=1}^{n} \frac{2^{q(2s+d)}}{q^2} \int_{2^{-q}\mathscr{C}} |\xi|^{2s}\, d\xi$$
$$\leq C_s \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q^2} \leq C', \quad C_s := \int_{\mathscr{C}} |\eta|^{2s}\, d\eta,$$

et comme $s \geq d/2$ on en déduit que $\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))}$ tend vers l'infini avec n alors que $\|f_n\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est bornée. La proposition suit. □

Proposition 1.7.3. — *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Soit $s < d/2$. L'espace $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dont la transformée de Fourier est identiquement nulle près de l'origine est un sous-espace dense de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. — Nous n'allons démontrer que le second résultat (le premier se démontre de manière identique).

Comme $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que si $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d), \quad \int \mathscr{F}f(\xi)\overline{\mathscr{F}\varphi}(\xi)|\xi|^{2s}\, d\xi = 0, \tag{1.7.1}$$

alors $f \equiv 0$. Mais si f vérifie (1.7.1), alors $\mathscr{F}f$ est une fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ qui s'annule sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On a donc $\mathscr{F}f \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$. Le résultat suit. □

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 1.7.4. — *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'application linéaire*

$$f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d) \longmapsto L_f \in \left(H^s(\mathbb{R}^d)\right)^*,$$

où L_f est la forme (anti)-linéaire définie par

$$L_f(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}f(\xi)\overline{\mathscr{F}\varphi(\xi)}\, d\xi,$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\left(H^s(\mathbb{R}^d)\right)^*$ de $H^s(\mathbb{R}^d)$. De même si $|s| < d/2$, l'application linéaire

$$f \in \dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d) \longmapsto L_f \in \left(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\right)^*$$

est un isomorphisme linéaire isométrique entre l'espace $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ et le dual topologique $\left(\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\right)^*$ de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$.

1.7.1.2. Le cas périodique. — On note $\mathbb{T}^d - (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ le tore unitaire d-dimensionnel. Une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}^d$ est identifiée à une fonction définie sur $\mathbb{T}^d$. Les espaces de Sobolev associés sont alors définis par les normes suivantes (en rappelant les notations du Paragraphe 1.6)

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s} |c_n(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^d)} := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |n|^{2s} |c_n(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Si f est de moyenne nulle alors ces deux normes sont égales puisque $c_0(f) = 0$.

1.7.1.3. Le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$. —

***Définition 1.7.5* (Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k un entier, et p un réel dans $[1,\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) \,/\, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \le k \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

On montre facilement que $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, réflexif si $1 < p < \infty$ et séparable si $1 \le p < \infty$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire

$$(f|g)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le k} (\partial^\alpha f|\partial^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

On admettra le résultat suivant.

Théorème 1.7.6. — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe $\mathscr{C}^m$ avec $m \ge 1$ un entier*[32]*. Soit $1 \le p < \infty$. Alors l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

L'espace suivant est particulièrement utile.

Définition 1.7.7. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$. L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H^1_0(\Omega)$ au sens où*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\varphi\in H^1_0(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\le 1} \langle f, \varphi\rangle.$$

1.7.2. Injections. —

***Théorème 1.7.8* (Injections de Sobolev - le cas $\mathscr{C}^k$).** — *Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Pour tout réel $s > \frac{d}{2} + k$ on a l'injection continue*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d).$$

Plus précisément toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ est égale presque partout à une fonction de $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$. En particulier il existe une constante C ne dépendant que de d, k et s telle que pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \le C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. — Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le k$. Comme $s > \frac{d}{2} + k$, la fonction

$$\xi \longmapsto \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle\xi\rangle^s}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$(i\xi)^\alpha \mathscr{F} f = \frac{(i\xi)^\alpha}{\langle\xi\rangle^s} \langle\xi\rangle^s \mathscr{F} f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On peut donc appliquer la Proposition 1.5.3 pour en déduire que la distribution tempérée $\partial^\alpha f$ s'identifie à une fonction continue et

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mathscr{F}(\partial^\alpha f)(\xi)\, d\xi$$

[32] i.e. le bord de Ω est localement le graphe d'une fonction de classe $\mathscr{C}^m$ au voisinage de chacun des points du bord

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)| \le C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$C := \frac{1}{(2\pi)^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2(k-s)}\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème est démontré. □

***Théorème 1.7.9* (Injections de Sobolev - le cas L^p).** — *Si $s \in]0, d/2[$ alors les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ sont continûment inclus dans $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$. En particulier toute fonction de $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'identifie à une fonction de $L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C>0$ telle que pour toute fonction $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. — Tout d'abord notons que si $s>0$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ donc il suffit de montrer le résultat pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. On remarque ensuite qu'un argument d'échelle permet de trouver l'exposant $p = 2d/(d-2s)$. Soit en effet f une fonction de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et posons f_ℓ la fonction $f_\ell(x) := f(\ell x)$ (avec $\ell>0$). Pour tout $p \in [1,\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
\|f_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \ell^{-\frac{d}{p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{et}\\
\|f_\ell\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}f_\ell(\xi)|^2\, d\xi\\
&= \ell^{-2d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\mathscr{F}f(\ell^{-1}\xi)|^2\, d\xi\\
&= \ell^{-d+2s}\|f\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Si l'inégalité $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$ est vraie pour toute fonction régulière f, elle est vraie aussi pour f_ℓ pour tout $\ell>0$. Cela conduit à la relation $p = 2d/(d-2s)$.

Démontrons à présent le théorème. On pose $p := 2d/(d-2s)$, montrons qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.7.2}$$

Le résultat suivra par densité : c'est un procédé très classique, on détaille ici l'argument et on y fera appel souvent dans ce cours. Supposons donc (1.7.2) démontré et soit $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Alors par la Proposition 1.7.3 il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, et (1.7.2) appliquée à $f_n - f_m$ implique que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Elle converge donc vers une limite $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, qui par unicité de la limite coïncide avec f. La fonction f appartient donc à $L^p(\mathbb{R}^d)$, et en passant à la limite dans l'inégalité (1.7.2) sur f_n on obtient également l'inégalité souhaitée sur f.

Pour simplifier les calculs on suppose sans perte de généralité que $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Commençons par observer que pour tout $p \in [1,+\infty[$, grâce au théorème de Fubini on a pour toute fonction mesurable f,

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx\\
&= p\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{|f(x)|} \Lambda^{p-1}\, d\Lambda\, dx\\
&= p\int_0^\infty \Lambda^{p-1}\mu\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d \,/\, |f(x)|>\Lambda\Big\}\Big)\, d\Lambda,
\end{aligned}$$

où μ est la mesure de Lebesgue. Nous allons décomposer f en basses et hautes fréquences (pour chaque Λ) en écrivant $f = f_\flat + f_\sharp$, avec

$$f_\flat := \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\mathscr{F}f) \quad \text{et} \quad f_\sharp := \mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{^cB(0,A)}\mathscr{F}f)\,, \tag{1.7.3}$$

où la constante $A > 0$ dépend de Λ et sera déterminée plus tard. Comme le support de la transfomée de Fourier de $f_\flat$ est compact, la fonction $f_\flat$ est bornée. On a plus précisément en appliquant la transfomée de Fourier inverse et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|f_\flat\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq (2\pi)^{-d}\|\mathscr{F}f_\flat\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq (2\pi)^{-d}\int_{B(0,A)} |\xi|^{-s}|\xi|^s|\mathscr{F}f(\xi)|\,d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-d}\Big(\int_{B(0,A)}\frac{d\xi}{|\xi|^{2s}}\Big)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\|f_\flat\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_s A^{\frac{d}{2}-s}. \tag{1.7.4}$$

Par l'inégalité triangulaire on a

$$\Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f(x)|>\Lambda\Big\} \subset \Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,2|f_\flat(x)|>\Lambda\Big\} \cup \Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,2|f_\sharp(x)|>\Lambda\Big\}\,.$$

Grâcee à (1.7.4) on a

$$A = A_\Lambda := \left(\frac{\Lambda}{4C_s}\right)^{\frac{p}{d}} \Longrightarrow \mu\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f_\flat(x)|>\Lambda/2\Big\}\Big) = 0\,.$$

On en déduit avec ce choix de $A = A_\Lambda$ que

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq p\int_0^\infty \Lambda^{p-1}\mu\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\Big\}\Big)\,d\Lambda\,.$$

Il est bien connu (c'est l'inégalité de Bienaimé[33]–Tchebychev[34]) que

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\Big\}\Big) &= \int_{\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\}} dx \\
&\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^d\,/\,|f_\sharp(x)|>\Lambda/2\}} \frac{4|f_\sharp(x)|^2}{\Lambda^2}\,dx \\
&\leq \frac{4}{\Lambda^2}\|f_\sharp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 4p\int_0^\infty \Lambda^{p-3}\|f_\sharp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,d\Lambda,$$

et donc

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 4p(2\pi)^{-d}\int_0^\infty \Lambda^{p-3}\int_{|\xi|\geq A_\Lambda}|\mathscr{F}f(\xi)|^2\,d\xi d\Lambda\,. \tag{1.7.5}$$

Par définition de A_Λ on a

$$|\xi| \geq A_\Lambda \Longleftrightarrow \Lambda \leq 4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}\,.$$

[33] 1796-1878
[34] 1821-1894

Alors le théorème de Fubini implique que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq 4p(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^{4C_s|\xi|^{\frac{d}{p}}}\Lambda^{p-3}d\Lambda\right)|\mathscr{F}f(\xi)|^2d\xi\\ &\leq \frac{4p}{p-2}(2\pi)^{-d}(4C_s)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\mathscr{F}f(\xi)|^2d\xi\,.\end{aligned}$$

Comme $2s=\dfrac{d(p-2)}{p}$ le théorème est démontré, par densité de $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$. □

Démontrons l'inégalité de Poincaré[35], reliant la norme L^2 à la norme $\dot{H}^1$ dans un domaine borné.

***Proposition 1.7.10* (Inégalité de Poincaré).** — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f de $H_0^1(\Omega)$ on ait*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Démonstration. — Soit $f\in\mathscr{D}(\Omega)$. On écrit tout élément $x\in\Omega$ sous la forme $x=(x',x_d)$ avec $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ et l'on a

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x_d}\partial_{y_d}f(x',y_d)\,dy_d$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient (parce que Ω est borné)

$$|f(x)|^2\leq C\int|\nabla f(x',y_d)|^2\,dy_d$$

et le résultat suit par intégation, et par densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ comme dans la démonstration du Théorème 1.7.9. □

Dans $H_0^1(\Omega)$, les normes $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ sont donc équivalentes. Le théorème de prolongement suivant est admis.

***Théorème 1.7.11*.** — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe $\mathscr{C}^m$ avec $m\geq 1$ un entier. Alors il existe un opérateur linéaire P de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ pour tout p dans $[1,\infty]$, tel que si $f\in W^{m,p}(\Omega)$ alors*

1. $(Pf)_{|\Omega}=f$,
2. $\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$,
3. $\|Pf\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}\leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Ce théorème permet d'étendre les théorèmes d'injection de Sobolev au cas des ouverts bornés, dans le cas d'indices entiers, en notant que si $s=d(1/2-1/p)$ alors pour tout $f\in H^s(\Omega)$ avec Ω ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$, on a

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p(\Omega)}&=\|Pf\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leq\|Pf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq C\|Pf\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq C'\|f\|_{H^s(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

***Remarque 1.7.12*.** — *On peut aussi définir de tels opérateurs pour des domaines qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^m$, par exemple un carré en dimension deux, par réflexions successives.*

[35] 1854-1912

Les inégalités de Gagliardo[36]–Nirenberg[37] seront également utilisées dans la suite, et sont à comparer aux injections de Sobolev d'indice non entier (entre 0 et 1).

***Proposition 1.7.13* (Inégalités de Gagliardo–Nirenberg).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $p \in [2,\infty[$ tel que $1/p > 1/2 - 1/d$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction f dans $H^1_0(\Omega)$,*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\Omega)}\|\nabla f\|^{\sigma}_{L^2(\Omega)} \quad \textit{avec} \quad \sigma = \frac{d(p-2)}{2p}\cdot \tag{1.7.6}$$

Démonstration. — Par densité on peut supposer que f appartient à $\mathscr{D}(\Omega)$. Alors les injections de Sobolev (Théorème 1.7.9) impliquent que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{\dot{H}^{\frac{d(p-2)}{2p}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Par convexité des normes de Sobolev

$$\|f\|_{\dot{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\sigma}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|f\|^{\sigma}_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in [0,1],$$

on obtient le résultat. □

***Remarque 1.7.14*.** — *En dimension deux, il est faux que $H^1_0(\Omega)$ s'injecte dans l'espace des fonctions L^∞. Par exemple si $\Omega = B(0,1)$, on peut montrer que la fonction*

$$f(x) := \big(\log\frac{1}{|x|}\big)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1/2$$

est dans $H^1_0(\Omega)$. En revanche on a toujours l'inégalité de Trudinger[38]

$$\int_\Omega e^{|f(x)|^2}\,dx < \infty \quad si \quad f \in H^1(\Omega).$$

Le théorème de Rellich[39] suivant sera très important dans ce cours.

***Théorème 1.7.15* (théorème de Rellich).** — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord de classe $\mathscr{C}^1$. Toute partie bornée de $H^1(\Omega)$ est d'adhérence compacte dans $L^2(\Omega)$.*

***Remarque 1.7.16*.** — *Plus généralement on peut montrer que*

— si $p < d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte[40] *pour tout $q \in [1, p^*[$ avec $1/d = 1/p - 1/p^*$,*

— si $p = d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [1,\infty[$,

— si $p > d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ est compacte.

Démonstration. — On ne va écrire la démonstration que dans le cas $d > 2$, le cas de la dimension 2 s'obtient de manière similaire[41].

Soit $\mathscr{A}$ une partie bornée de $H^1(\Omega)$ et soit $\alpha > 0$, montrons qu'il existe un nombre fini de boules de rayon α dans $L^2(\Omega)$ qui recouvrent $\mathscr{A}$. On aimerait appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli pour montrer que $\mathscr{A}$ est relativement compacte dans $C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ et donc dans $L^2(\Omega)$. Cela n'est pas possible directement puisque les

[36] 1930-2008
[37] 1925-2020
[38] 1942-
[39] 1906-1955
[40] Un opérateur $T \in \mathscr{L}(E;F)$ est compact si $\overline{T\big(B_E(0,1)\big)}$ est une partie compacte de F.
[41] en montrant d'abord la compacité dans $L^q(\Omega)$ avec $q < 2$ et en concluant par interpolation.

fonctions de $\mathscr{A}$ ne sont pas suffisamment régulières, nous allons donc d'abord les approcher par convolution. Comme la convolution ne préserve pas le support, nous commençons par éliminer les fonctions de $\mathscr{A}$ supportées dans un voisinage du bord de Ω (suffisamment petit pour que cette contribution soit négligeable, de taille $\alpha/3$). Ensuite nous montrons que l'on peut remplacer les fonctions de $\mathscr{A}$ par leur régularisées (quitte à faire une autre erreur de taille $\alpha/3$), et enfin un argument de compacité permet de conclure pour les régularisées.

Commençons donc par choisir un ouvert ω relativement compact dans Ω tel que

$$\sup_{f\in\mathscr{A}} \|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} \leq \frac{\alpha}{3}\cdot \tag{1.7.7}$$

Ceci est possible grâce à l'inégalité de Hölder puis une injection de Sobolev, qui impliquent que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} &\leq C\big|\Omega\setminus\omega\big|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}} \|f\|_{L^{2^*}(\Omega)}\\ &\leq C|\Omega\setminus\omega|^{\frac{1}{d}} \|f\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

avec $1 = d(1/2 - 1/2^*)$.

Soit maintenant $y\in\mathbb{R}^d$ tel que $|y| < d(\omega,\partial\Omega)$. On rappelle la notation

$$\tau_y g(x) := g(x+y)\,.$$

Pour tout $g\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ on a[42]

$$\begin{aligned}\|\tau_y g - g\|_{L^1(\omega)} &\leq |y| \int_\omega \int_0^1 |\nabla g(x-ty)|\, dt dx\\ &\leq |y|\sqrt{|\Omega|}\, \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\|\tau_y g - g\|_{L^2(\omega)} &\leq \|\tau_y g - g\|^{\theta}_{L^1(\omega)} \|\tau_y g - g\|^{1-\theta}_{L^{2^*}(\omega)}\\ &\leq C|y|^{\theta} |\Omega|^{\frac{\theta}{2}} \|g\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{2} = \theta + \frac{1-\theta}{2^*}\cdot$$

Par densité de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^1(\Omega)$ on obtient qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\sup_{f\in\mathscr{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq C|y|^{\theta}\,.$$

On en déduit qu'il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon < d(\omega,\partial\Omega)$ et tel que

$$\forall\, y\in\mathbb{R}^d\,,\quad |y|\leq\varepsilon\,,\quad \sup_{f\in\mathscr{A}} \|\tau_y f - f\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{\alpha}{3}\cdot \tag{1.7.8}$$

Soit maintenant χ_ε une suite régularisante. Soit

$$\mathscr{A}_{\varepsilon,\omega} := \Big\{ (\chi_\varepsilon \star f)_{|\overline{\omega}}\,,\ f\in\mathscr{A}\Big\}\,.$$

Pour $f\in\mathscr{A}$ et $x\in\overline{\omega}$ on a

$$\big|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\big| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\tau_{-y} f(x) - f(x)|\, \chi_\varepsilon(y) dy$$

donc par l'inégalité de Jensen[43]

$$\big|\chi_\varepsilon \star f(x) - f(x)\big|^2 \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\tau_{-y} f(x) - f(x)|^2\, \chi_\varepsilon(y) dy$$

[42] appliquer Taylor avec reste intégral à $t\mapsto g(x+ty)$

[43] 1859-1925

et donc par (1.7.8) et le théorème de Fubini

$$\sup_{f\in\mathscr{A}} \big\| \chi_\varepsilon \star f - f \big\|_{L^2(\omega)} \le \sup_{f\in\mathscr{A}} \sup_{|y|\le\varepsilon} \|\tau_{-y} f - f\|_{L^2(\omega)} \le \frac{\alpha}{3}\cdot \tag{1.7.9}$$

Enfin pour $f \in \mathscr{A}$ on a par l'inégalité de Young

$$\|\chi_\varepsilon \star f\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \le \|\chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et de même

$$\|\nabla(\chi_\varepsilon \star f)\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \le \|\nabla\chi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

donc $\mathscr{A}_{\varepsilon,\omega}$ est uniformément bornée et équicontinue, donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli elle est relativement compacte dans $C(\overline{\omega};\mathbb{R})$ et donc dans $L^2(\omega)$. Il existe donc un entier N et des fonctions $g_1,\dots,g_N$ de $L^2(\omega)$, que l'on prolonge par 0 à Ω, telles que

$$\mathscr{A}_{\varepsilon,\omega} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \frac{\alpha}{3}). \tag{1.7.10}$$

Nous pouvons maintenant rassembler tous ces résultats. Soit $f \in H^1(\Omega)$ et soit $i \in [1,N]$ tel que

$$\|g_i - \chi_\varepsilon \star f\|_{L^2(\omega)} \le \frac{\alpha}{3}\cdot$$

Alors on écrit

$$\|f - g_i\|^2_{L^2(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega\setminus\omega)} + \|f - g_i\|^2_{L^2(\omega)}$$

donc

$$\begin{aligned}\|f - g_i\|_{L^2(\Omega)} &\le \|f\|_{L^2(\Omega\setminus\omega)} + \|f - g_i\|_{L^2(\omega)}\\ &\le \frac{\alpha}{3} + \|f - g_i\|_{L^2(\omega)}\end{aligned}$$

par (1.7.7). Mais

$$\begin{aligned}\|f - g_i\|_{L^2(\omega)} &\le \|g_i - \chi_\varepsilon \star f\|_{L^2(\omega)} + \|f - \chi_\varepsilon \star f\|_{L^2(\omega)}\\ &\le \frac{2\alpha}{3}\end{aligned}$$

par (1.7.9) et (1.7.10). On en déduit que

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{L^2}(g_i, \alpha).$$

Le théorème est démontré. □

Remarque 1.7.17. — *Le résultat est faux si Ω n'est pas borné. Par exemple si $\mathbf{1} := (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d$ on considère $\phi \in \mathscr{D}\big(B(0,1)\big)$ et*

$$\phi_n(x) := \phi\big(x - n\mathbf{1}\big).$$

Cette suite est clairement bornée dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, mais si $n \neq m$ alors

$$\|\phi_n - \phi_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\phi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

donc (ϕ_n) n'est pas de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

1.8. Résultats d'approximation

1.8.1. Approximation par régularisation. — On énonce ici plusieurs résultats utiles d'approximation de fonctions.

Théorème 1.8.1. — *Soit f une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$ et soit $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ une suite régularisante. Alors $\zeta_\varepsilon \star f$ appartient à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\zeta_\varepsilon \star f \to f\,, \quad \varepsilon \to 0\,,$$

uniformément sur $\mathbb{R}^d$. De même si $1 \le p < \infty$ et si $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors $\zeta_\varepsilon \star g$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\zeta_\varepsilon \star g \to g\,, \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{1.8.1}$$

dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. — Soit f une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le fait que $\zeta_\varepsilon \star f$ appartienne à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est une conséquence immédiate des règles de dérivation du produit de convolution. La convergence s'obtient en constatant que

$$\begin{aligned}\zeta_\varepsilon \star f(x) - f(x) &= \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} \zeta\big(\frac{y}{\varepsilon}\big) f(x-y)\,dy - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y) f(x-\varepsilon y)dy - f(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y)(f(x-\varepsilon y) - f(x))dy\end{aligned}$$

et le résultat suit de la continuité (uniforme sur le support de ζ) de f.

Si $1 \le p \le \infty$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors de même $\zeta_\varepsilon \star g$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ (puisque $\zeta_\varepsilon \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, ainsi que toutes ses dérivées). Supposons maintenant que $1 \le p < \infty$ et montrons (1.8.1). Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ on peut se ramener au cas où g est continue à support compact puisque si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned}\|\zeta_\varepsilon \star g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\le \|\zeta_\varepsilon \star f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\zeta_\varepsilon \star (f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\\ &\le \|\zeta_\varepsilon \star f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + 2\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Enfin

$$\big\|\zeta_\varepsilon \star f - f\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \big\|\zeta_\varepsilon \star f - f\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} |B(0;1+\varepsilon)|^{\frac{1}{p}}$$

puisque le support de ζ est inclus dans $B(0,1)$. Le résultat suit par le calcul précédent. □

Remarque 1.8.2. — *Il est clair par la démonstration qu'il n'est en fait pas nécessaire que la suite régularisante soit à support compact pour que le résultat d'approximation dans L^p soit vrai.*

1.8.2. Approximation par différences finies. —

***Proposition 1.8.3* (Un résultat d'approximation dans L^p).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit Ω' relativement compact dans Ω. On pose $\delta := \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Soit f une fonction dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On pose pour tout $h \neq 0$*

$$D^h_k f := \frac{1}{h}\big(\tau_{he_k} f - f\big) \quad \text{et} \quad D^h f := (D^h_1 f, \dots, D^h_d f)\,,$$

où l'on rappelle la notation $\tau_{he_k} f := f(\cdot + he_k)$.

1. *(Commutativité avec les dérivées au sens des distributions) Si $f, \partial_i f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\partial_i D^h_k f = D^h_k \partial_i f\,.$$

2. *(Intégration par parties) Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ *avec* $1 \le p \le \infty$, *alors*
$$\int (D_k^h f) g \, dx = -\int f (D_k^{-h} g) \, dx .$$
3. *(Leibniz*[44]*) Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ *avec* $1 \le p \le \infty$, *alors*
$$D_k^h(fg) = (D_k^h f) g + (\tau_{he_k} f)(D_k^h g) = f(D_k^h g) + (D_k^h f)(\tau_{he_k} g) .$$
4. *Si* $f \in W^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 \le p \le \infty$, *alors pour tout* $h \in]-\delta/2, \delta/2[$ *non nul*
$$\|D_h f\|_{L^p(\Omega')} \le \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} .$$
5. *Si* $f \in L^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$, *et s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $h \in]-\delta/2, \delta/2[$ *non nul on ait*
$$\|D^h f\|_{L^p(\Omega')} \le C$$
alors $f \in W^{1,p}(\Omega')$ *et*
$$\|\nabla f\|_{L^p(\Omega')} \le C .$$

Démonstration. — On ne va démontrer que les deux derniers points, les autres étant plus faciles et laissés en exercice.

4. Par densité on peut supposer que f est régulière. On a
$$f(x + he_k) - f(x) = h \int_0^1 \partial_{x_k} f(x + the_k) \, dt$$
et l'inégalité de Jensen fournit
$$\left| f(x + he_k) - f(x) \right|^p \le |h|^p \int_0^1 |\partial_{x_k} f(x + the_k)|^p \, dt .$$
On conclut par intégration et le théorème de Fubini.

5. Par le Théorème 1.3.3 de Banach-Alaoglu, quitte à extraire une sous-suite il existe une fonction $f_i \in L^p(\Omega')$ telle que $D_i^h f$ converge faiblement vers f_i dans $L^p(\Omega')$ quand h tend vers 0. Mais pour toute fonction test φ on a pour h suffisamment petit
$$\int_{\Omega'} f D_i^{-h} \varphi = -\int_{\Omega'} D_i^h f \varphi .$$
Comme $D_i^{-h}\varphi$ converge uniformément vers $\partial_i \varphi$ on a
$$\int_{\Omega'} f \partial_i \varphi = -\int_{\Omega'} f_i \varphi$$
donc $\partial_i f = f_i$, d'où le résultat. □

1.9. Intégrale de Bochner

On sera amené à utiliser souvent des espaces du type $L^p(I;E)$ où I est un intervalle ouvert et E un espace de Banach, typiquement $L^q(\Omega)$ ou $H^s(\Omega)$. On ne va pas rentrer dans la construction précise de ces espaces, et renvoyons par exemple à Yosida, *Functional Analysis* ou Droniou *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles* pour plus de détails.

[44] 1646-1716

Si E est un espace de Banach et I est un intervalle ouvert, on dit que $u : I \to E$ est (Bochner[45]-) intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples[46] sur I telles que pour presque tout $t \in I$

$$\|u_n(t) - u(t)\|_E \to 0, \quad n \to \infty$$

et

$$\int_I \|u_n(t) - u(t)\|_E \, dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Alors l'intégrale (de Bochner) de u est définie par

$$\int_I u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\, dt.$$

On peut montrer que cette limite existe, qu'elle ne dépend pas de la suite (u_n), et que l'on a

$$\left\| \int_I u(t)\, dt \right\|_E dt \le \int_I \|u(t)\|_E \, dt.$$

On a aussi, pour tout $f \in E^\star$,

$$\left\langle f, \int_I u(t)\, dt \right\rangle = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle \, dt.$$

L'espace $L^p(I;E)$ est alors, pour tout $1 \le p \le \infty$, l'espace de Banach de toutes les fonctions (Bochner-) intégrables $u : I \to E$ telles que

$$\|u\|_{L^p(I;E)} := \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_E^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \le p < \infty \\ \sup\limits_{t\in I} \|u(t)\|_E & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

Notons que $L^{p'}(I;E^\star)$ est le dual topologique de $L^p(I;E)$ si $1 \le p < \infty$ (en notant p' l'exposant conjugué de p, défini par $1/p + 1/p' = 1$), et si E^* est séparable ou si E est réflexif.

Attention : il est vrai que $L^p(I;L^p(I)) = L^p(I \times I)$ si $1 \le p < \infty$, mais on peut construire des contrexemples dans le cas $p = \infty$[47].

1.10. Régularité et compacité

Dans cette dernière section on démontre deux résultats très utiles pour la résolution d'EDP d'évolution. Le premier est dû à Lions[48] et Magenes[49].

Lemme 1.10.1. — *Soient trois espaces de Hilbert séparables $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$ telles que ces injections sont continues, et tels que*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \langle f, v\rangle = (f|v)_{\mathcal{H}}.$$

Soit $u \in L^2([0,T];\mathcal{V})$ telle que $\partial_t u \in L^2([0,T];\mathcal{V}')$. Alors $u \in \mathscr{C}^0([0,T];\mathcal{H})$ et de plus

1. *pour tout $v \in \mathcal{V}$, on a au sens des distributions sur $[0,T]$*

$$\frac{d}{dt}(u(t)|v)_{\mathcal{H}} = \langle \partial_t u, v\rangle;$$

[45] 1899-1982

[46] Une fonction est dite simple si elle est mesurable, s'annule en dehors d'un ensemble de mesure finie et prend un nombre fini de valeurs.

[47] voir Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles* pages 28-29

[48] 1928-2001

[49] 1923-2010

2. *il existe une constante* $C>0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];\mathscr{H})} \le C\big(\|u\|_{L^2([0,T];\mathscr{V})} + \|\partial_t u\|_{L^2([0,T];\mathscr{V}')}\big).$$

Démonstration. — On commence par étendre à $\mathbb{R}$ et régulariser la fonction $t \mapsto u(t)$. Pour l'étendre, on peut par exemple considérer deux fonctions φ et ψ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ postives, telles que $\varphi+\psi=1$, et supportées respectivement dans $]-T/4,3T/4[$ et $[T/4,5T/4[$. On pose alors $\tilde{u} := v+w$ où

$$v(t) := \varphi(t)u(t) \text{ si } t\in[0,T], \quad v(t) := \varphi(-t)u(-t) \text{ si } -t\in]0,T] \text{ et } v(t):=0 \quad \text{si} \quad |t|>T$$

et

$$w(t) := \psi(t)u(t) \text{ si } t\in[0,T], \quad w(t) := \psi(2T-t)u(2T-t) \text{ si } t\in]T,2T] \text{ et } w(t):=0 \text{ si } |t-T|>T.$$

Enfin on régularise en temps, par convolution par une approximation de l'identité $\zeta_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\zeta(\cdot/\varepsilon)$ avec $\zeta\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ positive d'intégrale 1: la fonction $u_\varepsilon := \zeta_\varepsilon \star \tilde{u}$ est dans $\mathscr{D}(\mathbb{R};\mathscr{V})$ et converge vers u dans $L^2([0,T];\mathscr{V})$. On a également que $\partial_t u_\varepsilon$ converge vers $\partial_t u$ dans $L^2([0,T];\mathscr{V}')$ et enfin $u_\varepsilon(t)$ converge vers $u(t)$ dans $\mathscr{V}$ pour presque tout t dans $[0,T]$. Enfin il existe une constante $C>1$ telle qu'uniformément en ε

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R};\mathscr{V})} \le C\|u\|_{L^2([0,T];\mathscr{V})} \le C\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R};\mathscr{V})}. \tag{1.10.1}$$

On a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\big\|u_\varepsilon(t)\big\|^2_{\mathscr{H}} = \int_{-\infty}^t \frac{d}{ds}\big(u_\varepsilon(s),u_\varepsilon(s)\big)_{\mathscr{H}}\,ds = 2\int_{-\infty}^t \big(\partial_s u_\varepsilon(s),u_\varepsilon(s)\big)_{\mathscr{H}}\,ds \tag{1.10.2}$$

et ainsi pour tout ε,η

$$\begin{aligned}\big\|u_\varepsilon(t)-u_\eta(t)\big\|^2_{\mathscr{H}} &\le 2\int_{-\infty}^t \big\|\partial_s u_\varepsilon(s)-\partial_s u_\eta(s)\big\|_{\mathscr{V}'}\big\|u_\varepsilon(s)-u_\eta(s)\big\|_{\mathscr{V}}\,ds\\ &\le 2\big\|\partial_t u_\varepsilon-\partial_t u_\eta\big\|_{L^2(\mathbb{R};\mathscr{V}')}\big\|u_\varepsilon-u_\eta\big\|_{L^2(\mathbb{R};\mathscr{V})}.\end{aligned}$$

Les suites u_ε et $\partial_t u_\varepsilon$ sont de Cauchy respectivement dans $L^2(\mathbb{R};\mathscr{V})$ et dans $L^2(\mathbb{R};\mathscr{V}')$, donc u_ε est de Cauchy dans $C_c(\mathbb{R};\mathscr{H})$ et converge donc uniformément sur $[0,T]$ vers une limite $v\in C([0,T];\mathscr{H})$. Comme u_ε converge presque partout vers u on peut donc identifier u et v hors d'un ensemble de mesure nulle et donc ainsi redéfinie la fonction u est dans $C([0,T];\mathscr{H})$. De plus par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (1.10.2) comme ci-dessus, associée à (1.10.1), on a

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];\mathscr{H})} \le C\big(\|u\|_{L^2([0,T];\mathscr{V})} + \|\partial_t u\|_{L^2([0,T];\mathscr{V}')}\big)$$

Enfin si $\Phi\in\mathscr{D}(]0,T[;\mathbb{R})$ et $v\in\mathscr{V}$ alors $\Phi v\in\mathscr{D}(]0,T[;\mathscr{V})$ et l'on a

$$\int_0^T \big\langle \partial_t u_\varepsilon(t),\Phi(t)v\big\rangle\,dt \longrightarrow \int_0^T \big\langle \partial_t u(t),\Phi(t)v\big\rangle\,dt$$

et

$$\int_0^T \big\langle \partial_t u_\varepsilon(t),\Phi(t)v\big\rangle\,dt = -\int_0^T \Phi'(t)\big\langle u_\varepsilon(t),v\big\rangle\,dt \longrightarrow -\int_0^T \Phi'(t)\big(u(t),v\big)_{\mathscr{H}}\,dt.$$

On a donc que pour tout $\Phi\in\mathscr{D}(]0,T[;\mathbb{R})$ et $v\in\mathscr{V}$

$$\int_0^T \big\langle \partial_t u(t),\Phi(t)v\big\rangle\,dt = -\int_0^T \Phi'(t)\big(u(t),v\big)_{\mathscr{H}}\,dt$$

et le lemme suit. □

Le second résultat est dû à Aubin[(50)] et Lions.

[(50)] 1939

Lemme 1.10.2. — *Soient $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ trois espaces de Banach tels que X, Z sont réflexifs et que l'injection de X dans Y est compacte. Soit $1 < p, q < \infty$ et (u_n) une suite de fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X, uniformément bornée dans $L^q([0,T];X)$ telle que $(\partial_t u_n)$ est uniformément bornée dans $L^p([0,T];Z)$. Alors il existe une sous-suite de (u_n) qui converge fortement dans $L^q([0,T];Y)$.*

Démonstration. — Ce résultat repose sur le lemme suivant, que l'on admet provisoirement.

***Lemme 1.10.3* (Lemme d'Ehrling)**. — *Sous les hypothèses du Lemme 1.10.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que pour tout $u \in X$,*

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z .$$

Soit (u_n) une suite bornée dans $L^q([0,T];X)$. Cet espace est réflexif, donc par le Théorème 1.3.3 de Banach-Alaoglu, il suffit de montrer que si u_n tend faiblement vers 0 dans $L^q([0,T];X)$ et $\partial_t u_n$ tend faiblement vers 0 dans $L^p([0,T];Z)$, alors u_n tend fortement vers 0 dans $L^q([0,T];Y)$. Par le Lemme 1.10.3, il suffit de montrer que u_n tend fortement vers 0 dans $L^q([0,T];Z)$. On remarque que (u_n) est bornée dans $C([0,T];Z)$, donc par le théorème de convergence dominée, il suffit enfin de montrer que pour presque tout $t_0 \in [0,T]$, $(u_n(t_0))$ tend vers 0 fortement dans Z.

Soit donc t_0 fixé. On remarque que pour tout $t_1 > t_0$,

$$u_n(t_0) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u_n(t)\, dt - \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \partial_t u_n(t)\, dt .$$

Le second terme tend vers 0 dans Z quand t_1 tend vers t_0, uniformément en n, car

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t) \partial_t u_n(t)\, dt \right\|_Z \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\partial_t u_n\|_{L^p([0,T];Z)} (t_1 - t_0)^{1+1/p'} .$$

Pour traiter le premier terme, on remarque que $v_n := \dfrac{1}{t_1 - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} u_n(t)\, dt$ tend faiblement vers 0 dans X puisque pour tout $f \in X^\star$

$$\langle v_n, f \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \langle u_n(t), f \rangle\, dt \to 0 .$$

La suite v_n converge donc fortement vers zéro dans Z, et le résultat suit. □

Démonstration du Lemme 1.10.3. — Si l'inégalité n'est pas vraie, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (φ_n) de norme 1 dans X telle que

$$\|\varphi_n\|_Y \geq \varepsilon + n \|\varphi_n\|_Z .$$

Quitte à extraire une sous-suite, φ_n converge fortement dans Y puisque l'injection de X dans Y est compacte, vers une limite φ. Comme

$$\|\varphi_n\|_Z \leq \frac{1}{n} \|\varphi_n\|_Y ,$$

on en déduit que $\varphi = 0$, alors que $\|\varphi_n\|_Y \geq \varepsilon$ donc $\|\varphi\|_Y \geq \varepsilon$. D'où la contradiction. □

1.11. Différentes notions de solutions d'EDP étudiées dans ce cours

Nous serons intéressés à résoudre des EDP, autant que faire se peut, au sens de Hadamard[51] : nous chercherons à déterminer si à partir des données du problème (condition initiale en temps, condition aux bords en espace), on est capable de produire une unique solution, qui soit de plus stable par perturbation des données. Nous chercherons aussi à décrire le plus de propriétés possibles de la solution (contrôler sa taille, son signe le cas échéant, sa vitesse de propagation, son comportement en temps grand...). Comme évoqué en préambule dans le cas d'équations algébriques, la question de l'espace fonctionnel dans lequel choisir la solution est déterminante, et nous donnons ici un aperçu des différents types de solutions d'EDP que nous exhiberons dans ce cours. La terminologie introduite ci-dessous (notamment les notions de solutions classiques, au sens des distributions, faibles, fortes), est relativement usuelle mais on pourra trouver d'autres définitions dans la litérature.

Une solution sera dite "*classique*" si tous les termes de l'équation ont un sens dans l'espace des fonctions continues en les différentes variables en jeu, et l'équation est donc vérifiée ponctuellement. Par exemple u est une solution classique de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^d$ si la donnée initale $u_{|t=0} = u_0$ est continue dans la variable d'espace, et si $\partial_t u$ et Δu sont des fonctions continues du temps et de la variable d'espace. Une façon d'obtenir une solution classique est de s'appuyer sur une formule explicite de la solution. Par exemple dans ce cas on a nécessairement

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

Cette formule s'obtient en remarquant que la transormée de Fourier de l'équation est l'équation différentielle ordinaire $\partial_t \widehat{u} + |\xi|^2 \widehat{u} = 0$ dont la solution explicite est $\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi)$. Ce type d'approche est utile dans la mesure où une formule explicite, si on sait l'analyser, donne toutes les informations possibles sur la solution (noter que la formule peut finalement avoir du sens sous des hypothèses de régularité plus faibles sur les données, distributionnelles par exemple). En revanche dans la pratique il est rare d'obtenir de telles formules explicites : dès que les opérateurs en question sont à coefficients variables, ou que l'équation est non linéaire, l'opérateur (s'il existe) reliant la donnée à la solution sera abstrait ou non explicite et ne fournira souvent pas directement d'information sans davantage d'analyse.

Il s'agit alors de recourir à des méthodes plus robustes pour résoudre le problème, et donc alléger les exigences de régularité imposées à la solution recherchée. A l'extrême on peut rechercher des solutions "*au sens des distributions*" : l'idée, vague, est de multiplier formellement l'équation (le système) par une fonction test (un vecteur dont les composantes sont des fonctions test), d'intégrer dans toutes les variables et de faire porter toutes les dérivées partielles sur cette fonction test par intégrations par parties. Si la formule obtenue est vérifiée pour toute fonction test, alors on a une solution au sens des distributions au problème. Notons qu'une solution classique (pourvu qu'elle ait des conditions de croissance raisonnables à l'infini) est toujours solution au sens des distributions. Par exemple dans le cas de l'équation de la chaleur, on dira que u est une solution au sens des distributions si

$$\forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d), \quad \langle u(t), \phi(t)\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)} - \int_0^t \langle u, \Delta\phi\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)}\, dt' = \langle u_0, \phi(0)\rangle_{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)} \tag{1.11.1}$$

pour presque tout $t > 0$. Pour démontrer l'existence de ce type de solution, la méthode générale consiste à approximer l'équation (par convolution de tous les termes avec une approximation de l'identité par exemple), et de démontrer l'existence d'une solution classique à cette équation approximée. Cette solution classique est (là encore si elle croît au plus polynômialement à l'infini) également une solution au sens des

[51] 1865-1963

distributions, et toute la difficulté consiste alors à passer à la limite dans tous les termes de l'identité au sens des distributions associée. Pour cela il faut obtenir des "bornes a priori" sur cette famille de solutions approximées, ce qui nécessite d'avoir recours à des "méthodes d'énergie" (utiliser la solution elle-même comme fonction test par exemple, pour en déduire des bornes uniformes). L'application d'un théorème de type Banach-Alaoglu permet alors de passer à la limite dans les termes linéaires de la formulation au sens des distributions. S'il y a des termes non linéaires, il faudra avoir recours à un argument de compacité de type du théorème d'Aubin-Lions (rappelons qu'on ne peut pas passer directement à la limite faible dans un terme non linéaire). Cette méthode ne peut donc fonctionner que si l'équation "fournit" des bornes a priori sur les solutions – c'est en général le cas si l'équation est reliée à un phénomène physique –, ainsi que de la compacité. Quand elle fonctionne, cette construction permet ainsi d'obtenir non seulement l'existence d'une solution au sens des distributions, mais aussi un espace fonctionnel dans lequel vit cette solution – pourvu que la donnée initiale soit choisie dans un espace convenable. Par exemple pour l'équation de la chaleur, cette méthode indiquerait par exemple que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est un choix pertinent et que la solution au sens des distributions ainsi obtenue est dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$: cela se devine de la formulation au sens des distributions (1.11.1) en prenant $\phi = u$. On dit alors qu'on a affaire à une solution "*faible*". Cette méthode fournit un procédé de construction d'une solution faible (qui peut être parfois utilisé comme un schéma numérique pour résoudre l'équation si l'on contrôle suffisamment la convergence de la solution approximée vers cette solution faible), en revanche elle ne dit rien de l'unicité en général. D'autres arguments sont alors nécessaires.

Une solution "*forte*" est en quelque sorte intermédiaire entre ces deux notions ("classique" et "faible") : c'est une solution faible qui est en outre continue en temps à valeurs dans un certain espace, parfois celui fourni par la méthode ci-dessus mais pas toujours. Une telle solution s'obtient en général par une méthode de point fixe dans les Banach, après avoir mis l'équation sous forme intégrale (par une méthode de type "variation de la constante"), ce qui permet d'obtenir à la fois l'existence et l'unicité de la solution. Ce type de solution, obtenue par point fixe sur la formulation intégrale, est parfois appelée "*mild*". Concrètement si l'on considère l'équation de la chaleur non linéaire $\partial_t u - \Delta u = F(u)$ sur $\mathbb{R}^d$ on cherchera à implémenter une méthode de point fixe pour l'équation

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-t')\Delta} F\big(u(t')\big)\, dt', \quad \text{avec} \quad e^{t\Delta} f := \mathscr{F}^{-1}\big(e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} f(\xi)\big).$$

L'opérateur $e^{t\Delta}$ est le prototype d'un "semi-groupe", notion qui sera abordée en TD. Cette technique de résolution utilise moins la structure de l'équation que la méthode précédente donnant des solutions faibles : aucune information de type "borne a priori" n'est nécessaire, seulement des estimations de continuité des opérateurs en jeu dans l'espace fonctionnel dans lequel on implémente la méthode de point fixe. Elle est donc plus robuste (seules les estimations sont utiles, pas la forme explicite des opérateurs), mais donc parfois moins efficace : la méthode de point fixe nécessite des conditions de petitesse, qui peuvent être difficiles à garantir globalement en temps sans utiliser la forme précise de l'équation.

Nous mettrons toutes ces techniques en œuvre dans ce cours, dans des cadres variés. Notons que les choix faits sont un peu arbitraires, beaucoup d'équations pouvant se résoudre par l'une ou l'autre méthode. Le dernier chapitre de ce cours, portant sur les équations de Navier-Stokes, sera l'occasion d'opérer plusieurs de ces techniques sur une même équation.

- Solutions classiques
  - Équations d'ordre 1, Section 2.1 page 37 (méthode des caractéristiques)
  - Équations de transport, Section 2.2 page 43 (méthode des caractéristiques)
  - Équation de Laplace-Poisson, Section 3.1 page 65 (solution explicite)

    - Équation de la chaleur, Section 3.3 page 75 (solution explicite)
- Solutions au sens des distributions
    - Équations d'ordre 1 en temps, d'ordre quelconque en espace, Section 4.1 page 90 (formule)
    - Équation des ondes linéaire, Section 4.2 page 93 (formule)
    - Équation de Schrödinger linéaire, Section 4.3.1.1 page 98 (formule)
- Solutions faibles
    - Équations elliptiques, Section 3.2 page 70 (Lax-Milgram)
    - Équations paraboliques, Section 3.4 page 77 (approximation)
    - Équation de Navier-Stokes, Section 5.2 page 117 (approximation)
- Solutions fortes :
    - Équation de Schrödinger linéaire, Section 4.3.3 page 101 (estimation d'énergie)
    - Équation de Schrödinger non linéaire, cubique Section 4.3.6 page 108 (point fixe)
    - Équation de Navier-Stokes, Section 5.4 page 128 (point fixe)
- Autres : solutions généralisées d'équations de transport, Section 2.2.1.3 page 48 (formule).

Remarque 1.11.1. — *Ce cours est très loin d'être exhaustif, aussi bien pour ce qui est des exemples d'EDP que nous analyserons, que des techniques mises en œuvre. Citons par exemple les équations d'Euler, de Boltzmann (et d'autres équations dites cinétiques, comme Vlasov, Fokker-Planck...), les équations d'Hamilton-Jacobi, de Monge-Ampère... ainsi que de nombreuses variantes aux modèles étudiés dans ce cours. De nombreuses techniques importantes n'ont pas été abordées, comme celles venues du calcul des variations, de l'analyse microlocale ou semi-classique, les solutions de viscosité...*

N'hésitez pas à demander des références bibliographiques !

1.12. Exercices

Exercice 1 **Un résultat de type Osgood en dimension infinie**

Soit E un espace de Banach, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$.

Soit ω une fonction continue, croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, nulle en 0 et strictement positive ailleurs, et telle qu'il existe $r_0 > 0$ tel que

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\omega(r)} = \infty.$$

On définit l'ensemble C_ω des fonctions continues bornées de E dans E telles que

$$\|F\|_\omega := \|F\|_{L^\infty(E)} + \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\omega(\|x - y\|)} < \infty.$$

On considère $F \in L^1_{loc}(I; C_\omega)$, et on souhaite montrer qu'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel que l'équation

$$(EDO) \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', x(t'))\, dt'$$

a une unique solution définie sur J.

1. On commence par démontrer un résultat intermédiaire : on considère $a \in L^1_{loc}(I)$ positive, et une fonction $\tilde{\rho}$ telle que pour un réel positif b on ait

$$\tilde{\rho}(t) \leq R_b(t) := b + \int_{t_0}^{t} a(t')\omega(\tilde{\rho}(t'))\, dt'.$$

Montrer que si $b \neq 0$ alors

$$\Omega(b) \leq \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt' + \Omega(\tilde{\rho}(t)), \quad \Omega(r') := \int_{r'}^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{\omega(r)}.$$

Montrer que si $b = 0$ alors $\tilde{\rho}$ est identiquement nulle. On pourra raisonner par contradiction et montrer pour tout $\alpha > 0$

$$\Omega(\alpha) \leq \int_{t_0}^{t_1} a(t')\,dt' + \Omega(\delta), \quad \delta := \int_{t_0}^{t_1} a(t')\omega(\sup_{[t_0,t']} \rho(t''))\,dt'$$

avec t_1 à déterminer.

2. Posons

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t', x_k(t'))\,dt' \quad \text{et} \quad \rho_k(t) := \sup_n \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|.$$

Montrer que

$$0 \leq \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(t')\omega(\rho_k(t'))\,dt'$$

3. Conclure.

Exercice 2 Espaces de Sobolev sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev homogène $W_0^{m,p}(\Omega)$ est défini comme l'adhérence dans $W^{m,p}(\Omega)$ de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in \mathscr{C}_b^1(\Omega)$ (i.e. v et ses dérivées sont bornées sur Ω). Montrer que $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ et les dérivées au sens faible vérifient

$$\forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \partial_i(uv) = (\partial_i u)v + u(\partial_i v).$$

2. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\eta \in \mathscr{C}_c^1(\Omega)$ alors $\eta u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

3. Montrer que pour $1 \leq p \leq p' < \infty$, $W^{1,p'}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $W^{1,p}(\Omega)$.

4. Soit $G \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction à dérivée bornée. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ et que, au sens des distributions,

$$\nabla(G \circ u) = (G' \circ u)\nabla u.$$

5. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^d$ relativement compact dans Ω, et $\delta := \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Pour h dans $\mathbb{R}^n$, soit τ_h l'opérateur de translation par h. Étant donnée f dans $L^p(\Omega)$, $p > 1$, montrer que

$$f \in W^{1,p}(\Omega') \Leftrightarrow \sup_{0<|h|\leq\delta} |h|^{-1} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Exercice 3 Florilège d'équations

1. Étant donné un réel h, trouver tous les f dans $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x + h).$$

2. Étant donné f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'il existe une unique fonction u dans $H^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $u - \Delta u = f$ presque partout.

3. Vérifier que pour tout entier $d \geq 3$, la distribution

$$E_d(x) := \frac{1}{(d-2)|\mathbb{S}^{d-1}||x|^{d-2}}$$

est une solution fondamentale du Laplacien. Proposer un candidat pour E_2.

Exercice 4 🐒🐒 Une définition alternative de H^s

On rappelle que l'espace de Schwartz $\mathscr{S}$ est défini comme l'espace des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout d dans $\mathbb{N}$ et tout α dans $\mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{d/2}\partial^\alpha f(x)\right| < \infty.$$

Pour s réel, on introduit les quantités

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2},$$

et les espaces correspondant H^s et $\dot{H}^s$ de distributions tempérées f, définis en imposant que $\widehat{f}$ soit une fonction mesurable telle que $\|f\|_{H^s}$ et $\|f\|_{\dot{H}^s}$ soient respectivement finies.

1. Montrer que H^s est un espace de Hilbert, et que $\dot{H}^s$ en est un si et seulement si $s < d/2$.

2. En considérant le produit scalaire avec les translatées d'une gaussienne, montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est inclus et dense dans H^s.

3. À l'aide de fonctions plateau, montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$.

4. Lorsque $s = m \geq 1$ est un entier, montrer que les normes de H^m et $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ sont équivalentes sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. En déduire $H^m = W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 5 🐒🐒 Opérateurs linéaires équivariants par translation

Un opérateur linéaire T sur un espace de fonctions est dit équivariant par translation s'il commute avec toutes les translations τ_h. Cela concerne notamment tous les opérateurs différentiels usuels !

1. Lorsque T est un opérateur linéaire équivariant par translation sur les fonctions $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, montrer que T est une convolution discrète, et que sa matrice dans la base de Fourier $e_k(n) := \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2ikn\pi}{N}}$ est diagonale.

2. Lorsque $1 \leq p < \infty$, et que $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ est linéaire continu équivariant par translation, monter que $T(L^p(\mathbb{R}))$ ne contient que des fonctions uniformément continues.

[Indication : on pourra montrer que f dans $L^\infty(\mathbb{R})$ admet un représentant uniformément continu si et seulement si $\|\tau_h f - f\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $h \to 0$.]

3. En déduire que l'application $L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto T(f)(0)$ est bien définie dans le dual de $L^p(\mathbb{R})$.

4. En conclure que T est un opérateur de convolution avec un élément de $L^{p'}(\mathbb{R})$.

5. Par dualité (transposition), montrer qu'un opérateur linéaire continu $L^1(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ en induit un autre $L^{p'}(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$.

6. Déterminer les opérateurs linéaires continus équivariants par translation $L^1(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, pour $1 < p < \infty$.

Exercice 6 Sur l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier

1. Pour $n \geq 1$, montrer l'existence de f_n dans $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f_n} = \mathbb{1}_{[-1,1]} \star \mathbb{1}_{[-n,n]}$. En déduire que $\widehat{f_n} \in L^2 \cap \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $(\widehat{f_n})_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, mais que $(f_n)_{n\geq 1}$ ne l'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

3. En déduire que la transformée de Fourier (TF) est linéaire, continue, injective $L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, mais non surjective.

4. Montrer que l'image de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ par la TF est incluse dans $L^1(\mathbb{R})$, puis que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est inclus dans l'image de $L^1(\mathbb{R})$.

5. À l'aide d'une fonction plateau, conclure que l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la TF est dense dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

1.13. Solutions de quelques exercices

Résultat de type Osgood en dimension infinie

1. On note que si $b > 0$ alors la fonction $R_b(t)$ est strictement positive et on calcule facilement que
$$-\frac{d}{dt}(\Omega(R_b(t))) = \frac{d}{dt}(R_b(t))\frac{1}{\omega(R_b(t))}$$
Le résultat suit par intégration, parce que $-\Omega$ est croissante et $\tilde{\rho} \leq R_b$.
Si $b = 0$ alors pour t_1 bien choisi on a $\delta > 0$ et le résultat précédent montre que
$$\Omega(b) \leq \int_{t_1}^{t_0} a(t')\,dt' + \Omega(g+\delta)$$
et la contradiction vient de l'hypothèse sur ω. L'unicité suit directement.
2. L'inégalité
$$0 \leq \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(t')\omega(\rho_k(t'))\,dt'$$
suit directement de la croissance de ω, et le lemme de Fatou[52] permet d'écrire que
$$\tilde{\rho}(t) := \limsup_{k\to\infty} \rho_k(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(t')\omega(\tilde{\rho}(t'))\,dt'.$$
3. On conclut directement à l'existence par la première question.

[52] 1878-1929

CHAPITRE 2

Équations d'ordre 1, Équations de transport

Sommaire

2.1. Méthode des caractéristiques **37**
2.1.1. Cas linéaire 38
2.1.1.1. Analyse de l'équation 38
2.1.1.2. Problème de Cauchy 39
2.1.2. Cas semi-linéaire 40
2.1.3. Cas quasi-linéaire 40
2.1.4. Cas complètement non linéaire 41
2.1.5. Le cas multidimensionnel 43
2.2. Équation de transport **43**
2.2.1. Transport à coefficients constants 43
2.2.1.1. Méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^d$, cas C^1 44
2.2.1.2. Le problème aux limites, cas régulier 44
2.2.1.3. Solutions généralisées 48
2.2.2. Transport à coefficients variables 50
2.2.2.1. Résolution, cas fort 50
2.2.2.2. Résolution, cas conservatif 51
2.3. Exercices **52**
2.4. Solutions de quelques exercices **58**

2.1. Méthode des caractéristiques

C'est une méthode générale qui permet de trouver des solutions à une équation du type

$$F\big(X, u(X), \nabla u(X)\big) = 0\,, \quad X \in \mathbb{R}^d\,.$$

On commencera par le cas où $d = 2$, qui est très courant dans la pratique (une variable correspond au temps, l'autre à l'espace), que l'on déclinera suivant le type de non linéarité de F.

2.1.1. Cas linéaire. — On considère des fonctions dépendant de la variable de temps t et de la variable d'espace x et l'on se place dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pour simplifier.

On considère donc l'EDP d'inconnue $u:(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto u(t,x)\in\mathbb{R}$

$$a(t,x)\partial_t u(t,x)+b(t,x)\partial_x u(t,x)=c(t,x)\,. \tag{2.1.1}$$

On suppose que les fonctions a,b,c sont régulières (au moins C^1).

2.1.1.1. Analyse de l'équation. — On note que si u est solution alors pour tout (t,x)

$$\big(a(t,x),b(t,x),c(t,x)\big)\perp\big(\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x),-1\big)\,.$$

En définissant la surface $\mathscr{S}:=\Big\{\big(t,x,u(t,x)\big)\Big\}$ de $\mathbb{R}^3$ alors $\big(a(t,x),b(t,x),c(t,x)\big)$ est dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en chaque $\big(t,x,u(t,x)\big)$ car $\big(\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x),-1\big)$ est un vecteur normal à $\mathscr{S}$ en $\big(t,x,u(t,x)\big)$[(1)]. Résoudre (2.1.1) revient donc à trouver une surface $\mathscr{S}$ telle que pour tout $(t,x,v)\in\mathscr{S}$, $\big(a(t,x),b(t,x),c(t,x)\big)$ appartienne à $T_{(t,x,v)}\mathscr{S}$.

On commence par construire une courbe $\mathscr{C}:=\Big\{\big(t(s),x(s),v(s)\big)\Big\}$ dans $\mathscr{S}$, paramétrée par un réel s, telle que pour tout s, le vecteur $\big(a\big(t(s),x(s)\big),b\big(t(s),x(s)\big),c\big(t(s),x(s)\big)\big)$ est tangent à la courbe. Ainsi la courbe $s\mapsto\big(t(s),x(s),v(s)\big)$ vérifie les équations intégrales

$$\begin{cases}\dot t(s)=a\big(t(s),x(s)\big)\\ \dot x(s)=b\big(t(s),x(s)\big)\\ \dot v(s)=c\big(t(s),x(s)\big)\,.\end{cases}$$

Les *courbes intégrales* du champ $V:=\Big(a(t,x),b(t,x),c(t,x)\Big)$ sont les *courbes caractéristiques* de (2.1.1). On trouve une solution à (2.1.1) en construisant $\mathscr{S}$ comme la réunion de ces courbes caractéristiques. Une telle surface sera dite *surface caractéristique.*

Etudions un exemple. Considérons l'équation de transport

$$\begin{cases}\partial_t u+\alpha\partial_x u=0\\ u(0,x)=\Phi(x)\,,\end{cases}$$

avec α un réel non nul. On cherche la surface $\mathscr{S}$. On définit $\Gamma:=\Big\{(0,r)\,,r\in\mathbb{R}\Big\}$ la courbe sur laquelle la solution est prescrite. La surface doit rencontrer $\big(0,r,\Phi(r)\big)$. On fixe donc $r\in\mathbb{R}$ et on construit la courbe caractéristique issue du point $\big(0,r,\phi(r)\big)$:

$$\begin{cases}\partial_s t(s,r)=1\,, & t(0,r)=0\\ \partial_s x(s,r)=\alpha\,, & x(0,r)=r\\ \partial_s v(s,r)=0\,, & v(0,r)=\Phi(r)\,.\end{cases}$$

On trouve

$$t(s,r)=s\,,\quad x(s,r)=\alpha s+r\,,\quad v(s,r)=\Phi(r)\,.$$

Mais alors on peut considérer inversement

$$s(t,x)=t\,,\quad r(t,x)=x-\alpha t\,,$$

et donc

$$u(t,x)=v\big(s(t,x),(t,x)\big)=\Phi(x-\alpha t)\ .$$

(1) On l'obtient par exemple en prenant le produit vectoriel des deux vecteurs tangents $\big(1,0,\partial_t u(t,x)\big)$ et $\big(0,1,\partial_x u(t,x)\big)$.

2.1.1.2. Problème de Cauchy. — Soit Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1, on cherche à résoudre l'équation

$$\left\{\begin{array}{c} a(t,x)\partial_t u(t,x)+b(t,x)\partial_x u(t,x)=c(t,x)\,, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u_{|\Gamma}(t,x)=\Phi(t,x)\,, \quad (t,x)\in\Gamma\,. \end{array}\right. \tag{2.1.2}$$

On note qu'il faut nécessairement prescrire des conditions de compatibilité su l'ensemble Γ. En effet dans l'exemple précédent où $a\equiv 1$ et $b\equiv\alpha$, le choix $\Gamma:=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,/\,x=\alpha t\}$ donne un problème mal posé puisque u est constante sur les lignes de niveau de $x-\alpha t$. D'une part il faudrait que Φ soit constante sur Γ, et d'autre part on ne pourrait pas déterminer u ailleurs.

On paramétrise dorénavant Γ par

$$\Gamma=\Big\{\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\,,\quad r\in\mathbb{R}\Big\}\,. \tag{2.1.3}$$

Définition 2.1.1. — *On dit que* Γ *est* non caractéristique *pour (2.1.2) si* Γ *est nulle part tangente aux points* $\big(a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big),b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\big)$*, en d'autres termes*

$$\forall\, r\in\mathbb{R},\quad \big(a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big),b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big)\neq 0\,.$$

Dans l'exemple précédent où $\Gamma:=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,/\,x=\alpha t\}$ on a $\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)=\big(r/\alpha,r\big)$ et donc

$$a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big),b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big)=(1,\alpha)\cdot\big(-1,1/\alpha\big)=0\,.$$

La courbe Γ est donc caractéristique pour le problème, et on ne peut pas le résoudre. En revanche l'ensemble $\Gamma:=\{(0,x)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\in\mathbb{R}\}$ est non caractéristique puisque

$$a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big),b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big)=(1,\alpha)\cdot\big(0,1\big)\neq 0\,.$$

On va construire une surface intégrale $\mathscr{S}$ comme réunion de courbes caractéristiques

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_s t(s,r)=a\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,, & t(0,r)=\gamma_1(r) \\ \partial_s x(s,r)=b\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,, & x(0,r)=\gamma_2(r) \\ \partial_s v(s,r)=c\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,, & v(0,r)=\Phi(r)\,. \end{array}\right.$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution locale $(s,r)\mapsto\big(t,x,v\big)(s,r)$ issue de ces données initiales. S'il existe $H(t,x)$ telle que $(s,r)=H(t,x)$ alors on a trouvé la solution unique

$$u(t,x)=v\circ H(t,x)\,.$$

Il s'agit donc d'appliquer un théorème d'inversion locale[(2)].

Proposition 2.1.2. — *Si* Γ *est non caractéristique, alors il existe un inverse local de* $G(s,r):=\big(t(s,r),x(s,r)\big)$ *près de* $s=0$*: pour tout* r_0*, il existe un voisinage ouvert* V *de* $(0,r_0)$ *et* W *de* $G(0,r_0)=\big(\gamma_1(r_0),\gamma_2(r_0)\big)$ *tels que* G *est un difféomorphisme de* V *dans* W*.*

Démonstration. — On a

$$\operatorname{Jac}G(s,r):=\left|\begin{array}{cc}\partial_s t & \partial_r t\\ \partial_s x & \partial_r x\end{array}\right|=\partial_s t\partial_r x-\partial_r t\partial_s x$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_s t(s,r)=a\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,, & \partial_r t(0,r_0)=\gamma_1'(r_0) \\ \partial_s x(s,r)=b\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,, & \partial_r x(0,r_0)=\gamma_2'(r_0)\,. \end{array}\right.$$

---

(2) Si $G:U\subset\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$ est C^1 et si $x_0\in\mathbb{R}^d$ est tel que $\operatorname{Jac}G(x_0):=\left|\begin{array}{ccc}\partial_1 G^1(x_0) & \dots & \partial_n G^1(x_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 G^n(x_0) & \dots & \partial_n G^n(x_0)\end{array}\right|\neq 0$ alors il existe $V\subset U$ contenant x_0 et un ouvert $W\subset\mathbb{R}^d$ contenant $G(x_0)$ tels que $G:V\mapsto W$ est un difféomorphisme (i.e. bijectif avec G^{-1} de classe C^1).

On en déduit que

$$\operatorname{Jac} G(0,r_0) = a\big(t(0,r_0),x(0,r_0)\big)\gamma_2'(r_0) - b\big(t(0,r_0),x(0,r_0)\big)\gamma_1'(r_0)$$

qui est non nul car Γ est non caractéristique. La proposition est démontrée. □

Traitons un exemple : on souhaite résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + t\partial_x u(t,x) = 0\,, & (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u(0,x) = \Phi(x)\,, & x\in\mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Avec les notations ci-dessus on a

$$\gamma_1(r) = 0\,, \quad \gamma_2(r) = r$$

et Γ est non caractéristique car

$$\big(a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big), b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big) = (1,0)\cdot(-1,0) \neq 0\,.$$

On résout donc

$$\begin{cases} \partial_s t(s,r) = 1\,, & t(0,r) = 0 \\ \partial_s x(s,r) = t(s,r)\,, & x(0,r) = r \\ \partial_s v(s,r) = 0\,, & v(0,r) = \Phi(r)\,. \end{cases}$$

On trouve

$$t(s,r) = s\,, \quad x(s,r) = \frac{s^2}{2} + r\,, \quad v(s,r) = \Phi(r)\,,$$

d'où

$$u(t,x) = \Phi\Big(x - \frac{t^2}{2}\Big)\,.$$

2.1.2. Cas semi-linéaire. — Cette situation correspond au cas où il y a des termes non linéaires d'ordre 0. On considère ainsi

$$\begin{cases} a(t,x)\partial_t u(t,x) + b(t,x)\partial_x u(t,x) = c\big(t,x,u(t,x)\big)\,, & (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u_{|\Gamma}(t,x) = \Phi(t,x)\,, & (t,x)\in\Gamma\,. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

On suit exactement la même démarche qu'au-dessus, à la seule différence près que

$$\partial_s v(s,r) = c\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r)\big)\,.$$

2.1.3. Cas quasi-linéaire. — Le modèle est

$$\begin{cases} a\big(t,x,u(t,x)\big)\partial_t u(t,x) + b\big(t,x,u(t,x)\big)\partial_x u(t,x) = c\big(t,x,u(t,x)\big)\,, & (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u_{|\Gamma}(t,x) = \Phi(t,x)\,, & (t,x)\in\Gamma\,. \end{cases}$$

À présent on dit que (Γ,Φ) est non caractéristique pour (2.1.5) si

$$\big(a\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r),\Phi(r)\big), b\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r),\Phi(r)\big)\big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big) \neq 0\,.$$

Les courbes intégrales sont maintenant couplées, mais la démarche reste la même.

2.1.4. Cas complètement non linéaire. — On considère à présent une équation qui s'écrit de manière générale sous la forme suivante

$$F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u)=0\,,\quad u_{|\Gamma}=\Phi\,. \tag{2.1.5}$$

On pose, avec la notation (2.1.3)

$$\begin{aligned} p(s,r)&:=\partial_t u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\\ q(s,r)&:=\partial_x u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\,. \end{aligned}$$

On remarque que les situations précédentes peuvent s'écrire sous la forme

$$0=F(t,x,v,p,q):=a(t,x,v)p+b(t,x,v)q-c(t,x,v)$$

et les équations caractéristiques dans ce cadre s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_s t=\partial_p F\\ \partial_s x=\partial_q F\\ \partial_s v=p\partial_p F+q\partial_q F\,. \end{array}\right. \tag{2.1.6}$$

On conserve ces équations, mais le système est dorénavant sous-déterminé, il faut établir des équations sur p et q (nous allons raisonner par conditions nécessaires et laisserons en exercice le fait que F est bien constante sur les courbes caractéristiques ainsi construites). On remarque que

$$\partial_t\Big(F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u)\Big)=\partial_x\Big(F(t,x,u,\partial_t u,\partial_x u)\Big)=0$$

donc sur les courbes caractéristiques cela implique que

$$\begin{aligned} &\partial_t F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)+\partial_v F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_t u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\\ &+\partial_p F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_t^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\\ &+\partial_q F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_{tx}^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)=0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\partial_x F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)+\partial_v F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_x u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\\ &+\partial_p F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_{tx}^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\\ &+\partial_q F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\partial_x^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)=0\,. \end{aligned}$$

Mais on a $\partial_t u\big(t(s,r),x(s,r)\big)=p(s,r)$, $\partial_x u\big(t(s,r),x(s,r)\big)=q(s,r)$ et

$$\begin{aligned} \partial_s p\big(t(s,r),x(s,r)\big)&=\partial_t^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\partial_s t(s,r)+\partial_{tx}^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\partial_s x(s,r)\Big(=\partial_t p\partial_p F+\partial_x p\partial_q F\Big)\\ \partial_s q\big(t(s,r),x(s,r)\big)&=\partial_{tx}^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\partial_s t(s,r)+\partial_x^2 u\big(t(s,r),x(s,r)\big)\partial_s x(s,r)\Big(=\partial_t q\partial_p F+\partial_x q\partial_q F\Big)\,, \end{aligned}$$

et donc on conclut grâce à (2.1.6) que

$$\begin{aligned} \partial_s p(s,r)&=-\partial_t F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)-p(s,r)\partial_v F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)\\ \partial_s q(s,r)&=-\partial_x F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)-q(s,r)\partial_v F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big) \end{aligned}$$

ou de manière plus compacte

$$\begin{aligned} \partial_s p&=-\partial_t F-p\partial_v F\\ \partial_s q&=-\partial_x F-q\partial_v F\,. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de prescrire les données initiales de p et q sur Γ. On cherche donc deux fonctions $r\mapsto\psi_1(r)$ et $r\mapsto\psi_2(r)$ telles que

$$\begin{aligned} &F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r),\Phi(r),\psi_1(r),\psi_2(r)\big)=0\,,\\ &\Phi'=\psi_1\gamma_1'+\psi_2\gamma_2'\,, \end{aligned}$$

où la deuxième identité provient du fait que $u\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)=\Phi(r)$. Le fait que Γ soit non caractéristique s'écrit

$$\Big(\partial_p F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r,\Phi(r),\psi_1(r),\psi_2(r))\big),\partial_q F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r),\Phi(r),\psi_1(r),\psi_2(r)\big)\Big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big)\neq 0\,.$$

On note que cette condition garantit que les deux équations ci-dessus sont indépendantes.

Si de telles fonctions existent, alors on peut y associer une surface intégrale unique, au moins près de Γ: elle est obtenue comme solution du système d'EDO suivant pour chaque r:

$$\begin{cases} \partial_s t=\partial_p F\,, & t(0,r)=\gamma_1(r)\\ \partial_s x=\partial_q F\,, & x(0,r)=\gamma_2(r)\\ \partial_s v=p\partial_p F+q\partial_q F\,, & v(0,r)=\Phi(r)\\ \partial_s p=-\partial_t F-p\partial_v F\,, & p(0,r)=\psi_1(r)\\ \partial_s q=-\partial_x F-q\partial_v F\,, & q(0,r)=\psi_2(r)\,. \end{cases}$$

Notons que par abus de notation on a omis d'indiquer que dans le membre de droite les fonctions sont évaluées en $\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)$. On laisse en exercice le fait que pour tout r donné, la fonction $s\mapsto F\big(t(s,r),x(s,r),v(s,r),p(s,r),q(s,r)\big)$ est bien constante.

Traitons un exemple important, qui est l'équation eikonale. On considère l'équation

$$|\partial_t u|^2+|\partial_x u|^2=1\,,\quad u_\Gamma=0\quad\text{dans}\quad\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

où $\Gamma=\Big\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ t^2+x^2=1\Big\}$ est le cercle unité, C'est une équation complètement non linéaire. On a

$$F(t,x,v,p,q):=p^2+q^2\,.$$

Les équations caractéristiques sont, pour tout r,

$$\begin{cases} \partial_s t(s,r)=2p(s,r)\,, & t(0,r)=\cos r\\ \partial_s x(s,r)=2q(s,r)\,, & x(0,r)=\sin r\\ \partial_s v(s,r)=(2p^2+2q^2)(s,r)\,, & v(0,r)=0\\ \partial_s p(s,r)=0\,, & p(0,r)=\psi_1(r)\\ \partial_s q(s,r)=0\,, & q(0,r)=\psi_2(r)\,. \end{cases}$$

Pour déterminer les conditions initiales ψ_1 et ψ_2 sur p et q on rappelle qu'il faut assurer les conditions

$$F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r),\Phi(r),\psi_1(r),\psi_2(r)\big)=0\,,\quad\Phi'(r)=\psi_1\gamma_1'(r)+\psi_2\gamma_2'(r)\,.$$

En d'autres termes

$$\psi_1^2(r)+\psi_2^2(r)=1\,,\quad 0=-\psi_1(r)\sin r+\psi_2(r)\cos r\,.$$

Les solutions sont soit $(\psi_1,\psi_2)(r)=(\cos r,\sin r)$, soit $(\psi_1,\psi_2)(r)=(-\cos r,-\sin r)$. Dans le premier cas après calculs on trouve

$$t(s,r)=(2s+1)\cos r\,,\quad x(s,r)=(2s+1)\sin r\,,\quad v(s,r)=2s\,,$$
$$p(s,r)=\cos r\,,\quad q(s,r)=\sin r\,.$$

Le déterminant jacobien du changement de variables $(s,r)\mapsto(t,x)$ est égal à $2(2s+1)$ donc le changement de variables est inversible dès que $s\neq -1/2$. En écrivant $u(t,x)=v(s,r)$ on trouve enfin

$$(u+1)^2=t^2+x^2$$

et pour que les conditions aux bords soient satisfaites

$$u(t,x)=-1+\sqrt{t^2+x^2}\,.$$

Dans le deuxième cas le raisonnement est analogue et on trouve

$$u(t,x)=1-\sqrt{t^2+x^2}\,.$$

Ces deux solutions se prolongent par continuité à $t = x = 0$.

On remarque que Γ est bien non caractéristique puisque

$$\Big(\partial_p F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big),\partial_q F\big(\gamma_1(r),\gamma_2(r)\big)\Big)\cdot\big(-\gamma_2'(r),\gamma_1'(r)\big) = \big(2\cos r, 2\sin r\big)\cdot\big(-\cos r,-\sin r\big) = -2 \neq 0\,.$$

2.1.5. Le cas multidimensionnel. — Dans le cas multidimensionnel (toujours scalaire) on remplace $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ par $X = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$ avec $d > 2$ et il suffit de paramétriser $\Gamma = \{\gamma_1,\dots,\gamma_d\}(R)$ par $R = (r_1,\dots,r_{d-1})$ et poser $P = \nabla_X u$. Il y a alors $2d+1$ équations caractéristiques (à R fixé)

$$\partial_s X = \nabla_P F\,,\quad \partial_s v = P\cdot\nabla_P F\,,\quad \partial_s P = -\nabla_X F - P\partial_v F$$

et $2d+1$ données initiales : pour $1 \le i \le d$,

$$x_i(0,R) = \gamma_i(R)\,,\quad v(0,R) = \Phi(R)\,,\quad p_i(0,R) = \psi_i(R)$$

avec

$$F\big(\gamma_1(R),\dots,\gamma_n(R),\Phi(R),\psi_1(R),\dots,\psi_n(R)\big) = 0\,.$$

Enfin

$$\partial_{r_i} u = \nabla_X u\cdot\partial_{r_i} X$$

donc

$$\partial_{r_i}\Phi = \sum_{j=1}^{d}\psi_j\partial_{r_i}\gamma_j\,.$$

Les données sont non caractéristiques si

$$\nabla_P F\big(\gamma(R),\Phi(R),\Psi(R)\big)\cdot N\Gamma(R) \neq 0\,,$$

où N est un vecteur normal à Γ en $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)(R)$.

2.2. Équation de transport

Il s'agit du prototype de l'EDP linéaire du premier ordre : nous allons en étudier deux exemples.

1. Transport à coefficients constants : on cherche $f = f(t,x)$ telle que

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + \alpha f = S\,, \tag{2.2.1}$$

avec $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur donné, et f,α,S définies sur $\mathbb{R}^+\times\Omega$ avec Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les fonctions α, S sont également données.

2. Transport à coefficients variables (forme forte) : on cherche $f = f(t,x)$ telle que

$$\partial_t f + b\cdot\nabla_x f = 0\,, \tag{2.2.2}$$

avec b donnée, définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

2'. Transport à coefficients variables (forme conservative)

$$\partial_t f + \operatorname{div}(bf) = 0\,, \tag{2.2.3}$$

avec b donnée, définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

2.2.1. Transport à coefficients constants. —

2.2.1.1. Méthode des caractéristiques dans $\mathbb{R}^d$, cas C^1. — On suppose ici que $\Omega = \mathbb{R}^d$ et que α, S sont dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. On est dans la situation semi-linéaire du paragraphe précédent. Si f est solution de (2.2.1) de classe C^1, alors on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\big(f\big(t,\gamma(t)\big)\big) = S\big(t,\gamma(t)\big) - \alpha\big(t,\gamma(t)\big) f\big(t,\gamma(t)\big),$$

où $\big(t,\gamma(t)\big)$ est la courbe caractéristique de l'opérateur de transport : celle issue de x en $t=0$ s'écrit

$$\gamma(t) = x + vt.$$

On obtient ainsi directement le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. — *Soit f_0 dans $C^1(\mathbb{R}^d)$ et α, S dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ solution de (2.2.1) et elle s'écrit*

$$\begin{aligned} f(t,x) = f_0(x - tv) \exp\Big(-\int_0^t \alpha\big(t', x + (t'-t)v\big)\, dt'\Big) \\ + \int_0^t S\big(t', x + (t'-t)v\big) \exp\Big(-\int_{t'}^t \alpha\big(t'', x + (t''-t)v\big)\, dt''\Big)\, dt'. \end{aligned}$$

2.2.1.2. Le problème aux limites, cas régulier. — Supposons que Ω est un ouvert à bord de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$ et que $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On note n_x le vecteur unitaire normal au bord en $x \in \partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur. On définit les bords sortant, entrant et caractéristique par

$$\partial\Omega^+ := \big\{x \in \partial\Omega \,/\, v \cdot n_x > 0\big\}, \quad \partial\Omega^- := \big\{x \in \partial\Omega \,/\, v \cdot n_x < 0\big\}, \quad \partial\Omega^0 := \big\{x \in \partial\Omega \,/\, v \cdot n_x = 0\big\}.$$

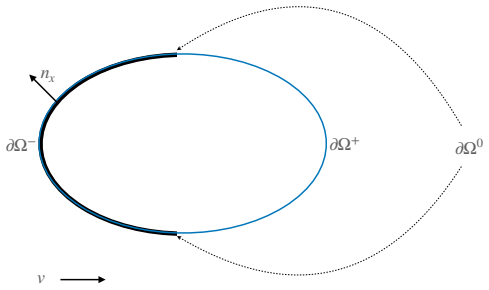

FIGURE 1.

On définit le temps de sortie (rétrograde) de Ω en partant de $x \in \Omega$ à la vitesse v par

$$\tau_x := \inf\big\{t \geq 0 \,/\, x - tv \notin \overline{\Omega}\big\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Notons que si Ω n'est pas convexe, l'application $x \mapsto \tau_x$ n'est pas nécessairement continue (voir la Figure 2).

Lemme 2.2.2. — *Si Ω est convexe, alors l'application $x \mapsto \tau_x$ est de classe C^1 sur $\Omega' := \big\{x \in \Omega \,/\, \tau_x < \infty\big\}$.*

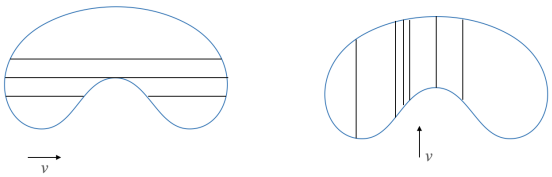

FIGURE 2.

Démonstration. — Soit $x_0 \in \Omega'$ et $x_0^* := x_0 - \tau_{x_0} v$ (voir la Figure 3). Alors $x_0^* \in \partial\Omega$, montrons que $x_0^* \in \partial\Omega^-$. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors $v \cdot n_{x_0^*} \geq 0$ et on a $x_0^* + \mathbb{R}^+ v \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,/\, (y - x_0^*) \cdot n_{x_0^*} \geq 0 \right\}$. Mais $x_0 \in x_0^* + \mathbb{R}^+ v$ alors que $\Omega \subset \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,/\, (y - x_0^*) \cdot n_{x_0^*} < 0 \right\}$ par convexité, d'où la contradiction.

Soit maintenant

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \partial\Omega^- \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^d \\ (y,t) & \mapsto & y + tv\,. \end{array}$$

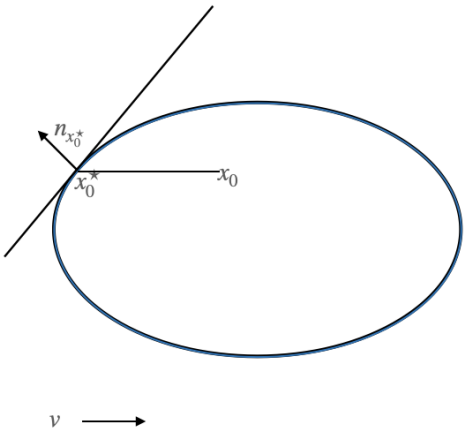

FIGURE 3.

Alors Φ est de classe C^1 et $\Phi(x_0^*, \tau_{x_0}) = x_0$. Montrons que localement Φ est un C^1-difféomorphisme. Soit $(u,s) \in T_{x_0^*}\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Alors $D\Phi(x_0^*, \tau_{x_0}) \cdot (u,s) = u + sv$. Mais $u \cdot n_{x_0^*} = 0$ donc $\{u, v\}$ est libre, donc

$$D\Phi(x_0^*, \tau_{x_0}) \cdot (u,s) = 0 \Rightarrow u = s = 0\,.$$

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale: la différentielle de Φ en (x_0^*, τ_{x_0}) est inversible, donc il existe un voisinage U_0 de (x_0^*, τ_{x_0}) dans $\partial\Omega^- \times \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$ et $\Phi_{|U_0} : U_0 \to B(x_0, \varepsilon)$ soit un C^1-difféomorphisme.

L'application $x \in B(x_0, \varepsilon) \mapsto \tau_x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ est la composée de $\left(\Phi_{|U_0}\right)^{-1}$ avec la projection

$$(y,s) \in \partial\Omega^- \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \mapsto s$$

est donc de classe C^1. □

Démontrons le théorème suivant, qui concerne le cas où $\alpha \equiv 0, S \equiv 0$. L'énoncé général sera donné plus bas sans démonstration.

Théorème 2.2.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord strictement convexe, de classe C^1, avec $d \geq 2$. Soit $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On considère $f_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ et $f_b^- \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \overline{\partial\Omega^-})$, et on suppose que pour tout $y \in \partial\Omega^-$*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_b^-(0,y) & = & f_0(y) \\ \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla_x f_0(y) & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Alors il existe une unique $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \cap C^0(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$ solution de (2.2.1) avec $\alpha \equiv 0, S \equiv 0$, avec $f_{|\partial\Omega^-} = f_b^-$ et $f_{|t=0} = f_0$ et elle est donnée par la formule suivante :

$$\forall x \in \Omega\,, \quad f(t,x) = \mathbb{1}_{t \leq \tau_x} f_0(x - tv) + \mathbb{1}_{t > \tau_x} f_b^-(t - \tau_x, x^*)\,, \quad x^* := x - v\tau_x\,.$$

Démonstration. — Si $t \neq \tau_x$ il s'agit simplement de la méthode des caractéristiques. On note en effet que si $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ vérifie (2.2.1) alors

$$\frac{d}{ds}\big(f(t-s, x-sv)\big) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < s < \min(t, \tau_x)$$

donc l'application $s \mapsto f(t-s, x-sv)$ est constante pour $0 \leq s \leq \min(t, \tau_x)$ et on a

$$f(t,x) = f(0, x-tv) = f_0(x-tv) \quad \forall\, t < \tau_x$$

puisque $x - tv \in \Omega$ si $t < \tau_x$. De même si $t > \tau_x$ alors comme on cherche $f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$ on a

$$\begin{aligned} f(t,x) &= f(t - \tau_x, x - \tau_x v) \\ &= f_b^-(t - \tau_x, x^*)\,. \end{aligned}$$

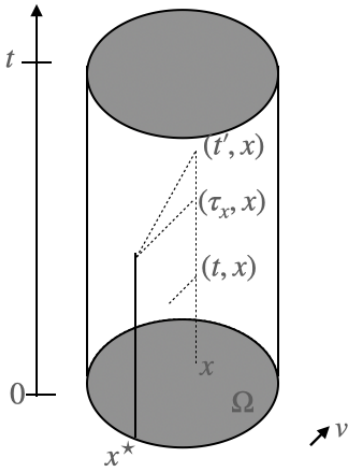

FIGURE 4.

Comme l'application $x \mapsto \tau_x$ est de classe C^1, si l'on définit

$$\begin{aligned} \mathscr{T}^+ &:= \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \,/\, t > \tau_x\big\}\,, \\ \mathscr{T}^- &:= \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \,/\, 0 \leq t < \tau_x\big\}\,, \\ \mathscr{S} &:= \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \,/\, t = \tau_x\big\} \end{aligned}$$

alors

$$f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}) \Longleftrightarrow f \in C^0(\mathscr{S}).$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}) &\Longleftrightarrow \lim_{t \to \tau_x^+} f(t,x) = \lim_{t \to \tau_x^-} f(t,x) \\ &\Longleftrightarrow \lim_{t \to \tau_x^+} f_b^-(t - \tau_x, x^*) = \lim_{t \to \tau_x^-} f_0(x - tv) \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f_b^-(0,y) = f_0(y) \quad \forall y \in \partial\Omega^-.$$

De même en notant $\nabla = (\partial_t, \nabla_x)$,

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \Longleftrightarrow \lim_{t \to \tau_x^+} \nabla f(t,x) = \lim_{t \to \tau_x^-} \nabla f(t,x).$$

D'une part

$$\lim_{t \to \tau_x^-} \nabla f(t,x) = \big(- v \cdot \nabla_x f_0(x^*), \nabla_x f_0(x^*) \big),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \tau_x^+} \nabla f(t,x) &= \big(\partial_t f_b^-(0,x^*), -\partial_t f_b^-(0,x^*) \nabla_x \tau_x + \sum_j \partial_{y_j} f_b^-(0,x^*) \nabla_x x_j^* \big) \\ &= \big(\partial_t f_b^-(0,x^*), -\partial_t f_b^-(0,x^*) \nabla_x \tau_x + \sum_j \partial_{x_j} f_0(x^*) \nabla_x x_j^* \big) \end{aligned}$$

car pour tout $y \in \partial\Omega^-$, $\nabla_y f_b^-(0,y) = \nabla_x f_0(y)$. Mais

$$\partial_{x_i} x_j^* = \delta_{ij} - v_j \partial_{x_i} \tau_x$$

donc

$$\lim_{t \to \tau_x^+} \nabla f(t,x) = \big(\partial_t f_b^-(0,x^*), -\partial_t f_b^-(0,x^*) \nabla_x \tau_x + \nabla_x f_0(x^*) - v \cdot \nabla_x f_0(x^*) \nabla_x \tau_x \big).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \Longleftrightarrow & - v \cdot \nabla_x f_0(x^*) = \partial_t f_b^-(0,x^*) \\ & \text{et} \quad \nabla_x f_0(x^*) = -\partial_t f_b^-(0,x^*) \nabla_x \tau_x + \nabla_x f_0(x^*) - v \cdot \nabla_x f_0(x^*) \nabla_x \tau_x. \end{aligned}$$

Par suite

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \Longleftrightarrow \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla_x f_0(y) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega^-.$$

On a donc bien la relation de compatibilité attendue. On vérifie enfin que la formule fournit une solution dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \Omega \setminus \mathscr{S}$, et comme f est dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ c'est une solution dans $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, qui vérifie bien les conditions initiales et aux limites. Le théorème est démontré. □

Remarque 2.2.4. — *La solution f n'est en général de classe C^1 que sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ et pas sur $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}$. Par exemple prenons $\Omega = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ et $v = (1,0)$ et les données*

$$f_0 \equiv 0, \quad f_b^-(t, \cos\theta, \sin\theta) = \chi(t)\theta,$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est nulle pour $0 \le t \le 1/2$ et vaut identiquement 1 pour $t \ge 1$. On a

$$\partial\Omega^- = \big\{ (\cos\theta, \sin\theta), \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \big\}$$

et $\tau_x < 2$ pour tout $x \in \Omega$. Ces données vérifient bien les conditions de compatibilité imposées par le théorème puisque $f_0 \equiv 0$ et f_b^- est identiquement nulle au voisinage de 0. Mais on peut calculer par la méthode des caractéristiques la solution de (2.2.1) associée (avec $a \equiv S \equiv 0$): on trouve en particulier que

$$f(t,0,y) = \frac{\pi}{2} + \arcsin y, \quad \forall y \in]-1,1[, \quad t > 3.$$

Alors

$$\partial_y f(t,0,y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

donc $y \mapsto f(t,0,y)$ n'est pas de classe C^1 sur $[-1,1]$.

Dans le cas où a et S ne sont pas nulles, on peut montrer le résultat suivant par la même technique.

Théorème 2.2.5. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord strictement convexe, de classe C^1, avec $d \geq 2$. Soit $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et α, S dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$. On considère $f_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ et $f_b^- \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \overline{\partial\Omega^-})$, et on suppose que pour tout $y \in \partial\Omega^-$*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_b^-(0,y) & = & f_0(y) \\ \partial_t f_b^-(0,y) + v \cdot \nabla_x f_0(y) + \alpha(0,y) f_0(y) & = & S(0,y)\,. \end{array} \right.$$

Alors il existe une unique $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \cap C^0(\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega})$ solution de (2.2.1), avec $f_{|\partial\Omega^-} = f_b^-$ et $f_{|t=0} = f_0$ et elle est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} f(t,x) = {} & \mathbb{1}_{t \leq \tau_x} f_0(x - tv) \exp\Big(- \int_0^t \alpha(t', x + (t'-t)v)\, dt' \Big) \\ & + \int_{(t-\tau_x)_+}^t S(t', x + (t'-t)v) \exp\Big(- \int_{t'}^t \alpha(t'', x + (t''-t)v)\, dt'' \Big) dt' \\ & + \mathbb{1}_{t > \tau_x} f_b^-(t - \tau_x, x^*) \exp\Big(- \int_{t-\tau_x}^t \alpha(t', x + (t'-t)v)\, dt' \Big). \end{aligned}$$

2.2.1.3. Solutions généralisées. —

Définition 2.2.6. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1 et α, S continues sur $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}$. On dit qu'une fonction f mesurable est solution généralisée de*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \alpha f = S \tag{2.2.4}$$

si $s \mapsto f(s+t, x+sv)$ est de classe C^1 presque partout en $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ et vérifie en ces points

$$\Big(\frac{d}{ds} + \alpha(t+s, x+sv) \Big) f(t+s, x+sv) = S(t+s, x+sv) \quad si \quad (t+s, x+sv) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \Omega\,.$$

Théorème 2.2.7. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert à bord de classe C^1, soit $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et α, S continues sur $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}$. Soit $f_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $f_b^- \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^-)$. Alors il existe une unique solution généralisée de (2.2.4), telle que*

$$\lim_{t \to 0^+} f(t, x+tv) = f_0(x) \text{ p.p en } x \in \Omega$$

et

$$\lim_{s \to 0^+} f(t+s, y+sv) = f_b^-(t,y) \text{ p.p en } (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^-\,,$$

et elle est donnée par la même formule que dans le cas régulier.

Remarque 2.2.8. — *Notons que f n'est pas prescrite sur le bord $\partial\Omega^0$ alors que certaines trajectoires de vitesse v issues de $\partial\Omega^0$ peuvent rentrer dans Ω (voir la Figure 5). La fonction f n'y est alors pas définie.*

Le lemme suivant est dû à C. Bardos[(3)].

Lemme 2.2.9. — *L'ensemble $A := \Big\{ y + tv \,/\, y \in \partial\Omega^0\,, t \in \mathbb{R} \Big\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$.*

[(3)] 1940

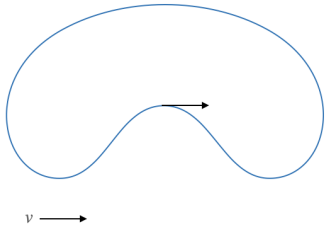

FIGURE 5.

Démonstration. — Soit

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \partial\Omega \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^d \\ (y,t) & \mapsto & y + tv\,. \end{array}$$

On sait que Ψ est de classe C^1 et que $D\Psi(y,t)\cdot(u,s) = u + sv$ pour tout $(u,s) \in T_y\partial\Omega \times \mathbb{R}$. On a $u \cdot n_y = 0$ si $u \in T_y\partial\Omega$ donc

$$y \in \partial\Omega^0 \Longleftrightarrow \Big(D\Psi(y,t)\cdot(u,s)\Big)\cdot n_y = (u+sv)\cdot n_y = 0\,.$$

On en déduit que

$$y \in \partial\Omega^0 \Longrightarrow \operatorname{Rang} D\Psi(y,t) \leq d-1\,.$$

La différentielle de Ψ n'est pas surjective en (y,t), qui est donc un point critique. L'ensemble A est donc l'ensemble des valeurs critiques de Ψ. Comme Ψ est de classe C^1 entre deux variétés de même dimension, le théorème de Sard[4] implique que A est de mesure nulle. □

Démonstration du théorème. — Soient deux ensembles $\mathcal{N}_0 \subset \Omega$ et $\mathcal{N}_b \subset \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^-$ de mesure nulle, tels que f_0 (resp. f_b^-) est définie et localement bornée dans $\Omega \setminus \mathcal{N}_0$ (resp. $\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^- \setminus \mathcal{N}_b$). On considère l'ensemble de mesure nulle

$$\mathcal{N}_d := \Big(\big(\{0\}\times\mathcal{N}_0 \bigcup \mathcal{N}_b \bigcup \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^0\big) + \mathbb{R}^+(1,v)\Big) \bigcap \mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega}\,.$$

La formule pour f définit une fonction sur $\mathbb{R}^+ \times \bar{\Omega} \setminus \mathcal{N}_d$. Ecrite en termes de $f(t+s, x+sv)$ si $x+sv \in \Omega$, on voit que $s \mapsto f(s+t, x+sv)$ est de classe C^1 et df/ds vérifie la bonne formule.

Inversement si f est une solution généralisée alors il existe $\mathcal{N}_f \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega$ de mesure nulle tel que $s \mapsto f(s+t, x+sv)$ est de classe C^1 hors de cet ensemble et df/ds vérifie la bonne formule. Le résultat suit par intégration. □

Remarque 2.2.10. — *On voit facilement que pour tout $T > 0$*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \exp(T\|\alpha_-\|_{L^\infty})\Big(T\|S\|_{L^\infty} + \max\big(\|f_0\|_{L^\infty}, \|f_b^-\|_{L^\infty}\big)\Big)\,, \quad \alpha_- := \max(0,-\alpha)\,.$$

De plus si f_0, f_b^- et S sont positives presque partout, alors f l'est aussi.

[4] Si $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^r et $r > \max(0, n-m)$, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est négligeable pour la mesure de Lebesgue

2.2.2. Transport à coefficients variables. — On suppose que le champ de vecteurs b est de classe C^1 et qu'il vérifie

$$\forall T>0\,,\quad \exists C_T>0\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}^d\,,\quad \forall t\in[0,T]\,,\quad |b(t,x)|\le C_T\langle x\rangle\,. \tag{2.2.5}$$

Sans perte de généralité on peut supposer $T\mapsto C_T$ croissante. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation différentielle

$$\dot X(t,x)=b\big(t,X(t,x)\big)\,,\quad X(0,x)=x$$

a une unique solution, globale en temps grâce à l'hypothèse (2.2.5) de croissance sur b : on a en effet

$$X(t,x)=x+\int_0^t b\big(t',X('t,x)\big)\,dt'$$

et le résultat suit par le lemme de Gronwall puisqu'alors

$$\big|X(t,x)\big|\le|x|+C_t\int_0^t\langle|X(t',x)|\rangle\,dt'\,.$$

En outre l'application

$$x\in\mathbb{R}^d\mapsto X(t,x)$$

est un C^1-difféomorphisme. Les solutions de cette équation différentielle sont appellées, comme au paragraphe précédent, les *caractéristiques* de (2.2.2) et (2.2.3).

2.2.2.1. Résolution, cas fort. —

Théorème 2.2.11. — *On suppose que b est de classe C^1 et qu'il vérifie (2.2.5). Soit $f_0\in C^1(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $f\in C^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ de (2.2.2) telle que $f(0,x)=f_0(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. Elle est constante le long des caractéristiques*

$$f\big(t,X(t,x)\big)=f_0(x)\,,\quad \forall t\ge0\quad\forall x\in\mathbb{R}^d\,.$$

Démonstration. — La fonction $f\in C^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ est solution de (2.2.2) si et seulement si pour tout $t\ge0, x\in\mathbb{R}^d$

$$\partial_t f(t,x)+b(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x)=0\,,\quad f(0,x)=f_0(x)\,.$$

Ceci est équivalent à ce que pour tout $t\ge0, x\in\mathbb{R}^d$

$$\partial_t f\big(t,X(t,x)\big)=0\,,\quad f\big(0,X(0,x)\big)=f_0(x)$$

ou encore

$$f\big(t,X(t,x)\big)=f_0(x)\,,\quad \forall t\ge0\quad\forall x\in\mathbb{R}^d\,.$$

Comme $x\in\mathbb{R}^d\mapsto X(t,x)\in\mathbb{R}^d$ est un C^1-difféomorphisme, ceci définit bien une solution unique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. □

Remarque 2.2.12. — *En supposant pour simplifier que b est bornée, on voit que $f(t,x)$ ne dépend que des valeurs prises par $f_0(y)$ pour $|x-y|\le\|b\|_{L^\infty}t$. Autrement dit*

$$Supp\, f_0\subset B_R\Longrightarrow Supp\, f(t)\subset B_{R+\|b\|_{L^\infty}t}\,.$$

On parle de vitesse finie de propagation.

On a aussi le principe du maximum

$$\inf f_0\le f(t,x)\le\sup f_0\,.$$

2.2.2.2. Résolution, cas conservatif. — On garde les mêmes hypothèses qu'au-dessus sur b et on suppose de plus que b est dans $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$. On pose

$$J(t,x) := \exp \int_0^t \operatorname{div} b\big(t', X(t',x)\big)\, dt'$$

de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\dot{J}(t,x) = \operatorname{div} b\big(t, X(t,x)\big) J(t,x), \quad J(0,x) = 1.$$

Théorème 2.2.13. — *On suppose que b est de classe $C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ et vérifie (2.2.5). Soit $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $f \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ de (2.2.3) telle que $f(0,x) = f_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Elle est donnée par*

$$f\big(t, X(t,x)\big) J(t,x) = f_0(x), \quad \forall\, t \geq 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration. — La démonstration repose sur le même calcul que le théorème précédent : on écrit

$$\begin{aligned}
&\partial_t f(t,x) + \operatorname{div}\big(f(t,x) b(t,x)\big) = 0 \\
\iff &\partial_t f(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) + \operatorname{div} b(t,x) f(t,x) = 0 \\
\iff &\frac{d}{dt}\Big(f\big(t, X(t,x)\big)\Big) + \operatorname{div} b\big(t, X(t,x)\big) f\big(t, X(t,x)\big) = 0 \\
\iff &\frac{d}{dt}\Big(f\big(t, X(t,x)\big) J(t,x)\Big) = 0
\end{aligned}$$

et le résultat suit. □

Proposition 2.2.14. — *En notant $Jac X(t,x)$ le déterminant jacobien de $X(t,x)$ par rapport à x*

$$Jac\, X(t,x) := \begin{vmatrix} \partial_{x_1} X^1(t,x) & \dots & \partial_{x_d} X^1(t,x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1} X^d(t,x) & \dots & \partial_{x_d} X^d(t,x) \end{vmatrix}$$

on a

$$J(t,x) = Jac\, X(t,x).$$

Démonstration. — Pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int \phi\big(X(t,x)\big) \operatorname{Jac} X(t,x)\, dx = \int \phi(y)\, dy$$

et en dérivant cette identité par rapport à t on trouve

$$\int b\big(t, X(t,x)\big) \cdot \nabla\phi\big(X(t,x)\big) \operatorname{Jac} X(t,x)\, dx + \int \phi\big(X(t,x)\big) \partial_t \operatorname{Jac} X(t,x)\, dx = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int b\big(t, X(t,x)\big) \cdot \nabla\phi\big(X(t,x)\big) \operatorname{Jac} X(t,x)\, dy &= \int b(t,y) \cdot \nabla\phi(y)\, dy \\
&= -\int \operatorname{div} b(t,y) \phi(y)\, dy \\
&= -\int \operatorname{div} b\big(t, X(t,x)\big) \phi\big(X(t,x)\big) \operatorname{Jac} X(t,x)\, dx.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\partial_t \operatorname{Jac} X(t,x) = \operatorname{div} b\big(t, X(t,x)\big) \operatorname{Jac} X(t,x)$$

et comme $\operatorname{Jac} X(0,x) = 1$ le résultat suit par unicité. □

Remarque 2.2.15. — *En supposant que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\int f(t,x)\,dx = \int f_0(x)\,dx\,.$$

On parle de conservation de la masse.

On a aussi

$$\int |f(t,x)|\,dx = \int |f_0(x)|\,dx\,.$$

2.3. Exercices

Exercice 7 : méthode des caractéristiques

1. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ et $f_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t,x)$

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f = 0\,, \qquad f(0,x) = f_0(x)\,,$$

admet une unique solution $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, donnée par la formule

$$f(t,x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,.$$

2. [Lemme de Gronwall] Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$\phi(t) \leq A + B\int_0^t \phi(s)\,ds\,.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$.

3. Soit $T > 0$ et $V\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1,\dots,d$ et vérifiant les hypothèses suivantes

(**H1**) $$V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0,T]\times\mathbb{R}^d\,,$$

et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$,

(**H2**) $$|V(t,x)| \leq \kappa(1+|x|)\,.$$

On considère maintenant le problème à coefficients variables

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) = 0\,, \quad f(0,x) = f_0(x)\,,$$

pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants. On dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma\colon s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s,\gamma(s)), \qquad \gamma(t) = x\,.$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.

Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de

$$\partial_s X(s,t,x) = V(s,X(s,t,x))\,, \qquad X(t,t,x) = x\,.$$

L'application $X : [0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V\cdot\nabla_x$.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2\partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse (**H2**) n'est pas vérifiée).

5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)\,.$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x)$ et $\partial_{x_j}\partial_s X(s,t,x)$ existent pour tous $(s,t,x) \in]0,T[\times]0,T[\times\mathbb{R}^d$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^d$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s,t,x) = \partial_{x_j}\partial_s X(s,t,x)\,,$$

pour tout $(s,t,x) \in [0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

7. Montrer que pour tout $(s,t) \in [0,T]\times[0,T]$ l'application

$$X(s,t,\cdot)\colon x \mapsto X(s,t,x)$$

est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même.

8. Montrer que $X \in \mathscr{C}^1([0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$.

9. Montrer que

$$\partial_t X(0,t,x) + \sum_{j=0}^{d} V_j(t,x)\partial_{x_j} X(0,t,x) = 0\,,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$.

10. Soit $f_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t,x) = f_0(X(0,t,x))$$

est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ et vérifie

$$\partial_t f(t,x) + V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x)\,.$$

Exercice 8 : quelques cas plus ou moins linéaires

1. Soit $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver une solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u + x_1\partial_{x_2} u = u & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(1,\cdot) = h & \text{sur} \quad \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

2. On considère $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, v dans $\mathbb{R}$, et a, S dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$. Résoudre (existence et unicité) l'équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + v\cdot\nabla_x u(t,x) + a(t,x)u(t,x) = S(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Pour $\alpha > 0$, rechercher des solutions de l'équation semi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \alpha\nabla_x u(t,x) = u^2(t,x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = \cos(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 9 : équation de Burgers

On considère l'équation de Burgers en dimension 1, vue comme une équation de transport quasi-linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 \,. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. On va montrer l'existence et l'unicité d'une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ où

$$T = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbb{R}}(\max(0,-u_0'(z))}$$

avec la convention $1/0 = +\infty$.

a) Pour $s \geq 0$, on définit ϕ_s par

$$\phi_s(z) = z + s u_0(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que pour tout $s \in [0,T[$, ϕ_s est bijective de classe $\mathscr{C}^1$ ainsi que sa réciproque.

b) Montrer que l'application Φ définie par

$$\Phi(t,x) = \phi_t^{-1}(x), \quad \forall\,(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ et conclure.

[Indication : on pourra introduire la fonction F définie par $F(t,x,z) = z + t u_0(z) - x$.]

2. On suppose que u est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$. Appliquer la méthode des caractéristiques et prouver que pour tout $0 \leq s < T$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$u(s, z + s u(0,z)) = u(0,z)\,.$$

3. En déduire l'unicité de la solution précédente.

4. On définit la notion de solution faible : on dira que u bornée localement sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ est une solution faible de l'équation si pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left[u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\partial_x\varphi(t,x) \right] dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0\,.$$

On suppose maintenant que $u_0 = 0$ et on définit pour $p > 0$,

$$\forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}, \quad v_p(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -pt, \\ -2p & \text{si} \quad -pt < x \leq 0, \\ 2p & \text{si} \quad 0 < x \leq pt \\ 0 & \text{si} \quad x > pt\,. \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $p > 0$, v_p est une solution faible du problème.

Exercice 10 : équation eikonale

On note $\mathbb{S} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On considère le problème complètement non-linéaire :

$$\begin{cases} (\partial_{x_1} u)^2 + (\partial_{x_2} u)^2 = 1 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{S}\,. \end{cases}$$

Appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation et en déduire deux solutions possibles.

Exercice 11 : équation de transport avec donnée initiale non régulière

On s'intéresse au problème de transport linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + c\cdot\nabla_x u(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases},$$

où c est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ constant. Lorsque $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$, la solution (au sens classique) de ce problème de transport est donnée par $u(t,x) = u_0(x-ct)$. Dans la suite, on supposera u_0 seulement localement bornée sur $\mathbb{R}^d$.

1. On dira qu'une fonction u bornée localement sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^d$ est une solution faible du problème si pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)\left[\partial_t\varphi(t,x) + c\cdot\nabla_x\varphi(t,x)\right] dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0\,.$$

Montrer qu'une solution classique (lorsque $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$) est une solution faible.

2. Montrer l'unicité (au sens presque partout) d'une solution faible.

[Indication : on s'intéressera à la solution $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ du problème de transport suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\varphi(t,x) + c\cdot\nabla_x\varphi(t,x) = \psi(t,x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_*^+ \\ \varphi(\cdot,0) = \varphi_0\,, \end{cases}$$

où $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ quelconque et φ_0 choisi convenablement.]

3. Dans le cas où $n = 1$, $c > 0$ et $u_0(x) = H(x)$ la fonction d'Heaviside, donner explicitement l'unique solution faible du problème.

Exercice 12 : équation de transport à donnée initiale peu régulière

Soit b un champ de vecteurs dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall\, T>0\,,\ \exists K_T>0\,,\ \forall\, t\in[0,T],\ \forall x\in\mathbb{R}^d\,,\ \|b(t,x)\| \le K_T(1+\|x\|)\,.$$

Pour u_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on va montrer qu'il existe une unique solution faible $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$ de $\partial_t u + b\cdot\nabla u = 0$, au sens où pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\left[\partial_t\varphi + \operatorname{div}(b\varphi)\right](t,x)dxdt = -\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx\,. \tag{2.3.1}$$

Existence :

1. Justifier qu'il existe une suite de fonctions $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|u_0^n\|_\infty \le \|u_0\|_\infty \quad \forall n, \quad u_0^n \to u_0 \quad \text{dans } L^1(B_R)\,,\ \forall R>0\,.$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère la solution $u^n \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ de $\partial_t u^n + b\cdot\nabla u^n = 0$ avec $u^n_{|t=0} = u_0^n$. Montrer que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\,.$$

3. On note $t \mapsto X(t,y)$ le flot associé au champ b et à la condition initiale $X(0,y) = y$. Étant donné $R, T > 0$, justifier l'existence de $M > 0$ telle que pour tout $0 \le t \le T$, et $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B_R} |u^n(t,x) - u^p(t,x)| dx \le M \int_{X(t)^{-1}(B_R)} |u^n(t, X(t;y)) - u^p(t, X(t;y))|\, dy .$$

En déduire que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}([0,T], L^1(B_R))$.

4. Montrer qu'il existe une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$ telle que

$$u^n \rightharpoonup^* u \quad w^* L^\infty \quad \text{(à une sous-suite près)},$$
$$u^n \to u \quad \text{dans } \mathscr{C}([0,T], L^1(B_R)) \quad \forall T, R > 0 .$$

5. Montrer que u est solution faible du problème.

Unicité :

6. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))$ une solution faible telle que $u_0 = 0$, et soit $T > 0$. Soit $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\text{Supp}\, \phi(t) \subset B_R \quad \forall t \in [0, T+1] . \tag{2.3.2}$$

Soit $0 < \epsilon < 1$ quelconque, $T > 0$. On considère une famille $(\theta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\theta_\epsilon(t) = 1 \quad \text{si } t \in [0,T], \quad \theta_\epsilon(t) = 0 \quad \text{si } t \ge T + \epsilon,\ 0 \le \theta_\epsilon \le 1,\ \theta_\epsilon' \le 0 .$$

Justifier que l'on peut prendre $\varphi(t,x) = \theta_\epsilon(t)\phi(t,x)$ comme fonction test dans (2.3.1).

7. Montrer que lorsque $\epsilon \to 0$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\theta_\epsilon(t) \left[\partial_t \phi + \text{div}\,(b\phi)\right](t,x)\, dt\, dx \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) \left[\partial_t \phi + \text{div}\,(b\phi)\right](t,x)\, dt\, dx .$$

8. On pose

$$\omega(\epsilon) := \sup_{T \le t \le T+\epsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \left| u(t,x)\phi(t,x) - u(T,x)\phi(T,x) \right| dx .$$

Montrer que $\lim_{\epsilon\to 0} \omega(\epsilon) = 0$.

9. Montrer que

$$\left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\phi(t,x)\theta_\epsilon'(t)\, dt dx + \int_{\mathbb{R}^d} u(T,x)\phi(T,x)\, dx \right| \le \omega(\epsilon) .$$

10. En passant à la limite quand $\epsilon \to 0$, montrer que pour tout $T > 0$ et pour toute fonction $\phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ vérifiant (2.3.2)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) \left[\mathbf{p}_t \phi + \text{div}\,(b\phi)\right](t,x)\, d\,t\, d\,x = \int_{\mathbb{R}^d} u(T,x)\phi(T,x)\, dx .$$

11. Conclure en montrant que pour tout $\psi \in \mathscr{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$, $T > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(T,x)\psi(x)\, dx = 0 .$$

12. (Propagation des singularités) On suppose que $u_0 = \mathbf{1}_A$ pour un certain ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable $A(t)$ tel que $u(t) = \mathbf{1}_{A(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, et caractériser $A(t)$. Les discontinuités sont donc propagées par l'équation.

Exercice 13 : lois de conservation scalaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x (f \circ u)(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 \,. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

1. Montrer que si u est une solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, alors

$$\forall\, t \geq 0\,, \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\,, \quad u\big(t, x_0 + f'(u_0(x_0))\, t\big) = u_0(x_0)\,.$$

2. Montrer que si f' n'est pas constante, alors il existe $u_0 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle qu'il n'y a pas de solution $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ de cette équation.

3. On suppose que $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Montrer que l'équation (2.3.3) admet une unique solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, T_0[\times \mathbb{R}$ où

$$T_0 = \frac{1}{\sup_{z \in \mathbb{R}} (\max(0, -(f' \circ u_0)'(z))}\,.$$

4. On suppose maintenant que f est ce classe $\mathscr{C}^3$, que $u_0 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $(f' \circ u_0)'(x_0) < 0$.

a) Montrer que (2.3.3) admet une unique solution u de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, T_0[\times \mathbb{R}$.

b) Montre que si v est une solution de classe $\mathscr{C}^2$ de (2.3.3) sur $[0, T_1[\times \mathbb{R}$ avec $T_1 > 0$ avec donnée initiale u_0, alors on a $T_1 \leq T_0$ et $v = u$ sur $[0, T_1[\times \mathbb{R}$.

[Indication : on pourra introduire w définie par $w(t,x) = a'(v(t,x))(\partial_x v)(t,x)$.]

c) Montrer que

$$\lim_{t \to T_0} \sup_{y \in \mathbb{R}} |\partial_x u(t,y)| = +\infty\,.$$

[On a montré que la condition $(f' \circ u_0)' \geq 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir existence globale en temps.]

Exercice 14 : ondes de choc et de détente

On s'intéresse à des données initiales pour (2.3.3) du type

$$u_0 = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0\,, \\ u_d & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy associé à de telles données initiales est appelé «problème de Riemann ».

1. Soit $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que le Dirac satisfait dans $\delta_{\frac{x}{\sigma}}(t) = |\sigma| \delta_{\sigma t}(x)$ au sens des distributions dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. On suppose $u_g \neq u_d$, et on pose (relation de Rankine-Hugoniot)

$$\sigma = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}$$

On définit $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ par $u(t,x) = u_0(x - \sigma t)$. Montrer que u est solution de (2.3.3) au sens des distributions. Une telle solution est appelée «onde de choc » : σ est la vitesse du choc.

3. On suppose que f' est strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$. On définit la fonction $U \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$:

$$U(\xi) = \begin{cases} u_g & \text{si } \xi \le f'(u_g), \\ (f')^{-1}(\xi) & \text{si } f'(u_g) \le \xi \le f'(u_d), \\ u_d & \text{si } \xi \ge f'(u_d). \end{cases}$$

On pose $u(t,x) = U(x/t)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Montrer que u est solution de (2.3.3) au sens des distributions : une telle solution s'appelle «onde de raréfaction ».

Exercice 15 : condition de Rankine-Hugoniot

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\sigma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation

$$\partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big) = 0\,.$$

On pose

$$\Omega_\pm := \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \pm\big(x - \sigma(t)\big) > 0\Big\}\,.$$

On suppose qu'il existe $u_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$, avec $U_\pm$ un voisinage de $\overline{\Omega}_\pm$, dans $\mathscr{C}^1$, solutions de l'équation sur $U_\pm$. On suppose que $u_\pm$ et $\partial_x u_\pm$ sont bornées, et on définit

$$u := u_+ \mathbf{1}_{U_+} + u_- \mathbf{1}_{U_-}\,.$$

1. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, calculer la dérivée par rapport à t de

$$I_-(t) := \int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,dx \quad \text{et} \quad I_+(t) := \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,dx\,.$$

2. Montrer que u est solution de l'équation dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sigma'(t)\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big) - u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big) = f\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big)\Big) - f\Big(u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big).$$

3. On suppose que $f(u) = u^2/2$ (l'équation de Burgers). Calculer deux solutions «simples » $u_\pm$ sur $\mathbb{R}$ avec $u_-(0,x) = 2$ et $u_+(0,x) = 1$ et en déduire une solution de l'équation de Burgers telle que $u(0,x) = 2$ si $x < 0$ et $u(0,x) = 1$ si $x > 0$.

2.4. Solutions de quelques exercices

Méthode des caractéristiques

4. On introduit une fonction $t \mapsto X(t)$ telle que, si f est solution de $\partial_t f + v \cdot \nabla f = 0$ alors $f(t, X(t))$ est une fonction constante. On définit $X(t) = x + vt$ avec $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Alors,

$$\frac{d}{dt} f(t, x + vt) = (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t, x + vt).$$

Donc si f est solution du problème de Cauchy alors

$$f(t, X(t)) = f(t, x + vt) = f(0, X(0)) = f(0, x) = f_0(x)$$

d'où $f(t,x) = f_0(x - vt)$.

Réciproquement, on vérifie directement que $(t,x) \mapsto f_0(x - tv)$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ qui est solution du problème de Cauchy.

5. Introduisons pour $t \geq 0$,

$$w(t) = A + B\int_0^t \phi(s)\,ds.$$

Par hypothèse, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $w'(t) = B\phi(t) \leq Bw(t)$. Donc

$$\left(w(t)e^{-Bt}\right)' \leq 0, \quad \forall\, t \geq 0$$

et on en déduit le résultat voulu en intégrant cette inégalité.

6. Soient $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ et γ la solution maximale associée au problème de Cauchy considéré. On note $I \subset [0,T]$ l'intervalle de définition de γ qui est un voisinage de t. En utilisant l'hypothèse (**H2**), on a pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq |x| + \left|\int_t^s |V(\tau,\gamma(\tau))|\,d\tau\right| \leq |x| + \kappa T + \kappa\left|\int_t^s |\gamma(\tau)|\,d\tau\right|.$$

D'après la question 2., on obtient pour tout $s \in I$:

$$|\gamma(s)| \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa|t-s|} \leq (|x| + \kappa T)e^{\kappa T}.$$

Supposons alors que $I \neq [0,T]$. Alors, d'après le lemme des bouts, on aurait explosion de γ à l'une (au moins) des extrémités de I i.e.

$$|\gamma(s)| \to +\infty, \quad \text{pour} \quad s \to \inf(I)^+ \quad \text{ou} \quad s \to \sup(I)^-.$$

Or ceci est exclu d'après l'estimation obtenue sur $\gamma(s)$ pour tout $s \in I$.

7. On résout l'équation et on obtient :

$$y(s) = \frac{x}{1-(s-t)x}$$

qui est bien définie pour $s < t + 1/x$ si $x > 0$ et $s > t + 1/x$ si $x < 0$.

D'autre part, le flot caractéristique X de $\partial_t + x^2\partial_x$ vérifie

$$\partial_s X(s,t,x) = X(s,t,x)^2, \quad X(t,t,x) = x.$$

On a donc

$$X(s,t,x) = \frac{x}{1-(s-t)x}$$

et donc pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ ne peut être définie sur aucun voisinage de (t,x) de la forme $[a,b]\times\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

8. Pour tous t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, les applications

$$t_3 \mapsto X(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x)) \quad \text{et} \quad t_3 \mapsto X(t_3,t_1,x)$$

sont deux courbes intégrales de V passant par $X(t_2,t_1,x)$ au temps t_2. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'unicité nous donne qu'elles coïncident sur tout leur intervalle maximal de définition c'est-à-dire pour tout $t_3 \in [0,T]$.

9. On utilise le théorème de dérivation des solutions d'équations différentielles par rapport à la donnée initiale qui nous dit que pout $t \in [0,T]$ fixé, l'application $(s,x) \mapsto X(s,t,x)$ admet une dérivée partielle $\partial_{x_j} X(s,t,x)$ pour tous $(s,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d$ et $j = 1,\ldots,n$. De plus, cette dérivée partielle est l'unique solution définie pour $s \in [0,T]$ de l'équation différentielle

$$\partial_s\partial_{x_j} X(s,t,x) = \nabla_x V(s,X(s,t,x))\partial_{x_j} X(s,t,x), \quad \partial_{x_j} X(t,t,x) = e_j$$

où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Et on a également que l'application $(s,x) \mapsto \partial_{x_j} X(s,t,x)$ est continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

En combinant ceci avec l'équation différentielle écrite ci-dessus, on en déduit que pour tout $j = 1, ..., n$, la dérivée partielle seconde $(s, x) \mapsto \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$.

D'après l'hypothèse (**H1**), $V(s, \cdot)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. L'application $X(s, t, \cdot)$ l'est aussi (on a vu qu'elle admet des dérivées partielles $\partial_{x_j} X(s, t, \cdot)$ continues sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $j = 1, ..., n$) donc dans l'équation

$$\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x)), \quad (s, x) \in]0, T[\times\mathbb{R}^d,$$

le membre de droite est de classe $\mathscr{C}^1$ en x et on obtient pour tout $j = 1, ..., n$ et tout $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$:

$$\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x) = \nabla_x V(s, X(s, t, x)) \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x).$$

10. On a vu dans la question précédente que pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$, l'application $X(s, t, \cdot)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$. D'autre part, pour $(s, t) \in [0, T]^2$, d'après la question 5. appliquée avec $t_3 = t_1 = s$ et $t_2 = t$ puis avec $t_3 = t_1 = t$ et $t_2 = s$, on a les relations suivantes :

$$X(s, t, X(t, s, x)) = X(s, s, x) = x = X(t, t, x) = X(t, s, X(s, t, x)).$$

On en déduit que $X(s, t, \cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ d'inverse $X(s, t, \cdot)^{-1} = X(t, s, \cdot)$. La bijection $X(s, t, \cdot)$ et son inverse étant de classe $\mathscr{C}^1$, on peut conclure.

11. On a vu dans la question 6. que l'application $(s, t, x) \mapsto X(s, t, x)$ définie sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ admet des dérivées partielles continues par rapport à la variable x. On a également vu qu'elle est $\mathscr{C}^1$ par rapport à la variable s puisque par définition $\partial_s X(s, t, x) = V(s, X(s, t, x))$. Il reste à voir qu'elle admet aussi une dérivée partielle continue par rapport à t.

On fixe $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ alors $X(s, t, x)$ est l'unique solution de

$$F(t, y(t)) = 0 \quad \text{où} \quad F(t, y) = X(t, s, y) - x.$$

L'application $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in [0, T]$, la matrice $\nabla_y F(t, y) = \nabla_x X(t, s, y)$ est inversible. En effet, pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, le déterminant $J(t, s, x) = \det(\nabla_x X(t, s, x))$ est non nul car c'est le déterminant jacobien du difféomorphisme $X(s, t, \cdot)$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui nous dit en particulier que la fonction $t \mapsto y(t)$ est dérivable et vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= -\nabla_y F(t, y(t))^{-1} \partial_t F(t, y(t)) \\ &= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, X(t, s, X(s, t, x))) \\ &= -\nabla_x X(t, s, X(s, t, x))^{-1} V(t, x). \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que l'application $\partial_t X$ est continue sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

En conclusion, l'application X admet des dérivées partielles continues en tout point sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$, elle y est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

12. On utilise l'égalité prouvée à la question 5. et on la dérive par rapport à la variable t_2 (le flot X est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$) pour obtenir :

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \, \partial_s X_j(t_2, t_1, x) = 0$$

i.e.

$$\partial_t X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \, V_j(t_2, X(t_2, t_1, x)) = 0.$$

On conclut en posant $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = 0$.

13. Le fait que f soit $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ provient du fait que f_0 est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$ et que l'application $(t,x)\mapsto X(0,t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ d'après la question 7.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, $f(0,x)=f_0(X(0,0,x))=f_0(x)$.

Enfin, on a pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$:

$$\partial_t f(t,x)=\nabla f_0(X(0,t,x))\cdot\partial_t X(0,t,x)$$

et

$$\partial_{x_j} f(t,x)=\nabla f_0(X(0,t,x))\cdot\partial_{x_j} X(0,t,x)$$

ce qui implique que

$$\partial_t f(t,x)+V(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x)=\nabla f_0(X(0,t,x))\cdot\left(\partial_t X(0,t,x)+\sum_{j=1}^n V_j(t,x)\,\partial_{x_j}X(0,t,x)\right)=0$$

d'après la question précédente.

Lois de conservation scalaire (premières questions)

On considère l'équation

$$\partial_t u+\partial_x\big(f(u)\big),\quad u(0,x)=u_0(x)\quad\text{dans}\quad\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$$

où $f\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

1. Montrons que si u est une solution dans $C^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R};\mathbb{R})$

   $$\forall\, t\geq 0,\quad \forall\, x_0\in\mathbb{R},\quad u\big(t,x_0+f'(u_0(x_0))\,t\big)=u_0(x_0)\,.$$

   Soit $\alpha(t,x)=f'\big(u(t,x)\big)$, localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale, définie sur $[0,T_{\max}[$ à

   $$x'(t)=\alpha(t,x(t)),\quad x(0)=x_0\,.$$

   Alors on vérifie facilement que $u(t,x(t))=u_0(x_0)$ pour tout $t\in[0,T_{\max}[$. Par ailleurs

   $$x'(t)=f'\big(u_0(x_0)\big)$$

   donc

   $$x(t)=f'\big(u_0(x_0)\big)\,t+x_0$$

   donc $T_{\max}=\infty$.
2. Si f' n'est pas constante, alors il existe v_0,v_1 tels que $f'(v_0)>f'(v_1)$, et on construit $u_0\in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0)=v_0$ et $u_0(x_1)=v_1$ avec $x_0<x_1$. Si $u\in C^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ est solution avec cette donnée initiale alors par la question précédente

   $$u\big(t,x_0+f'\big(u_0(x_0)\big)t\big)=u_0(x_0)=v_0\quad\text{et}\quad u\big(t,x_1+f'\big(u_0(x_1)\big)t\big)=u_0(x_1)=v_1\,.$$

   Soit $T:=\frac{x_1-x_0}{f'(v_0)-f'(v_1)}$ alors en posant $\bar{x}:=x_0+f'(v_0)T=x_1+f'(v_1)T$

   $$u(T,\bar{x})=u_0(x_0)=v_0=u_0(x_1)=v_1$$

   ce qui est impossible.

Condition de Rankine-Hugoniot

Soit $f\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\sigma\in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation

$$\partial_t u+\partial_x\big(f(u)\big)=0\,.$$

On pose

$$\Omega_\pm := \Big\{(t,x)\in\mathbb{R}^2,\quad \pm\big(x-\sigma(t)\big)>0\Big\}.$$

On suppose qu'il existe $u_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$, avec $U_\pm$ un voisinage de $\overline{\Omega}_\pm$, dans C^1, solutions de l'équation sur $U_\pm$. On suppose que $u_\pm$ et $\partial_x u_\pm$ sont bornées, et on définit

$$u := u_+ \mathbf{1}_{U_+} + u_- \mathbf{1}_{U_-}.$$

1. Soit $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, calculons la dérivée par rapport à t de

$$I_-(t) := \int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,dx \quad\text{et}\quad I_+(t) := \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,dx.$$

On remarque que u et $f(u)$ sont des fonctions bornées. En particulier les intégrales sont bien définies. Soit

$$G_-(t,y) := \int_{-\infty}^{y} u_-(t,x)\phi(t,x)\,dx,\quad (t,y)\in U_-.$$

Alors $\partial_y G_-$ existe sur U_- et est continue: on a $\partial_y G_-(t,y) = u_-(t,y)\phi(t,y)$. En outre

$$\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big) = -f'\big(u_-(t,x)\big)\partial_x u_-(t,x)\phi(t,x) + u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)$$

vérifie

$$\Big|\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\Big| \le \Big(\|f'\|_{L^\infty(-\|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)},\|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)})}\|\partial_x u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)} + \|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)}\Big)\frac{C(\phi)}{1+|x|^2}.$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour obtenir

$$\partial_t G_-(t,y) = \int_{-\infty}^{y}\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\,dx$$

donc G_- est de classe C^1 et on a finalement

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,dx = \sigma'(t)u_-\big(t,\sigma(t)\big)\phi\big(t,\sigma(t)\big) + \int_{-\infty}^{\sigma(t)}\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\,dx$$

et de même

$$\frac{d}{dt}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,dx = -\sigma'(t)u_+\big(t,\sigma(t)\big)\phi\big(t,\sigma(t)\big) + \int_{\sigma(t)}^{\infty}\partial_t\big(u_+(t,x)\phi(t,x)\big)\,dx.$$

2. Montrons que u est solution de l'équation dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sigma'(t)\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big) - u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big) = f\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big)\Big) - f\Big(u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big).$$

Soit $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, et supposons la condition de Rankine-Hugoniot satisfaite. Alors par Fubini

$$\begin{aligned}\langle\partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big),\phi\rangle = &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,dxdt\\ &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} f(u_-(t,x))\partial_x\phi(t,x)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} f(u_+(t,x))\partial_x\phi(t,x)\,dxdt.\end{aligned}$$

En intégrant par parties les deux dernières intégrales et en utilisant l'équation on trouve

$$\begin{aligned}\langle\partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big),\phi\rangle = &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,dxdt\\ &+\int_{\mathbb{R}}\Big(f(u_+(t,\sigma(t))) - f(u_-(t,\sigma(t)))\Big)\phi(t,\sigma(t))\,dt\\ &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)}\partial_t u_-(t,x)\phi(t,x)\,dxdt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty}\partial_t u_+(t,x)\phi(t,x)\,dxdt.\end{aligned}$$

On regroupe les termes de la première et dernière ligne et on utilise la question précédente. Comme en outre

$$\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,dx + \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,dx \to 0\,, \quad t\to\infty\,,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big),\phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \Big(\sigma'(t)\big(u_+\big(t,\sigma(t)\big) - u_-(t,\sigma(t))\big)\\ + f\big(u_+\big(t,\sigma(t)\big)\big) - f\big(u_-\big(t,\sigma(t)\big)\big)\Big)\phi\big(t,\sigma(t)\big)\,dt\end{aligned}$$

et donc si la condition de Rankine-Hugoniot est vérifiée alors $\langle \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big),\phi\rangle = 0$.

Inversement considérons une fonction $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, positive, à support dans $[-1,1]^2$ et strictement positive en 0. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\phi_\epsilon(t,x) := \frac{1}{\epsilon}\chi\Big(\frac{(t_0,\sigma(t_0)) - (t,x)}{\epsilon}\Big).$$

Si u vérifie l'équation et si on pose

$$h(t) := f\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big)\Big) - f\Big(u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big) - \sigma'(t)\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big) - u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big)$$

alors on a, par le calcul ci-dessus,

$$0 = \langle \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big),\phi_\epsilon\rangle = \int_{-1}^{1} h(t_0-\epsilon\tau)\chi(\tau, \frac{\sigma(t_0)-\sigma(t_0-\epsilon\tau)}{\epsilon})\,d\tau\,.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on trouve

$$0 = h(t_0)\int_{-1}^{1} \chi(\tau,\sigma'(t_0)\tau)\,d\tau$$

donc $h(t_0) = 0$.

3. On suppose que $f(u) = u^2/2$ (l'équation de Burgers). Clairement $u_- = 2$ et $u_+ = 1$ conviennent avec $U_\pm = \mathbb{R}^2$. La condition de Rankine-Hugoniot s'écrit

$$\sigma'(t)(1-2) = (1-4)/2$$

donc $\sigma(t) = 3t/2 + C$. La fonction $x \mapsto u(0,x)$ est discontinue en 0 donc on prend $C = 0$ et

$$2\mathbf{1}_{x<3t/2} + \mathbf{1}_{x>3t/2}$$

convient.

CHAPITRE 3

Équations elliptiques et paraboliques

Sommaire

3.1. L'équation de Laplace-Poisson **65**
3.1.1. Théorème de la moyenne 66
3.1.2. Contrôle des dérivées 68
3.1.3. Principe du maximum 68
3.1.4. Au sujet de l'existence de solutions 69
3.2. EDP elliptiques : résolution par Lax-Milgram **70**
3.2.1. Théorème de Lax-Milgram 70
3.2.2. Régularité elliptique pour le problème de Dirichlet 71
3.2.2.1. Existence et unicité de solutions 72
3.2.2.2. Régularité elliptique 73
3.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier **75**
3.4. EDP paraboliques dans un domaine borné: résolution par la méthode de Galerkin **77**
3.4.1. Projection sur un espace de dimension finie 79
3.4.2. Construction d'une suite de solutions approchées de (3.4.1) 80
3.4.3. Bornes a priori sur la suite de solutions approchées 81
3.4.4. Convergence vers une solution de (3.4.1) 82
3.4.5. Unicité 83
3.5. Exercices **83**
3.6. Solutions de quelques exercices **85**

3.1. L'équation de Laplace-Poisson

Cette équation est le prototype d'une EDP elliptique. Elle a été étudiée dans le cours d'Analyse Complexe, mais nous rappellons ici certains points importants. Rappellons que l'équation de Laplace[(1)] avec condition

[(1)] 1749-1827

de Dirichlet[2] dans un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^d$ s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} & = & g\,. \end{array} \right.$$

On dit qu'une fonction u est harmonique sur Ω si $u \in C^2(\Omega)$ et Δu s'y annule.

On peut envisager d'autres conditions aux bords, comme la condition de Neumann[3]

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = g$$

où ν est la normale unitaire sortante de Ω. L'équation de Poisson[4] (avec condition de Dirichlet) s'écrit quant à elle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} & = & g\,. \end{array} \right.$$

On a vu en Proposition 1.4.11 et en exercices des formules explicites pour la solution fondamentale E du Laplacien dans $\mathbb{R}^d$. On peut vérifier que

$$u(x) := \int E(x-y) f(y)\, dy$$

est une solution de classe C^2 de l'équation de Poisson dans $\mathbb{R}^d$.

Montrons l'unicité pour le problème de Poisson par une méthode dite d'énergie.

Théorème 3.1.1 **(Unicité pour l'équation de Poisson)**. — *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$, alors il existe au plus une solution au problème de Poisson avec condition de Dirichlet dans $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. — Si u et v sont deux telles solutions, alors $w := u - v$ vérifie l'équation de Laplace avec condition nulle au bord. En multipliant l'équation par w et en intégrant on trouve après intégration par parties

$$-\int_{\partial\Omega} w \partial_\nu w + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

donc w est constante sur $\overline{\Omega}$ et comme elle est nulle au bord, elle est nulle identiquement. □

Remarque 3.1.2. — *Dans le cas d'une condition de Neumann, la même démonstration montre que deux solutions sont égales à une constante près.*

3.1.1. Théorème de la moyenne. —

Théorème 3.1.3 **(Formule de la moyenne)**. — *Supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que $u \in C^2(\Omega)$ y est harmonique. Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B_r(x)$ est inclus dans Ω. Alors*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(x')\, dx' = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u\, d\sigma_{r,x}\,,$$

où $d\sigma_{r,x}$ est la mesure de surface sur la sphère $\partial B_r(x)$.

[2] 1805-1859
[3] 1832-1925
[4] 1781-1840

Démonstration. — On va commencer par démontrer le résultat sur la sphère.

Notons que $d\sigma_{r,x} = r^{d-1} d\sigma_{1,x}$. Soit

$$\phi(r) := \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma_{r,x} \, .$$

Commençons par montrer que ϕ est constante. On a $|\partial B_r(x)| = |\partial B_1(0)| r^{d-1} =: d c_d r^{d-1}$ avec $c_d := |B_1(0)|$, donc

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) \, d\sigma_{1,0}(z) \, .$$

Alors

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, d\sigma_{1,0}(z)$$

donc

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_x(r)|} \int_{\partial B_x(r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} \, d\sigma_{r,x}(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B_x(r)|} \int_{\partial B_x(r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma_{r,x}(y) \\ &= \frac{1}{|\partial B_x(r)|} \int_{B_x(r)} \Delta u(x') dx' = 0 \, , \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la formule de Green (appliquée au vecteur ∇u). La fonction ϕ est donc constante, et on peut écrire

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} u \, d\sigma_{t,x} = u(x) \, .$$

On conclut la démonstration en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} u(x') \, dx' &= \int_0^r \Big(\int_{\partial B_s(x)} u \, d\sigma_{s,x} \Big) ds \\ &= u(x) \int_0^r d c_d s^{d-1} \, ds \\ &= u(x) c_d r^d \, . \end{aligned}$$

Le résultat est démontré. □

Remarque 3.1.4 **(Théorème de la moyenne pour les fonctions sous et sur-harmoniques)**

Par la même démonstration on a le résultat suivant. Supposons que Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *et que* $u \in C^2(\Omega)$ *y est* sous-harmonique, *au sens où*

$$\Delta u \geq 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \, .$$

Alors pour tout $x \in \Omega$ *et* $r > 0$ *tels que* $B_r(x)$ *est inclus dans* Ω *on a*

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(x') \, dx' \quad \textit{et} \quad u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma_{r,x} \, .$$

Si $u \in C^2(\Omega)$ *y est* sur-harmonique *au sens où*

$$\Delta u \leq 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \, ,$$

alors pour tout $x \in \Omega$ *et* $r > 0$ *tels que* $B_r(x)$ *est inclus dans* Ω *on a*

$$u(x) \geq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(x') \, dx' \quad \textit{et} \quad u(x) \geq \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma_{r,x} \, .$$

3.1.2. Contrôle des dérivées. — Le résultat suivant exprime l'effet régularisant de l'équation de Laplace.

Théorème 3.1.5. — *Supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que $u \in C^2(\Omega)$ y est harmonique. Soit $x \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B_r(x)$ est inclus dans Ω. Alors pour tout $1 \leq j \leq d$ on a*

$$\left|\partial_j u(x)\right| \leq \frac{d}{r} \max_{\overline{B_r(x)}} |u|.$$

Démonstration. — Par dérivation on constate que $\partial_j u$ est harmonique donc par le théorème précédent et la formule de Green (appliquée au vecteur $(0,\dots,u,\dots 0)$ où u est à la j-ème entrée) on trouve

$$\partial_j u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \partial_j u(x')\, dx' = \frac{1}{c_d r^d} \int_{\partial B_r(x)} u \nu_j \, d\sigma_{r,x}.$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\left| \int_{\partial B_r(x)} u \nu_j \, d\sigma_{r,x} \right| \leq d c_d r^{d-1} \max_{\overline{B_r(x)}} |u|.$$

Le résultat est démontré. □

Remarque 3.1.6 **(Analyticité des fonctions harmoniques)**. — *On peut aussi montrer que sous les mêmes hypothèses, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\left|\partial^\alpha u(x)\right| \leq \frac{d^k e^{k-1} k!}{r^k} \max_{\overline{B_r(x)}} |u|.$$

Ainsi u est analytique.

3.1.3. Principe du maximum. —

Théorème 3.1.7 **(Principe du maximum fort)**. — *Supposons que Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ et que $u \in C^2(\Omega)$ y est sous-harmonique. Si u atteint un maximum global dans Ω, alors u y est constante.*

Démonstration. — Soit $M := \max_\Omega u$ et soit $F := u^{-1}\big(\{M\}\big)$. Alors comme u est continue, F est (non vide et) fermé dans Ω. Montrons que F est ouvert. Par le théorème de la moyenne on a pour tout $x \in F$ et tout $r > 0$ tels que $B_r(x)$ est inclus dans Ω

$$0 \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy - u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Big(u(y) - u(x)\Big)\, dy$$

et comme u atteint son maximum en x alors $u(y) - u(x) \leq 0$ pour tout $y \in \Omega$ et donc $u(y) - u(x) \leq 0$ dans $B_r(x)$. On en déduit que $u(y) = u(x)$ donc $y \in F$ et donc F est ouvert. Comme Ω est connexe alors $F = \Omega$ ce qui démontre le théorème. □

Corollaire 3.1.8 **(Principe du maximum faible)**. — *Supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y est harmonique. Alors*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \textit{et} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Démonstration. — Par continuité de u, comme $\overline{\Omega}$ est compact, u atteint son minimum et son maximum global dans $\overline{\Omega}$. Si le point où le minimum ou le maximum global est atteint est dans Ω alors u est constante dans la composante connexe associée, et donc atteint son maximum sur le bord de cette composante connexe, et sinon les deux valeurs extrêmales sont atteintes au bord. Le résultat suit. □

Corollaire 3.1.9. — *Supposons que Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$. L'équation de Laplace avec donnée au bord $g \in C(\partial\Omega)$ a au plus une solution u_g dans $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si u_g et u_h sont solutions associées aux données g et h alors on a les principes suivants :*

1. *comparaison : si $g \geq h$ sur $\partial\Omega$ avec $g \neq h$ alors $u_g > u_h$ dans Ω ;*
2. *stabilité : pour tout $x \in \Omega$ on a $\left|u_g(x) - u_h(x)\right| \leq \max_{\partial\Omega} |g-h|$.*

Démonstration. — Commençons par démontrer le principe de comparaison. On pose $w := u_g - u_h$, qui vérifie l'équation de Laplace avec donnée au bord positive. On déduit du corollaire précédent que pour tout $x \in \Omega$,

$$w(x) \geq \max_{\partial\Omega}(g-h) > 0\,.$$

ce qui est le résultat attendu. Le résultat de stabilité s'obtient de manière similaire en appliquant cet argument pour $\pm w$: on trouve

$$w(x) > -\max_{\partial\Omega}|g-h|$$
$$-w(x) > -\max_{\partial\Omega}|g-h|$$

ce qui donne le résultat. Enfin le résultat d'unicité provient du résultat de stabilité dans le cas $g = h$. □

3.1.4. Au sujet de l'existence de solutions. — L'existence d'une solution à l'équation de Poisson avec terme source f et donnée au bord g peut s'obtenir à partir de la solution fondamentale du Laplacien E dans l'espace entier. On appelle *fonction de Green* la fonction $(x,y) \mapsto G(x,y)$ définie sur $\Omega \times \Omega$ et qui vérifie pour tout $x \in \Omega$ l'équation

$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y)$$

dans Ω, avec donnée au bord nulle.

Proposition 3.1.10. — *On a*

$$G(x,y) = E(x-y) - \varphi(x,y)$$

où pour tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto \varphi(x,y)$ est solution de l'équation de Laplace avec donnée au bord en $\sigma \in \partial\Omega$ donnée par $E(x-\sigma)$.

Démonstration. — On a

$$\Delta_y\big(E(x-y) - \varphi(x,y)\big) = \delta_x(y) - \Delta_y\varphi(x,y) = \delta_x(y)\,,$$

et si $\sigma \in \partial\Omega$ alors

$$E(x-\sigma) - \varphi(x,\sigma) = 0\,.$$

La proposition est démontrée. □

Un calcul (que nous ne reproduirons pas dans ce cours) montre que

$$u(x) = -\int_\Omega f(y)G(x,y)\,dy - \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G(x,\sigma)}{\partial \nu}\,d\sigma$$

est solution de l'équation de Poisson. Il s'agit donc à présent de trouver G, donc en fait φ ce qui dans la pratique n'est pas toujours commode. On peut le faire de manière explicite, par exemple dans le cas d'une boule, nous n'entrons pas dans les détails ici (qui peuvent être faits en exercices) : dans la boule $B_R(0)$ de $\mathbb{R}^3$ on a si $x \neq 0$

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{|x|\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|}$$

et

$$G(0,y) = \frac{1}{4\pi|y|} - \frac{1}{R}\cdot$$

Nous allons ci-dessous proposer des méthodes plus robustes de résolution de l'équation de Laplace ou de Poisson, dans des domaines plus généraux, et avec des opérateurs à coefficients variables.

3.2. EDP elliptiques : résolution par Lax-Milgram

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. On s'intéresse à l'équation

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_{i}^{d} \partial_i(b_i u) + cu = f \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.2.1}$$

On suppose que a_{ij}, b_i et c sont des fonctions bornées sur Ω à valeurs réelles, et que la matrice $A := (a_{ij})$ est symétrique; l'équation (3.2.1) est à comprendre au sens des distributions sur Ω.

Dans la suite nous allons chercher à résoudre (3.2.1) dans un cadre Hilbertien (Sobolev) par application du théorème de Lax[(5)]-Milgram[(6)] – voir le paragraphe suivant pour l'énoncé et la démonstration de ce théorème. Nous montrerons également un résultat de "régularité elliptique" selon lequel la solution possède deux degrés de régularité de plus, en norme Sobolev, que la donnée initiale. Il existe une théorie alternative dans le cadre des données continues plutôt que Sobolev (si f est continue alors la solution est de classe C^2), que nous n'explorerons pas dans ce texte.

3.2.1. Théorème de Lax-Milgram. — Commençons par rappeler la définition suivante.

Définition 3.2.1. — *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et a une forme bilinéaire sur H. On dit que a est*

- *continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

- *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Démontrons le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 **(Théorème de Lax-Milgram)**. — *Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert réel H, et $L \in H^*$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $x \in H$ tel que*

$$a(x,y) = \langle L, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

Démonstration. — D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $h \in H$ tel que

$$\langle L, y\rangle = (h|y) \quad \forall y \in H.$$

Par ailleurs pour tout $x \in H$, l'application

$$y \longmapsto a(x,y)$$

(5) 1926
(6) 1912-1961

est une forme linéaire continue sur H donc par le théorème de Riesz encore, il existe un unique élément de H que nous noterons Ax tel que

$$a(x,y) = (Ax|y) \quad \forall y \in H.$$

Il s'agit donc de montrer qu'il existe un unique $x \in H$ tel que

$$Ax = h,$$

ou encore que A est une bijection de H sur H. On vérifie facilement que l'application A est linéaire de H dans H et on a pour tout $x \in H$

$$\|Ax\|^2 = \big|a(x,Ax)\big| \leq C\|x\|\,\|Ax\|$$

et

$$(Ax|x) = a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

donc

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad \text{et} \quad (Ax|x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

En particulier

$$\|Ax\| \geq \alpha\|x\| \tag{3.2.2}$$

donc A est injectif. Son image $\mathcal{Z}$ est fermée car si $y_n = Ax_n$ converge vers y, alors (Ax_n) est de Cauchy et donc (x_n) aussi par l'inégalité (3.2.2). Par le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé[7] on sait que $H = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{Z}^\perp$. Pour montrer que A est surjectif il suffit de montrer que $\mathcal{Z}^\perp = \{0\}$. Mais si $z \in \mathcal{Z}^\perp$ alors

$$\alpha\|z\|^2 \leq (Az|z) = 0$$

et le résultat suit.

□

3.2.2. Régularité elliptique pour le problème de Dirichlet. —

Définition 3.2.3. — *L'opérateur L est dit* elliptique *si la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ est définie positive, et* uniformément elliptique *s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et presque tout $x \in \Omega$*

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C_0|\xi|^2.$$

On suppose dorénavant que L est uniformément elliptique.

Dans la suite on note le produit scalaire de deux fonctions f et g dans $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ par

$$(f|g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

et on note

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x) - \sum_{i}^{d} b_i(x)u(x)\partial_i v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\,dx \Big(= (Lu|v)\Big).$$

[7] tout élément x de H se décompose de manière unique en $p_{\mathcal{Z}}(x) + p_{\mathcal{Z}^\perp}(x)$

3.2.2.1. Existence et unicité de solutions. — Avant de décrire quelle notion de solution l'on cherche à obtenir, énonçons quelques propriétés sur a.

Proposition 3.2.4. — *Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ et un réel γ tels que pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$|a(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$
$$C_2 \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2 .$$

Cette seconde inégalité est une inégalité de Gårding[8]*. La constante γ peut être choisie nulle si $b \equiv c \equiv 0$.*

Démonstration. — La première inégalité provient simplement du fait que

$$|a(u,v)| \leq \Big(\sum_{i,j=1}^{d} \|a_{ij}\|_{L^\infty} + \sum_i \|b_i\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty} \Big) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} .$$

Pour la deuxième on note que par l'inégalité de Poincaré il suffit de majorer $\|\nabla u\|_{L^2}$. Par uniforme ellipiticité de A on a

$$\begin{aligned} C_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j u(x)\, dx \\ &\leq a(u,u) + \|u\|_{L^2} \sum_i \|b_i\|_{L^\infty} \|\partial_i u\|_{L^2} - \int_\Omega c(x) u^2(x)\, dx \\ &\leq a(u,u) + \beta \|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} - \delta \|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

avec $\beta := \left(\sum_i \|b_i\|_{L^\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\delta := \inf_\Omega c$.

Le résultat suit si $\beta = 0$, et sinon il suffit d'utiliser le fait que

$$\|u\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2$$

et choisir $\varepsilon = C_0 / 2\beta$. □

Définition 3.2.5. — *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution faible de*

$$\begin{cases} Lu + \mu u &= f \quad dans \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

si $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) + \mu (u|v) = \langle f, v \rangle .$$

Le théorème principal de cette section est le suivant.

Théorème 3.2.6. — *Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et γ donné par la Proposition 3.2.4. Alors pour tout $\mu \geq \gamma$, il existe une unique solution faible de (3.2.1), au sens de la Définition 3.2.5.*

Démonstration. — Soit

$$a_\mu(u,v) := a(u,v) + \mu (u|v) .$$

On a

$$|a_\mu(u,v)| \leq C_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + |\mu| \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

et

$$C_2 \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u,u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2 \leq a_\mu(u,u)$$

[8] 1919-2014

dès que $\mu \geq \gamma$. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure directement: il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$a_\mu(u,v) = \langle f, u\rangle\,.$$

Le théorème est démontré. □

3.2.2.2. Régularité elliptique. — On suppose dorénavant que $f \in L^2(\Omega)$, et pour simplifier que $b \equiv 0, c \equiv 0$ et on considère des solutions faibles dans $H^1(\Omega)$ de $Lu = f$ (i.e. on ne fait plus d'hypothèse sur le bord de Ω). Il s'agit donc de fonctions de $H^1(\Omega)$ satisfaisant à

$$a(u,v) = (f|v) \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{3.2.3}$$

Théorème 3.2.7. — *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et supposons que les coefficients a_{ij} sont dans $C^1(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant (3.2.3). Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω on a*

$$u \in H^2(\Omega') \quad et \quad \|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big)\,,$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω', Ω et des coefficients a_{ij}.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, et $\varphi = 1$ sur Ω'. On va estimer $\displaystyle\int_\Omega \varphi^2 \big|\nabla \partial_k u\big|^2\, dx$.

On voudrait utiliser la fonction $v := -\partial_k\big(\varphi^2 \partial_k u\big)$ comme fonction test, mais n'est pas possible puisqu'elle n'est pas dans H^1_0... pour rendre les arguments suivants rigoureux il faut régulariser cette fonction, par exemple en utilisant plutôt la fonction

$$v_h := -D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)$$

avec D_k^h défini dans la Proposition 1.8.3. Nous appliquerons ce procédé de régularisation plus bas, mais pour commencer nous allons travailler directement (formellement) sur $v := -\partial_k\big(\varphi^2 \partial_k u\big)$. Alors

$$\begin{aligned}
(Lu|v) &= -\sum_{ij} \int_\Omega \partial_i\big(a_{ij}\partial_j u\big) v\, dx \\
&= \sum_{ij} \int_\Omega \partial_k\big(a_{ij}\partial_j u\big)\partial_i\big(\varphi^2 \partial_k u\big)\, dx \\
&= \sum_{ij} \int_\Omega \varphi^2 a_{ij}\partial^2_{ik} u\, \partial^2_{jk} u\, dx + \underbrace{2\sum_{ij}\int_\Omega \varphi\partial_i\varphi\partial_k u\Big(a_{ij}\partial^2_{jk}u + \partial_k a_{ij}\partial_j u\Big)\, dx + \sum_{ij}\int_\Omega \varphi^2 \partial_k a_{ij}\partial_j u\, \partial^2_{ik} u\, dx}_{=:F}\,.
\end{aligned}$$

Mais alors par coercivité on a

$$\begin{aligned}
C_0 \int_{\Omega'} \big|\nabla\partial_k u\big|^2\, dx \leq C_0 \int_\Omega \varphi^2 \big|\nabla\partial_k u\big|^2\, dx &\leq \sum_{ij}\int_\Omega \varphi^2 a_{ij}\partial^2_{jk}u\,\partial^2_{ik}u\, dx \\
&= (Lu|v) - F\,.
\end{aligned}$$

On note d'une part que

$$\big|(Lu|v)\big| = \big|(f|v)\big| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \big\|\partial_k\big(\varphi^2\partial_k u\big)\big\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\partial^2_k u\|_{L^2(\Omega)} + C\|\partial_k u\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

où C ne dépend que de φ. On a donc, quitte à modifier la constante C (qui pourra changer de ligne en ligne)

$$\big|(Lu|v)\big| \leq \frac{C_0}{4}\|\varphi\nabla\partial_k u\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|F| &\le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\big(\|\partial_k u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\nabla\partial_k u\|_{L^2(\Omega)}\big)\\ &\le \frac{C_0}{4}\|\varphi\nabla\partial_k u\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

donc

$$\big|(Lu|v)\big| + |F| \le \frac{C_0}{2}\|\varphi\nabla\partial_k u\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|f\|^2_{L^2} + C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Finalement quitte à changer encore la constante C on a montré que

$$\int_{\Omega'}\big|\nabla\partial_k u\big|^2 \le C\big(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\big),$$

ce qui est presque le résultat voulu.

Adoptons maintenant un argument rigoureux, pour justifier les calculs précédents et obtenir l'inégalité voulue. On définit

$$v_h := -D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big),$$

où h est suffisamment petit pour que v_h soit bornée dans $H^1_0(\Omega)$ (on vérifiera à titre d'exercice que le produit d'une fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$ et une fonction de $H^1(\Omega)$ est dans $H^1_0(\Omega)$). On utilise ici et dans la suite les résultats de la Proposition 1.8.3 : on rappelle en particulier que

$$D_k^h f := \frac{1}{h}\big(\tau_{he_k}f - f\big) \quad \text{et} \quad \tau_{he_k}f := f(\cdot + he_k).$$

Alors

$$-\sum_{ij}\int_\Omega \big(a_{ij}\partial_j u\big)D_k^{-h}\partial_i\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\,dx = -\int_\Omega f D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\,dx.$$

Mais

$$-\sum_{ij}\int_\Omega \big(a_{ij}\partial_j u\big)D_k^{-h}\partial_i\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\,dx = \sum_{ij}\int_\Omega \varphi^2(\tau_{he_k}a_{ij})\big(D_k^h\partial_j u\big)\big(D_k^h\partial_i u\big)\,dx + F,$$

avec

$$\begin{aligned}F := &\sum_{ij}\int_\Omega \varphi^2 D_k^h a_{ij}\partial_j u\,\partial_i D_k^h u\,dx + 2\sum_{ij}\int_\Omega \varphi\partial_i\varphi(\tau_{he_k}a_{ij})\big(D_k^h\partial_j u\big)\big(D_k^h u\big)\\ &+ 2\sum_{ij}\int_\Omega \varphi\partial_i\varphi\big(D_k^h a_{ij}\big)\big(\partial_j u\big)\big(D_k^h u\big).\end{aligned}$$

Mais par uniforme ellipticité de (a_{ij})

$$\begin{aligned}C_0\int_{\Omega'}\big|D_k^h\nabla u\big|^2\,dx &\le C_0\int_\Omega \varphi^2\big|D_k^h\nabla u\big|^2\,dx\\ &\le \sum_{ij}\int_\Omega \varphi^2(\tau_{he_k}a_{ij})\big(D_k^h\partial_j u\big)\big(D_k^h\partial_i u\big)\,dx\\ &= -\int_\Omega f D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\,dx - F.\end{aligned}$$

On note d'une part que

$$\Big|\int_\Omega f D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\,dx\Big| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\|_{L^2(\Omega)}$$

et pour h assez petit

$$\begin{aligned}\|D_k^{-h}\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\|_{L^2(\Omega)} &\le \|\partial_k\big(\varphi^2 D_k^h u\big)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\varphi^2\partial_k D_k^h u\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\varphi\partial_k\varphi D_k^h u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\varphi D_k^h\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$|F| \le C\|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big(\|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)} + \|\varphi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

Finalement

$$\begin{aligned} C_0\int_\Omega \varphi^2\big|D_k^h\nabla u\big|^2\,dx &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\big(\|\varphi D_k^h\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big)\\ &\quad + C\|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big(\|\varphi D_k^h\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big)\\ &\le \frac{C_0}{4}\|\varphi D_k^h\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}. \end{aligned}$$

Après un passage à la limite $h\to 0$ on obtient

$$\int_{\Omega'}\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le \int_\Omega \varphi^2\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le C\big(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big).$$

Il reste à remplacer la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}$ du membre de droite par $\|u\|_{L^2(\Omega)}$. Pour cela on considère un ouvert Ω'' relativement compact dans Ω tel que Ω' soit relativement compact dans Ω'', et une fonction $\widetilde{\varphi}\in\mathscr{D}(\Omega'')$ égale identiquement à 1 sur le support de φ. Alors l'inégalité précédente s'écrit aussi

$$\int_{\Omega'}\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le \int_\Omega \varphi^2\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le C\big(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{\varphi}\nabla u\|^2_{L^2(\mathrm{Supp}\,\varphi)}\big).$$

Par ailleurs la démonstration précédente fournit aussi

$$\int_{\Omega'}\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le \int_\Omega \widetilde{\varphi}^2\big|\nabla\partial_k u\big|^2\,dx \le C\big(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathrm{Supp}\,\widetilde{\varphi})}\big).$$

Mais on a

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathrm{Supp}\,\widetilde{\varphi})} \le \int_\Omega \big|\widetilde{\varphi}\nabla u\big|^2\,dx,$$

et en prenant $\widetilde{\varphi}^2 u$ comme fonction test (qui est bien dans $H^1_0(\Omega)$) il vient

$$\begin{aligned} C_0\int_\Omega\big|\widetilde{\varphi}\nabla u\big|^2\,dx &\le \sum_{ij}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^2 a_{ij}\partial_i u\partial_j u\\ &\le \int_\Omega \widetilde{\varphi}^2 f u\,dx - 2\sum_{ij}\int_\Omega a_{ij}\varphi u\partial_i\widetilde{\varphi}\partial_j u\\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\widetilde{\varphi}\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que

$$\frac{C_0}{2}\int_\Omega\big|\widetilde{\varphi}\nabla u\big|^2\,dx \le C\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque 3.2.8. — *La même méthode permet de montrer que si Ω est de classe C^k, les a_{ij} sont dans C^{k+1} et f est dans $H^k(\Omega)$ alors u appartient à $H^{k+2}(\Omega')$. Une analyse similaire peut montrer que si a_{ij} sont dans $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et f est dans $H^k(\Omega)$ alors u appartient à $H^{k+2}(\Omega)$.*

3.3. L'équation de la chaleur dans l'espace entier

Cette équation est le prototype d'une EDP parabolique, et s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{pour} \quad t>0 \text{ et } x\in\mathbb{R}^d\\ u_{|t=0} &= u_0. \end{cases}$$

Commençons par supposer que $f \equiv 0$. Pour démontrer l'existence d'une solution, on peut en trouver une formule explicite en utilisant la transformée de Fourier en espace (à t fixé) : on pose ainsi

$$\widehat{u}(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u(t,x)\,dx, \quad \text{et} \quad \widehat{u}_0(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} u_0(x)\,dx.$$

Alors $\widehat{u}$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_t \widehat{u} + |\xi|^2 \widehat{u} = 0$$

avec $\widehat{u}_{|t=0} = \widehat{u}_0$, qui se résout explicitement en

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi).$$

On trouve donc que

$$u(t,x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy, \quad t>0$$

est solution de l'équation. Cette formulation a du sens dès que u_0 est mesurable et bornée (elle peut même croître comme $\exp(c|x|^2)$ auquel cas la formule a du sens pour $0 < t < 1/4c$). La solution est instantanément de classe $\mathscr{C}^\infty$: c'est l'effet *régularisant de l'équation de la chaleur.* La solution au point (t,x) dépend de la donnée initiale en tout $y \in \mathbb{R}^d$ et réciproquement la valeur de u_0 en y affecte la valeur de la solution en (t,x) pour tout x. On parle de *vitesse infinie de propagation.* Enfin on a un *principe du maximum*:

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ t>0}} u(t,x) \le \sup u_0. \tag{3.3.1}$$

En outre si $u_0 \ge 0$ est non identiquement nulle, alors $u(t,x) > 0$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$.

La fonction $G : (t,x) \mapsto \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \mathbf{1}_{t>0}$ est une *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur. La fonction $K : (t,x,y) \mapsto \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ est son *noyau.* On a les propriétés suivantes :

1. la fonction K est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$;
2. pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$ on a $\partial_t K - \Delta_x K = 0$;
3. la fonction $K(t,x,\cdot)$ est d'intégrale 1 pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$.

Proposition 3.3.1. — *Soit $u_0 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ bornée, alors la fonction u définie ci-dessus est dans $\mathscr{C}^\infty(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$, vérifie l'équation de la chaleur avec $f \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, et on a*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0^+}} u(t,x) = u_0(x_0).$$

Démonstration. — Les propriétés précédentes sur K permettent facilement d'obtenir cette proposition, Le seul point délicat est le dernier. On remarque que

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{-\frac{|z|^2}{4}} u_0(x + z\sqrt{t})\,dz$$

qui est encore valable pour $t = 0$. On conclut par convergence dominée. □

Dans le cas où le terme source n'est pas nul, il suffit d'appliquer la formule dite de Duhamel[(9)], qui indique que

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-t')|\xi|^2} \widehat{f}(t',\xi)\,dt'. \tag{3.3.2}$$

[(9)] 1797-1872

On a alors

$$u(t,x) = \Big(G(t,\cdot) \star u_0\Big)(x) + \int_0^t \Big(G(t-t',\cdot) \star f(t')\Big)(x)\, dt'\,.$$

Se pose maintenant la question de l'unicité de cette solution. On peut utiliser le principe du maximum pour cela, ou bien une méthode plus "hilbertienne", davantage dans l'esprit de la suite. On constate en effet que si de plus $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, alors par (3.3.2) on a $u \in L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et pour tout $t \le T$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} u^2(t,x)\,dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2(t',x)\,dxdt' = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f\,u(t',x)\,dxdt'\,.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f\,u(t,x)\,dxdt'\Big| &\le \|f\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)}\\ &\le c\|u\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{4c}\|f\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)}\\ &\le cT\|u\|^2_{L^\infty([0,t];L^2(\mathbb{R}^d))} + \frac{1}{4c}\|f\|^2_{L^2([0,t]\times\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

et en choissant $cT = 1/4$ on obtient

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le T\|f\|^2_{L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Mais alors si u et v sont deux solutions au sens de la Proposition 3.3.1 associées aux mêmes données, on peut appliquer ces estimations à la fonction $w := u - v$, et cela permet de conclure au fait que $u = v$.

Proposition 3.3.2. — *Soit $s \in \mathbb{R}$, et soit $u \in \mathscr{C}^0([0,T];\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ la solution de l'équation de la chaleur associée à $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^2([0,T];\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d))$. Alors u appartient à $\mathscr{C}^0([0,T];\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)) \cap L^p([0,T];\dot{H}^{s+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d))$ pour tout $2 \le p \le \infty$. On a en outre*

$$\forall 2 \le p \le \infty, \quad \|u\|_{L^p([0,T];\dot{H}^{s+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d))} \le \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|f\|_{L^2([0,T];\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d))}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \sup_{t\in[0,T]} \big|\widehat{u}(t,\xi)\big|^2\, d\xi \le \|u_0\|^2_{\dot{H}^s} + \|f\|^2_{L^2([0,T];\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d))}\,. \tag{3.3.3}$$

Démonstration. — Il suffit de rappeler l'écriture (3.3.2) de la solution en Fourier et de remarquer que

$$\sup_{t\in[0,T]} \big|\widehat{u}(t,\xi)\big| \le \big|\widehat{u}_0(\xi)\big| + \frac{1}{|\xi|}\big\|\widehat{f}(\cdot,\xi)\big\|_{L^2([0,T])}\,.$$

Le résultat (3.3.3) suit immédiatement, et en particulier le fait que $u \in L^\infty([0,T];\dot{H}^s(\mathbb{R}^d))$. La continuité en temps provient du théorème de convergence dominée. Enfin le fait que

$$\|u\|_{L^2([0,T];\dot{H}^{s+1}(\mathbb{R}^d))} \le \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|f\|_{L^2([0,T];\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d))}$$

provient aussi de (3.3.2) et on conclut la démonstration par interpolation. □

3.4. EDP paraboliques dans un domaine borné: résolution par la méthode de Galerkin

Comme évoqué dans le cas de l'équation de Laplace au Paragraphe 3.1.4, il est beaucoup plus difficile de trouver une formule explicite pour une solution de l'équation de la chaleur dans un domaine quelconque.

Nous allons à présent considérer des opérateurs à coefficients variables, et une équation posée dans un domaine borné. On considère donc l'EDP parabolique suivante, où Ω est un domaine borné:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = f \quad \text{dans} \quad [0,T]\times\Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \\ u_{|t=0} = u_0\,. \end{array}\right. \tag{3.4.1}$$

On suppose que les a_{ij} sont bornés sur $[0,T]\times\Omega$ à valeurs réelles, et que la matrice $A := (a_{ij})$ est symétrique, et uniformément elliptique. Notons que pour simplifier on ne considère pas le cas où des termes d'ordre 1 et 0 figurent dans l'équation. On note comme précédemment

$$a(u,v;t) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t,x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)\,dx\,.$$

Avant de définir la notion de solution que nous cherchons, écrivons une estimation d'énergie formelle pour (3.4.1): en multipliant l'équation par u et utilisant la Proposition 3.2.4 on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le \langle f(t), u(t)\rangle$$

donc puisque

$$\big|\langle f(t), u(t)\rangle\big| \le \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u(t)\|_{H^1_0(\Omega)}$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_2}{2}\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le C\|f(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,.$$

Il est donc naturel de choisir $f \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ et de chercher une solution u dans l'espace $L^2([0,T];H^1_0(\Omega))$. On note qu'alors l'équation implique que $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Remarque 3.4.1. — *D'après le Lemme 1.10.1, si $u \in L^2([0,T];H^1_0(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$, alors $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, et en particulier $u_{|t=0} = u_0$ a bien un sens.*

Définition 3.4.2. — *Soit $f \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors $u : [0,T] \to H^1_0(\Omega)$ est une solution faible de (3.4.1) si $u \in L^2([0,T];H^1_0(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$, $u_{|t=0} = u_0$ et pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$, pour presque tout $t \in [0,T]$*

$$\langle \partial_t u(t), v\rangle + a(u(t),v;t) = \langle f(t), v\rangle\,.$$

Théorème 3.4.3. — *Soit $f \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique solution faible de (3.4.1), qui vérifie en outre $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, et*

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2([0,T];H^1_0(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))} \le C\big(\|f\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\big)\,.$$

Démonstration. — La démonstration s'organise en cinq étapes:

1. Projection sur un espace de dimension finie
2. Construction d'une suite de solutions approchées de (3.4.1)
3. Bornes *a priori* sur la suite de solutions approchées
4. Convergence vers une solution de (3.4.1)
5. Unicité.

3.4.1. Projection sur un espace de dimension finie. —

Théorème 3.4.4. — *Soit Ω domaine borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $L^2(\Omega)$ telle que $e_n \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et il existe une suite croissante $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n \to \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, e_n est solution faible de*

$$-\Delta e_n = \lambda_n^2 e_n .$$

En outre $(\lambda_n^{-1} e_n)$ est une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Enfin pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ on a

$$\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda_n^{-2} \langle f, e_n\rangle^2 .$$

Démonstration. — Construisons la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui va être constituée de fonctions propres du Laplacien-Dirichlet. Par le théorème 3.2.6 on peut définir l'opérateur

$$\mathscr{A} : \begin{array}{l} L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \\ \qquad f \mapsto u, \quad -\Delta u = f . \end{array}$$

Il est symétrique car si f, g sont dans $L^2(\Omega)$, en écrivant $u = \mathscr{A} f$ et $v = \mathscr{A} g$

$$(\mathscr{A} f | g) = (u, -\Delta v) = (\nabla u | \nabla v) = (-\Delta u, v) = (f | \mathscr{A} g) .$$

Par ailleurs l'opérateur $\mathscr{A}$ est borné car si $f \in L^2(\Omega)$ et $u = \mathscr{A} f$ alors par l'inégalité de Poincaré

$$(\mathscr{A} f | f) = (-\Delta u, u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\mathscr{A} f\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq C\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = C\|\mathscr{A} f\|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{3.4.2}$$

Comme il est borné et symétrique, il est donc auto-adjoint. Par le théorème de Rellich et (3.4.2) c'est un opérateur compact[(10)], et le premier résultat suit donc du théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace de Hilbert : il existe une suite (α_n) tendant vers zéro et une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{A} e_n = \alpha_n e_n .$$

Mais par (3.4.2) appliquée à $f = e_n$ on a

$$\alpha_n \geq C\alpha_n^2$$

donc l'opérateur est positif et on peut écrire $\alpha_n = \mu_n^2$. Notons aussi que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque par construction si $\mathscr{A} f = 0$ alors $f = 0$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\Delta e_n = \mu_n^{-2} e_n =: \lambda_n^2 e_n .$$

Comme $e_n \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer

$$\begin{aligned} (\nabla e_n | \nabla e_m) &= (-\Delta e_n | e_m) \\ &= \lambda_n^2 (e_n | e_m) \\ &= \lambda_n^2 \delta_{n,m} \end{aligned}$$

donc $(\lambda_n^{-1} e_n)$ est une famille orthonormale de $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire de $H_0^1(\Omega)$, que l'on définit grâce à l'inégalité de Poincaré par $(\nabla \cdot | \nabla \cdot)$. Montrons que $(\lambda_n^{-1} e_n)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u | e_n)_{H_0^1(\Omega)} = 0 .$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla u | \nabla e_n) \\ &= (u | -\Delta e_n) \\ &= \lambda_n^2 (u | e_n) \end{aligned}$$

[(10)] l'image de la boule unité fermée de $L^2(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$ pour la topologie forte

donc $u \equiv 0$ puisque $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. Enfin soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{H^1_0(\Omega)}\le 1} \langle f, v\rangle^2 \\
&= \sup_{\|v_n\|_{\ell^2}\le 1} \Big\langle f, \sum_n v_n \lambda_n^{-1} e_n \Big\rangle^2 \\
&= \sup_{\|v_n\|_{\ell^2}\le 1} \sup_N \Big\langle f, \sum_{n\le N} v_n \lambda_n^{-1} e_n \Big\rangle^2 \\
&= \sup_{\|v_n\|_{\ell^2}\le 1} \sup_N \Big(\sum_{n\le N} v_n \lambda_n^{-1} \langle f, e_n\rangle \Big)^2 \\
&= \big\| \lambda_n^{-1} \langle f, e_n\rangle \big\|^2_{\ell^2}.
\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. □

On en déduit que toute fonction u de $H^1_0(\Omega)$ se décompose en

$$u = \sum_n \omega_n e_n, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \sim \|\omega_n\|_{\ell^2}, \quad \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \sim \|\lambda_n \omega_n\|_{\ell^2}, \quad \|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \sim \|\lambda_n^{-1}\omega_n\|_{\ell^2}.$$

On note $\mathscr{P}_N$ la projection orthogonale L^2 sur $\mathscr{E}_N := \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_N)$. On remarque que $\mathscr{E}_N \subset H^1_0(\Omega)$, et que l'on peut étendre cette projection à H^{-1} en posant

$$\forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad \mathscr{P}_N f := \sum_{n\le N} \langle f, e_n\rangle e_n.$$

3.4.2. Construction d'une suite de solutions approchées de (3.4.1). —

Définition 3.4.5. — *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La fonction $u_N : [0,T] \to \mathscr{E}_N$ est une solution approchée de (3.4.1) si*

$$u_N \in L^2([0,T];\mathscr{E}_N), \quad \partial_t u_N \in L^2([0,T];\mathscr{E}_N), \quad u_N(0) = \mathscr{P}_N u_0,$$

et pour tout $v \in \mathscr{E}_N$, pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\big(\partial_t u_N(t), v\big) + a(u_N(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle. \tag{3.4.3}$$

Remarque 3.4.6. — *On remarque que (3.4.3) est équivalente à*

$$\partial_t u_N + \mathscr{P}_N L u_N = \mathscr{P}_N f.$$

Proposition 3.4.7. — *Pour tout entier N, sous les hypothèses du Théorème 3.4.3, il existe une unique solution approchée.*

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de résoudre (3.4.3) pour $v = e_i$ pour tout $1 \le i \le N$: on cherche donc $u_N : [0,T] \to \mathscr{E}_N$ telle que pour presque tout $t \in [0,T]$ et pour tout $1 \le i \le N$

$$\big(\partial_t u_N(t), e_i\big) + a(u_N(t), e_i; t) = \langle f(t), v\rangle.$$

On commence par écrire pour presque tout temps:

$$\mathscr{P}_N f(t) = \sum_{n\le N} \varphi_n(t) e_n,$$

en notant que $t \mapsto \varphi_n(t)$ est dans $L^2([0,T])$, et on définit

$$F_N(t) := \big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\big).$$

On cherche alors la solution sous la forme

$$u_N(t) = \sum_{1\le n\le N} \omega_n(t) e_n,$$

et l'on pose de même

$$U_N(t) := \big(\omega_1(t), \dots, \omega_N(t)\big).$$

L'EDO s'écrit alors

$$\forall 1 \le i \le N, \quad \frac{d\omega_i(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{N} a(e_n, e_i; t)\omega_n(t) = \varphi_i(t)$$

ou encore sous forme vectorielle dans $\mathbb{R}^N$

$$\frac{dU_N(t)}{dt} + A_N(t)U_N(t) = F_N(t)$$

où $A_N(t) := \big(a(e_n, e_i; t)\big)_{1\le i,n\le N}$. On va résoudre cette équation par le Théorème 1.2.1 de Cauchy-Lipschitz dans l'espace $C([0,T];\mathbb{R}^N)$. Plus précisément on peut appliquer un théorème de point fixe à

$$U_N = \Phi\big(U_N\big), \quad \Phi\big(U_N\big)(t) := U_N(0) - \int_0^t A_N(t')U_N(t')\,dt' + \int_0^t F_N(t')\,dt'.$$

On remarque que Φ est continue de $C([0,t];\mathbb{R}^N))$ sur lui-même pour tout $t \le T$ et en outre pour tous (V_N, V_N') dans $C([0,t];\mathbb{R}^N))$

$$\big\|\Phi(V_N) - \Phi(V_N')\big\|_{L^\infty([0,t];\mathbb{R}^N))} \le t \sup_{t\in[0,T]} \big\|a(e_i, e_j; t)\big\|_{L^\infty} \big\|V_N - V_N'\big\|_{L^\infty([0,t];\mathbb{R}^N))}.$$

On peut résoudre l'équation de manière unique sur $C([0,t];\mathbb{R}^N)$ tant que

$$t \sup_{t\in[0,T]} \big\|a(e_i, e_j; t)\big\|_{L^\infty} < 1$$

puis itérer de proche en proche jusqu'à obtenir une solution dans $C([0,T];\mathbb{R}^N)$. On a $\partial_t u_N \in L^2([0,T];\mathscr{E}_N)$ par construction. □

3.4.3. Bornes a priori sur la suite de solutions approchées. —

Proposition 3.4.8. — *Sous les hypothèses du Théorème 3.4.3, la suite de solutions approchées (u_N) construite à la Proposition 3.4.7 est bornée dans $L^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ et la suite $(\partial_t u_N)$ est bornée dans $L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$.*

Démonstration. — On multiplie l'EDO par $u_N(t)$ et on intègre, en utilisant les propriétés de A_N. Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\|u_N(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \langle f(t), u_N(t)\rangle.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_N(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\int_0^t \|u_N(t')\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt' &\le \frac{1}{2}\|u_N(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \langle f(t'), u_N(t')\rangle\,dt' \\ &\le \frac{1}{2}\|u_N(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C_2}\|f\|^2_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))} + \frac{C_2}{2}\int_0^t \|u_N(t')\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt',\end{aligned}$$

et donc

$$\|u_N\|^2_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega))} + \|u_N\|^2_{L^2([0,T];H_0^1(\Omega))} \le C\big(\|f\|^2_{L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

On écrit enfin

$$\|\partial_t u_N\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v\in\mathscr{E}_N\setminus\{0\}} \frac{\langle \partial_t u_N(t), v\rangle}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

et on a

$$\begin{aligned}\big|\langle \partial_t u_N(t), v\rangle\big| &= \big|(\partial_t u_N(t)|v)\big| \\ &\le \big|a(u_N(t), v; t)\big| + \big|(f_N(t), v)\big| \\ &\le C\big(\|u_N(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\big)\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

et donc $\langle \partial_t u_N(t), v\rangle$ est bornée dans $L^2([0,T])$ d'où $\partial_t u_N$ est bornée dans $L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$. □

3.4.4. Convergence vers une solution de (3.4.1). — On va utiliser une méthode de compacité faible. On rappelle que $u_N \rightharpoonup u$ dans $L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ signifie que

$$\forall g \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega)), \quad \int_0^T \big\langle u_N(t), g(t)\big\rangle\, dt \to \int_0^T \big\langle u(t), g(t)\big\rangle\, dt$$

et de même $f_N \rightharpoonup f$ dans $L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ signifie que

$$\forall v \in L^2([0,T];H_0^1(\Omega)), \quad \int_0^T \big\langle v(t), f_N(t)\big\rangle\, dt \to \int_0^T \big\langle v(t), f(t)\big\rangle\, dt.$$

Enfin si $u_N \to u$ dans $L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ et $f_N \rightharpoonup f$ dans $L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ alors

$$\int_0^T \langle u_N(t), f_N(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle u(t), f(t)\rangle\, dt.$$

Proposition 3.4.9. *— Il existe $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ telle que $u_N \rightharpoonup u$ dans $L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$. En outre $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ et u est solution faible de (3.4.1).*

Démonstration. — On applique le Théorème 1.3.3 de Banach-Alaoglu. Les espaces $L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ et $L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ sont réflexifs (comme tous les espaces de Hilbert), donc ce théorème implique que les bornés sont faiblement pré-compacts. Quitte à extraire une sous-suite, il existe par la Proposition 3.4.8 des fonctions $u \in L^2([0,T];H_0^1(\Omega))$ et $v \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega))$ tels que

$$u_N \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^2([0,T];H_0^1(\Omega)), \qquad \text{et} \quad \partial_t u_N \rightharpoonup v \quad \text{dans} \quad L^2([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

On obtient que $v = \partial_t u$ par identification de la limite dans $\mathscr{S}'$. Enfin on obtient que u est bien dans $C([0,T];L^2(\Omega))$ grâce à la Remarque 3.4.1.

Passons à la limite faible dans l'équation : en partant de (3.4.3) avec $v \in \mathscr{E}_M$, avec $N \geq M$, alors on a l'identité

$$\big(\partial_t u_N(t), v\big) + a(u_N(t), v; t) = \langle \mathscr{P}_N f(t), v\rangle \tag{3.4.4}$$

qui converge presque partout quand N tend vers l'infini vers

$$\big\langle \partial_t u(t), v\big\rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle.$$

Il suffit alors de faire tendre M vers l'infini. On passe facilement à la limite dans l'estimation d'énergie, donc il reste juste à vérifier que $u(0) = u_0$. Pour cela on choisit une fonction $\psi \in C^\infty([0,T])$ telle que $\psi(0) = 1$ et $\psi(T) = 0$. Alors pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_0^T \langle \partial_t u(t), \psi(t)\, v\rangle\, dt = \langle u(0), v\rangle - \int_0^T \psi'(t)\langle u(t), v\rangle\, dt.$$

On en déduit que

$$\langle u(0), v\rangle = \int_0^T \psi'(t)\langle u(t), v\rangle\, dt + \int_0^T \psi(t)\Big(\langle f(t), v\rangle - a\big(u(t), v; t\big)\Big)\, dt.$$

Par ailleurs si $v \in \mathscr{E}_M$, avec $N \geq M$ alors presque partout

$$\big\langle \mathscr{P}_N f(t), v\big\rangle = \big\langle f(t), v\big\rangle$$

et (3.4.4) devient

$$\langle \mathscr{P}_N u_0, v\rangle = \int_0^T \psi(t)\Big(\langle f(t), v\rangle - a\big(u_N(t), v; t\big)\Big)\, dt + \int_0^T \psi'(t)\langle u_N(t), v\rangle\, dt$$

et le résultat suit en prenant $N \to \infty$, puisqu'alors

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \quad \forall v \in \mathscr{E}_M, \quad \langle u_0, v\rangle = \langle u(0), v\rangle.$$

L'existence d'une solution est bien démontrée. □

3.4.5. Unicité. — Enfin choisissons $f \equiv 0$ et $u_0 \equiv 0$, et montrons que 0 est la seule solution possible à (3.4.1). Le résultat suit du fait que l'on peut prendre u comme fonction test et donc 'il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq 0\,.$$

Le théorème est démontré. □

3.5. Exercices

Exercice 16 : inégalité de Caccioppoli généralisée

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathscr{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall\, x \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \partial x \leq C \int_\Omega (u^2 + f^2)\partial x.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.]

Exercice 17 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et diffusion 1D

1. Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ qui est T-périodique. Montrer que si $\int_0^T u(t)\,\partial t = 0$ alors

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2\,\partial t\right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T |u'(t)|^2\,\partial t\right)^{1/2}.$$

[Indication : utiliser une décomposition en séries de Fourier.]

2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-périodique en x, et solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où γ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$, 2π-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si la moyenne $\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)\,\partial x$ s'annule, alors il existe une constante C telle que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,\partial x \leq e^{-tC}\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2\,\partial x.$$

Exercice 18 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $T>0$. On note $\Omega_T=(0,T]\times\Omega$.

1. Dans cette première question, on va démontrer une formule de la moyenne pour l'équation de la chaleur. On introduit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ par

$$\Phi(t,x)=\begin{cases}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si} \quad t>0\\ 0 & \text{si} \quad t\le 0\end{cases}$$

puis l'ensemble $E(t,x;r)$ pour $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $r>0$ défini par

$$E(t,x;r)=\left\{(s,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ s\le t,\Phi(t-s,x-y)\ge 1/r^n\right\}.$$

a) On fixe $(t,x)\in\Omega_T$ et on pose

$$\phi(r)=\frac{1}{r^n}\iint_{E(t,x;r)}u(s,y)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,\partial y\,\partial s$$

pour $r>0$ assez petit pour que $E(t,x;r)\subset\Omega_T$. On suppose que $u\in\mathscr{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur Ω_T (i.e. vérifie $\partial_t u=\Delta u$ sur Ω_T). Montrer que ϕ est constante.

[Indication : on pourra utiliser la fonction ψ définie par $\psi(s,y)=-n/2\ln(-4\pi s)+|y|^2/4s+n\ln(r)$.]
b) En admettant que

$$\iint_{E(1)}\frac{|y|^2}{s^2}\,\partial y\,\partial s=4,$$

montrer que si $u\in\mathscr{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur Ω_T, alors

$$u(t,x)=\frac{1}{4r^n}\iint_{E(t,x;r)}u(s,y)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,\partial y\,\partial s$$

pour tout $E(t,x;r)\subset\Omega_T$.

2. Montrer que si Ω est convexe et qu'il existe un point $(t_0,x_0)\in\Omega_T$ tel que

$$u(t_0,x_0)=\max_{\overline{\Omega}_T}u$$

alors u est constante sur Ω_{t_0}.

Exercice 19 : une équation de diffusion semi-linéaire

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $T>0$. On considère l'équation

$$\partial_t u-\Delta u+f(u)=0,\quad f(u)=\sum_{k=0}^{2p-1}c_k u^k,\ c_{2p-1}>0,\ p\ge 1,$$

avec $u_{|\partial\Omega}=0$ et $u_{|t=0}=u_0$. On veut montrer que pour tout $u_0\in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u\in\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2([0,T];H_0^1(\Omega))\cap L^{2p}([0,T]\times\Omega)$.

1. Désignant par E_N l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les N premiers vecteurs propres du Laplacien dans $H_0^1\cap L^{2p}(\Omega)$ (P_N est la projection orthogonale associée), montrer qu'il existe une unique solution u_N (approximation de Galerkin de u) de

$$\partial_t u_N-\Delta u_N=P_N f(u_N)$$

dans $\mathscr{C}([0,T];E_N)$ et qu'il existe deux constantes $c,C>0$ telles que

$$\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|u_N(t)\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla u_N(t')\|_{L^2}^2\,\partial t'+c\int_0^T\|u_N(t')\|_{L^{2p}}^{2p}\,\partial t'\le CT+\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe $u \in L^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap L^{2p}([0,T]\times\Omega)$ limite faible de u_N et que $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega)) + L^q([0,T]\times\Omega)$ où q est l'exposant de Hölder conjugué de $2p$.

3. Montrer que $\big(f(u_N(t))|v\big) \to \big(f(u(t))|v\big)$ presque partout sur $[0,T]$, pour tout $v \in H_0^1 \cap L^{2p}(\Omega)$, et conclure.

Exercice 20 : un résultat d'explosion en temps fini

Sur $\mathbb{R}^+ \times (0,1)$ on considère

$$\partial_t u - \Delta u = u^3\,,$$

avec $u_{|x=0} = u_{|x=1} = 0$ et $u_{|t=0} = u_0$. Soit

$$c(t) := \int_0 u(t,x)\sin(\pi x)\,\partial x\,.$$

1. Montrer que

$$c'(t) \geq -\pi^2 c(t) + \frac{c^3}{4}\cdot$$

2. On suppose que $c(0) > 2$. En utilisant le fait que la solution de l'EDO

$$y'(t) = -\pi^2 y(t) + \frac{y^3}{4}$$

s'écrit

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - e^{2\pi^2(t-t_*)}}}\,,$$

montrer que

$$c(t) \to \infty \quad \text{lorsque} \quad t \to t_* := \frac{1}{\pi^2}\log\frac{c(0)}{\sqrt{c^2(0)-4}}\cdot$$

3.6. Solutions de quelques exercices

Principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

3. a) Dans la suite, on note $E(r) = E(0,0;r)$ pour tout $r > 0$. On commence par remarquer que si $r > 0$ est assez petit alors $E(t,x;r) \subset \Omega_T$. En effet, on peut réécrire l'ensemble $E(t,x;r)$ de la manière suivante :

$$E(t,x;r) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s < t \text{ et } |x-y|^2 \leq 4n(\log r)(t-s) - 2n(t-s)\log(4\pi(t-s))\right\}.$$

On voit immédiatement que si r est assez petit, $t - \frac{r^2}{4\pi} > 0$. Puis si r est assez petit $\log r \leq 0$ et donc si $(s,y) \in E(t,x;r)$, $|x-y|^2 \leq -2nr^2\log(r^2) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. On en déduit que pour r assez petit, $y \in \Omega$.

Puis par changement de variable, on a :

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n}\iint_{E(r)} u(s+t, y+x)\frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = \iint_{E(1)} u(r^2 s + t, r\,y + x)\,\frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds.$$

On dérive ensuite cette expression et on obtient :

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \iint_{E(1)} \left(2r\partial_s u(r^2 s+t, r y+x)\frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(r^2 s+t, r y+x) y_i \frac{|y|^2}{s^2}\right) dy\, ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(2\partial_s u(s+t, y+x)\frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \frac{|y|^2}{s^2}\right) dy\, ds \\ &=: J_1 + J_2,\end{aligned}$$

où on a de nouveau procédé à un changement de variable pour obtenir la deuxième égalité. Comme indiqué dans l'énoncé, on introduit la fonction ψ définie par

$$\psi(s,y) = -n/2\ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n\ln(r).$$

On observe alors que si $(s,y) \in \partial E(r)$, $\Phi(-s,-y) = 1/r^n$ et donc $\psi(s,y) = 0$ sur $\partial E(r)$. En utilisant cette remarque et en faisant une intégration par parties par rapport à y, on a :

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 2\partial_s u(s+t, y+x)\frac{|y|^2}{s}\, dy\, ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4\partial_s u(s+t, y+x) \sum_{i=1}^n y_i \partial_{y_i}\psi(s,y)\, dy\, ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4n\partial_s u(s+t, y+x)\psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{s y_i} u(s+t, y+x) y_i \psi(s,y)\right) dy\, ds.\end{aligned}$$

En intégrant par parties par rapport à s, on obtient :

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \partial_s\psi(s,y)\right) dy\, ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right)\right) dy\, ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t, y+x)\psi(s,y) - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i\right) dy\, ds - J_2.\end{aligned}$$

On utilise maintenant que u est solution de l'équation de la chaleur pour obtenir que

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= J_1 + J_2 \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n(\Delta u)(s+t, y+x)\psi(s,y) - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i\right) dy\, ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^n \iint_{E(r)} \left(4n\partial_{y_i} u(s+t, y+x)\partial_{y_i}\psi(s,y) - \frac{2n}{s}\partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i\, dy\, ds\right) dy\, ds \\ &= 0\end{aligned}$$

par définition de ψ. On en déduit que ϕ est constante.

b) En utilisant la question précédente, on a pour tout $r > 0$ tel que $E(t,x;r) \subset \Omega_T$,

$$\phi(r) = \lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \iint_{E(1)} u(\rho^2 s+t, \rho y+x)\,\frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = u(t,x)\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = 4\,u(t,x).$$

On va maintenant prouver l'égalité admise dans l'énoncé :

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = 4.$$

On note $J = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds$. En utilisant qu'on peut écrire $E(1)$ comme suit :

$$E(1) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ -\frac{1}{4\pi} \le s < 0 \text{ et } |y|^2 \le 2ns\log(-4\pi s)\right\},$$

on a :

$$\begin{aligned} J &= |\partial B(0,1)| \int_{-1/(4\pi)}^{0} \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{2ns\log(-4\pi s)}} r^2 r^{n-1}\, dr\, ds \\ &= |\partial B(0,1)| \int_0^{1/(4\pi)} \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{-2ns\log(4\pi s)}} r^{n+1}\, dr\, ds \\ &= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \int_0^{1/(4\pi)} s^{\frac{n-2}{2}} \left(-\log(4\pi s)\right)^{\frac{n+2}{2}}\, ds. \end{aligned}$$

Ensuite, par changements de variables, on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{n}{2}\, t^{\frac{n+2}{2}}\, dt \\ &= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n+4}{2}-1}\, ds. \end{aligned}$$

Puis, en identifiant le dernier terme intégral à $\Gamma(n/2+2)$ et en utilisant le fait que $|\partial B(0,1)| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, on a :

$$\begin{aligned} J &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}(2n)^{\frac{n+2}{2}} 2^{\frac{n+4}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)\, n^{\frac{n+4}{2}}} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}(2n)^{\frac{n+2}{2}} 2^{\frac{n+4}{2}}\, n(n+2)}{4(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)\, n^{\frac{n+4}{2}}} \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{n+2}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n(n+2)}{4}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

On conclut alors que $J = 4$.

4. On choisit r assez petit pour que $E(t_0,x_0;r) \subset \Omega_T$. En utilisant la propriété de la moyenne prouvée précédemment, on a :

$$u(t_0,x_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} u(s,y)\, \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\, ds$$

puis en utilisant que $\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\, ds = 1$, on en déduit que

$$\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} (u(t_0,x_0) - u(s,y))\, \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\, dy\, ds = 0$$

avec, par définition de (t_0,x_0), $u(t_0,x_0) - u(s,y) \ge 0$ pour tout (s,y). Donc u est constante sur $E(t_0;x_0;r)$.

Soit maintenant $(s_0,y_0) \in \Omega_T$ avec $s_0 < t_0$ alors, par convexité de Ω, le segment L qui joint (t_0,x_0) à (s_0,y_0) est inclus dans Ω_T. On définit

$$\sigma_0 = \min\{s \ge s_0,\ u(t,x) = u(t_0,x_0) \text{ pour tout } (t,x) \in L,\ s \le t \le t_0\}$$

qui est bien défini par continuité de u. Si $\sigma_0 > s_0$, alors $u(\sigma_0,z_0) = u(t_0,x_0)$ pour $(\sigma_0,z_0) \in L \cap \Omega_T$ et donc $u = u(t_0,x_0)$ sur $E(\sigma_0,z_0;r)$ si r est assez petit. Comme $E(\sigma_0,z_0;r)$ contient $L \cap \{(t,x) \in\ L : \sigma_0 - \sigma \le t \le \sigma_0\}$ pour $\sigma > 0$ petit, on a une contradiction. Donc $\sigma_0 = s_0$ et $u = u(t_0,x_0)$ sur L. On a ainsi montré que pour $s < t_0$, u est constante sur Ω_s. Par continuité, on en conclut que u est constante sur Ω_{t_0}.

Un résultat d'explosion en temps fini

1. La première inégalité vient de la multiplication de l'équation par $\sin(\pi x)$et intégration : il vient
$$\frac{dc}{dt} = -\pi^2 c + \int_0^1 u^3 \sin(\pi x)\, dx.$$
Si la donnée initiale est positive, alors la solution l'est aussi grâce au principe du maximum, et on peut écrire
$$\int_0^1 u \sin(\pi x)\, dx \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 u^3 \sin(\pi x)\, dx\right).$$
Le résultat suit.
2. Par Gronwall, on a $c(t) \geq y(t)$ avec
$$\frac{dy}{dt} = \pi^2(-y + \frac{y^3}{4})$$
dont la solution explicite est
$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - e^{2\pi^2(t-t_*)}}}$$
d'où le résultat.

CHAPITRE 4

Équation des ondes et de Schrödinger

Sommaire

4.1. Résolution d'une EDP d'évolution dans l'espace des distributions tempérées **90**
4.1.1. Quelques rappels et définitions sur les distributions 90
4.1.1.1. Rappels sur la convolution des distributions 90
4.1.1.2. Quelques définitions 90
4.1.2. Définition d'une solution au sens des distributions tempérées 91
4.1.3. Résolution au sens des distributions tempérées 92
4.2. Résolution de l'équation des ondes dans l'espace des distributions tempérées, et dans les espaces de Sobolev **93**
4.2.1. L'équation des ondes 93
4.2.2. Résolution de l'équation 93
4.2.3. Propriétés qualitatives 95
4.2.3.1. Conservation de l'énergie 96
4.2.3.2. Vitesse finie de propagation et domaine de dépendance 96
4.3. Résolution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des distributions tempérées et de Lebesgue **98**
4.3.1. Résolution de l'équation homogène 98
4.3.1.1. Solutions dans la classe de Schwartz 98
4.3.1.2. Solutions au sens des distributions tempérées 99
4.3.2. Résolution de l'équation inhomogène 101
4.3.3. Données initiales dans $L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq 2$ 101
4.3.3.1. Conservation de la masse et de l'énergie pour l'équation homogène 101
4.3.3.2. Estimation de dispersion pour l'équation homogène 102
4.3.4. Estimations de Strichartz 104
4.3.5. Conservation de la masse pour l'équation inhomogène 108
4.3.6. Résolution de NLS cubique 108
4.4. Exercices **110**

4.1. Résolution d'une EDP d'évolution dans l'espace des distributions tempérées

Dans ce paragraphe on donne la notion d'une solution dans l'espace des distributions tempérées à l'EDP

$$\begin{cases} \partial_t u + P(D)u = f\,, \quad t>0\,, \quad x\in\mathbb{R}^d \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où P est un opérateur différentiel à coefficients constants:

$$P\varphi(x) = \sum_{\substack{|\alpha|\le n \\ \alpha\in\mathbb{N}^d}} a_\alpha D^\alpha \varphi(x) = \sum_{\substack{|\alpha|\le n \\ \alpha\in\mathbb{N}^d}} a_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}}\partial^\alpha\varphi(x)\,.$$

On commence par quelques rappels et quelques définitions concernant les distributions, qui nous seront utiles par la suite.

4.1.1. Quelques rappels et définitions sur les distributions. —

4.1.1.1. Rappels sur la convolution des distributions. — On rappelle les résultats vus au Paragraphe 1.4.2 : on ne peut pas en général définir la convolution de deux distributions tempérées, car si $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $S\star\psi$ définie par

$$S\star\psi(x) := \langle S, \psi(x-\cdot)\rangle$$

est une distribution tempérée qui est en outre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, mais elle n'est en revanche pas forcément dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. De même si $\psi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $E\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $E\star\psi$ est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$E\star\psi(x) := \langle E, \psi(x-\cdot)\rangle\,.$$

Par contre si $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $E\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors $E\star\psi$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc définir le produit de convolution de $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $E\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ par la distribution tempérée $S\star E$ définie par

$$\langle S\star E, \psi\rangle := \langle S, \check{E}\star\psi\rangle\,,$$

pour tout $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, où la distribution $\check{E}$ est définie par

$$\langle\check{E},\psi\rangle := \langle E,\check{\psi}\rangle\,, \quad \check{\psi}(x) := \psi(-x)\,.$$

4.1.1.2. Quelques définitions. — On ne peut en général pas faire de produit de deux distributions, mais c'est possible lorsqu'elles agissent sur des variables différentes : on introduit la notion de produit tensoriel de deux distributions.

Définition 4.1.1. — *Le produit tensoriel $T_1\otimes T_2$ de deux distributions T_1 et T_2 définies sur deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^d$ est donné par la formule suivante :*

$$\forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega_1\times\Omega_2)\,, \quad \langle T_1\otimes T_2,\phi\rangle := \big\langle T_1, \langle T_2, \phi(x_1,\cdot)\rangle\big\rangle = \big\langle T_2, \langle T_1, \phi(\cdot,x_2)\rangle\big\rangle\,.$$

On laisse en exercice la vérification de la deuxième égalité. Donnons aussi la définition du prolongement d'une distribution.

Définition 4.1.2. — *Si T est une distribution dans $\mathscr{E}'(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\overline{T}\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ est le prolongement de T à $\mathbb{R}^n$ si pour tout $\phi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

$$\langle\overline{T},\phi\rangle_{\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)\times\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)} = \langle T, \phi_{|\Omega}\rangle_{\mathscr{E}'(\Omega)\times\mathscr{C}^\infty(\Omega)}\,.$$

Enfin il sera très utile de prendre la transformée de Fourier partielle d'une distribution. Pour fixer les notations du reste de ce chapitre, on ne considère que le cas d'une disitribution définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1.3. — *Si S est une distribution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier partielle $\widehat{S}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ de la manière suivante : pour tout $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$,*

$$\langle\widehat{S},\phi\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}:=\langle S,\widehat{\phi}\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$\widehat{\phi}(t,x):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i\xi\cdot x}\phi(t,\xi)\,d\xi.$$

4.1.2. Définition d'une solution au sens des distributions tempérées. — On s'intéresse ici à l'EDP (4.1.1). On note

$$\sigma(P)(\xi):=\sum_{|\alpha|\le n}a_\alpha\xi^\alpha$$

et on suppose que

$$\mathrm{Re}\,\sigma(P)(\xi)\ge 0\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{4.1.2}$$

Prenons la transformée de Fourier en x de (4.1.1). On trouve l'équation différentielle ordinaire, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$ fixé,

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\xi)+\sigma(P)(\xi)\widehat{u}(t,\xi)=\widehat{f}(t,\xi).$$

Supposons un instant que toutes les fonctions considérées sont régulières pour donner un sens à la formulation intégrale de l'équation. Alors pour tout $t\ge 0$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^d$ fixé, on a

$$\widehat{u}(t,\xi)=e^{-\sigma(P)(\xi)t}\widehat{u}_0(\xi)+\int_0^t e^{-\sigma(P)(\xi)(t-t')}\widehat{f}(t',\xi)\,dt'.$$

En notant $\star_t$ la convolution dans la variable temporelle on peut écrire aussi, en rappelant (1.5.3)

$$\widehat{u}(t,\xi)=\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-\sigma(P)(\xi)\cdot}\right)\star_t\left(\delta_{t=0}\widehat{u}_0(\xi)+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\widehat{f}(\cdot,\xi)\right).$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-\sigma(P)(\xi)t}\right)&=\delta_{t=0}e^{-\sigma(P)(\xi)t}-\sigma(P)(\xi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-\sigma(P)(\xi)t}\\&=\delta_{t=0}-\sigma(P)(\xi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-\sigma(P)(\xi)t}\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\xi)&=\delta_{t=0}\widehat{u}_0(\xi)+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\widehat{f}(\cdot,\xi)-\sigma(P)(\xi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}e^{-\sigma(P)(\xi)t}\star_t\left(\delta_{t=0}\widehat{u}_0(\xi)+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\widehat{f}(\cdot,\xi)\right)\\&=\delta_{t=0}\widehat{u}_0(\xi)+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\widehat{f}(\cdot,\xi)-\sigma(P)(\xi)\widehat{u}(t,\xi)\end{aligned}$$

et donc l'EDP (4.1.1) se reformule ainsi :

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}+\sigma(P)(\xi)\widehat{u}=\delta_{t=0}\widehat{u}_0+\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\widehat{f}.$$

Cette formule fait sens dans l'espace des distributions tempérées, ce qui conduit à la définition d'une solution au sens des distributions tempérées de (4.1.1) en prenant la transformée de Fourier inverse de cette expression.

Définition 4.1.4. — *Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants vérifiant (4.1.2). Soient $u_0\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d)$. Une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ de (4.1.1) est une distribution tempérée u telle que*

$$\begin{cases}\partial_t u+P(D)u=\overline{f}+\delta_{t=0}\otimes u_0\quad dans\quad\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\\\qquad Supp\,u\subset\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\end{cases}$$

où $\overline{f}$ est le prolongement de f par 0 pour $t \leq 0$.

4.1.3. Résolution au sens des distributions tempérées. — La proposition suivante montre que cette définition est raisonnable.

Proposition 4.1.5. *— Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants vérifiant (4.1.2). Soient $u_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^d)$. Alors*

1. *Il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ du problème de Cauchy*
$$\begin{cases} \partial_t u + P(D_x)u = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$
et pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto u(t,x)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. *Il existe une unique solution v au sens des distributions tempérées du même problème de Cauchy.*
3. *Les solutions u et v coïncident dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^d)$:*
$$u_{|\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d} = v_{|\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d}.$$

Démonstration. — Pour le premier point il suffit de résoudre l'équation en variable de Fourier, en écrivant la solution sous forme intégrale

$$\forall\, t \geq 0, \quad \widehat{u}(t,\xi) = e^{-\sigma(P)(\xi)t}\,\widehat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\sigma(P)(\xi)(t-t')}\,\widehat{f}(t',\xi)\,dt'.$$

L'hypothèse (4.1.2) assure que la solution est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, et $\xi \mapsto \partial_t^p \widehat{u}(t,\xi)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \geq 0$ et tout entier p. Le résultat suit en prenant la transformée de Fourier inverse (et on a unicité de la solution car on a raisonné par condition nécessaire pour obtenir la formule précédente).

On définit alors

$$v(t,x) := u(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \qquad v(t,x) := 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^- \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^d.$$

La définition même de v fournit le dernier point de la proposition, donc il s'agit de vérifier que v est l'unique solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy. Pour cela on se place en variable de Fourier et l'on fixe la variable $\xi \in \mathbb{R}^d$. La discussion précédant l'énoncé de la Définition 4.1.4 permet de montrer que v est bien solution au sens des distributions tempérées du problème de Cauchy.

Pour montrer qu'il n'y a qu'une solution, on se place à ξ fixé et on montre que $t \mapsto v(t,\xi)$ est l'unique solution au sens des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{d}{dt}\widehat{v}(t,\xi) + \sigma(P)(\xi)\widehat{v}(t,\xi) = \widehat{\overline{f}}(t,\xi) + \delta_{t=0}\widehat{u}_0(\xi) \quad \text{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R})$$

à support dans $\mathbb{R}^+$. Le résultat suivra alors en prenant la transormée de Fourier inverse en ξ. Si w en est une autre, posons $T := \widehat{v}(\cdot,\xi) - w$, qui vérifie l'équation suivante dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{d}{dt}T + \sigma(P)(\xi)\,T = 0$$

avec Supp $T \subset \mathbb{R}^+$. Mais alors $\frac{d}{dt}(e^{\sigma(P)(\xi)t}T) = 0$ donc la distribution $t \mapsto e^{\sigma(P)(\xi)t}\widehat{T}$ est constante et à support dans $\mathbb{R}^+$ donc elle est nulle. Le résultat suit. □

4.2. Résolution de l'équation des ondes dans l'espace des distributions tempérées, et dans les espaces de Sobolev

4.2.1. L'équation des ondes. — On considère l'équation

$$\Box u := \partial_t^2 u - \Delta u = f\,, \quad t>0\,, \quad x\in\mathbb{R}^d$$

qui est équivalente au système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t u = v \\ \partial_t v = \Delta u + f \end{cases} \qquad t>0\,, \quad x\in\mathbb{R}^d$$

ou encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A(D)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Supp}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\,, \qquad A(D) := -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

dont on va chercher une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\times\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, qui soit nulle si $t<0$. On note que le spectre de la matrice

$$\sigma(A)(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ |\xi|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

est $\{-i|\xi|, i|\xi|\}$. On peut adapter l'analyse du paragraphe précédent pour trouver une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ de (4.2.1) s'obtient en écrivant le système sous la forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A(D)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar f \end{pmatrix} + \delta_{t=0}\otimes\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Supp}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\,,$$

où $\bar f$ est égale à f sur $t>0$ et est nulle sur $t<0$. On obtient alors l'équation des ondes scalaire en écrivant le système composante par composante, ce qui donne

$$\Box u = \delta'_{t=0}\otimes u_0 + \delta_{t=0}\otimes u_1 + \bar f\,.$$

Définition 4.2.1. — *Soit $f\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d)$ et $(u_0,u_1)\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$. Une solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ de*

$$\begin{cases} \Box u = f\,, \quad t>0\,, \quad x\in\mathbb{R}^d \\ (u,\partial_t u) = (u_0,u_1) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

est une distribution tempérée $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\Box u = \delta'_{t=0}\otimes u_0 + \delta_{t=0}\otimes u_1 + \bar f \quad et \quad Supp\, u\subset\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\,.$$

4.2.2. Résolution de l'équation. —

Proposition 4.2.2. — *Il existe une unique distribution tempérée S "solution élémentaire dans le futur" de $\Box$, c'est-à-dire une unique $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\begin{cases} \Box S = \delta_{(t,x)=(0,0)} \\ Supp\, S\subset\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\,. \end{cases}$$

On a

$$\widehat S(t,\xi) = \mathbb{1}_{t>0}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\,, \quad (t,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\,.$$

Remarque 4.2.3. — *On trouvera en exercice la formulation dans la variable x plutôt qu'en Fourier. En particulier on verra que le support de S est inclus dans $\Gamma_+ := \left\{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\,,\ |x|\le t\right\}$ (voir aussi le Théorème 4.2.7).*

Démonstration. — Prenons la transformée de Fourier en x de l'équation: il vient au sens des distributions tempérées

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{S}(t,\xi) + |\xi|^2 \widehat{S}(t,\xi) = \delta_{t=0} \otimes 1 \\ \operatorname{Supp} \widehat{S} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d . \end{cases}$$

Pour montrer l'existence d'une solution, il s'agit de vérifier que

$$\widehat{S}(t,\xi) := \mathbb{1}_{t>0} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

est bien solution de cette équation. On a

$$\begin{aligned} \partial_t \Big(\mathbb{1}_{t>0} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \Big) &= \delta_{t=0} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} + \mathbb{1}_{t>0} \cos(t|\xi|) \\ &= \mathbb{1}_{t>0} \cos(t|\xi|) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \Big(\mathbb{1}_{t>0} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \Big) &= \delta_{t=0} \cos(t|\xi|) - \mathbb{1}_{t>0} |\xi| \sin(t|\xi|) \\ &= \delta_{t=0} \otimes 1 - |\xi|^2 \mathbb{1}_{t>0} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \end{aligned}$$

donc le résultat suit.

On vérifie facilement que $\widehat{S}$ est une distribution tempérée.

Il reste à montrer l'unicité. Supposons que S et T sont deux solutions élémentaires, alors $W = S - T$ vérifie

$$\begin{cases} \Box W = 0 \\ \operatorname{Supp} W \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d . \end{cases}$$

Alors

$$(\partial_t + i|\xi|)(\partial_t - i|\xi|) \widehat{W}(t,\xi) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$e^{-it|\xi|} \partial_t \big(e^{2it|\xi|} \partial_t (e^{-it|\xi|} \widehat{W}(t,\xi)) \big) = 0 .$$

Donc $e^{2it|\xi|} \partial_t (e^{-it|\xi|} \widehat{W}(t,\xi))$ est constante, avec $\widehat{W}(t,\xi)$ à support dans $t \geq 0$, donc $\partial_t (e^{-it|\xi|} \widehat{W}(t,\xi)) = 0$ et donc $e^{-it|\xi|} \widehat{W}(t,\xi) = 0$, d'où le résultat. □

Théorème 4.2.4. — *Si u_0, u_1 sont dans $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^d)$ et f est dans $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^d)$, alors (4.2.2) a une unique solution dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, qui est définie par*

$$\forall\, t \geq 0 , \quad u(t) = \partial_t S \star (\delta_{t=0} \otimes u_0) + S \star (\delta_{t=0} \otimes u_1) + S \star \bar{f} \tag{4.2.3}$$

(avec $\star$ la convolution dans les variables t et x) ou encore

$$\forall\, t \geq 0 , \quad \widehat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|) \widehat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \widehat{u}_1(\xi) + \Big(\frac{\sin(\cdot|\xi|)}{|\xi|} \mathbb{1}_{t>0} \Big) \star_t \widehat{\bar{f}}(\cdot,\xi) . \tag{4.2.4}$$

Enfin si de plus $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ et $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ pour un $s \in \mathbb{R}$, alors $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^s(\mathbb{R}^d))$ et $\partial_t u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. — Commençons par vérifier que (4.2.3) fournit bien une solution. Comme $\Box S = \delta_{(t,x)=(0,0)}$, on a

$$\begin{aligned} \Box \big(\partial_t S \star (\delta_{t=0} \otimes u_0) \big) &= \Box \big(S \star (\delta'_{t=0} \otimes u_0) \big) \\ &= \big(\Box S \big) \star (\delta'_{t=0} \otimes u_0) \\ &= \delta_{(t,x)=(0,0)} \star (\delta'_{t=0} \otimes u_0) \end{aligned}$$

et donc

$$\Box\big(\partial_t S \star (\delta_{t=0}\otimes u_0)\big) = \delta'_{t=0}\otimes u_0\,.$$

Le calcul est similaire pour les autres termes de (4.2.3).

Vérifions maintenant que le support de u est bien inclus dans $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}\,\big(\partial_t S\star(\delta_{t=0}\otimes u_0)\big) &\subset \mathrm{Supp}\,(\partial_t S)+\mathrm{Supp}\,(\delta_{t=0}\otimes u_0)\\ &\subset \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d+\big(\{0\}\times\mathbb{R}^d\big)\\ &\subset \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d,\end{aligned}$$

et de même le calcul est similaire pour les autres termes de (4.2.3).

L'expression (4.2.4) s'obtient directement par passage en Fourier (partiellement, en x), et l'unicité découle du même argument que dans la démonstration de la Proposition 4.2.2.

Pour conclure supposons que $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ et $(u_0,u_1)\in H^s(\mathbb{R}^d)\times H^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ pour un $s\in\mathbb{R}$. Alors l'application

$$(t,\xi)\mapsto\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\cos(t|\xi|)\,\widehat{u}_0(\xi)$$

est dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))$ par le théorème de convergence dominée, et donc $\Big(\partial_t\widehat{S}\star(\delta_{t=0}\otimes\widehat{u}_0)\Big)_{|\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^d}$ se prolonge par continuité en $t=0$ en un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,d\xi))$. Le second terme de (4.2.4) s'analyse de la même manière, une fois remarqué que

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\Big| &\le \frac{1}{|\xi|}\mathbb{1}_{|\xi|\ge1}+t\mathbb{1}_{|\xi|\le1}\\ &\le \frac{2}{1+|\xi|}\mathbb{1}_{|\xi|\ge1}+\frac{2t}{1+|\xi|}\mathbb{1}_{|\xi|\le1}\\ &\le \frac{2(1+t)}{1+|\xi|}\,.\end{aligned}$$

Par convergence dominée on a en effet que

$$(t,\xi)\mapsto\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\,\widehat{u}_1(\xi)$$

est dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))$. Enfin si de plus $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ alors

$$(t,\xi)\mapsto\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{s}{2}}\int_0^t\frac{\sin\big((t-t')|\xi|\big)}{|\xi|}\,\widehat{f}(t',\xi)\,dt'$$

est dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))$. Le théorème est démontré. □

Remarque 4.2.5. — *Les calculs ci-dessus indiquent que l'on peut en fait omettre l'hypothèse que les données et la source sont des distributions à support compact. Il suffirait qu'elles soient tempérées pour donner un sens à l'équation. Nous montrerons plus loin que la solution fondamentale de l'opérateur des ondes est à support compact tant que t est dans un compact.*

Par ailleurs si $f\in L^1(\mathbb{R}^+;H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ alors de plus $u\in L^\infty(\mathbb{R}^+;H^s(\mathbb{R}^d))$ et $\partial_t u\in L^\infty(\mathbb{R}^+;H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$.

4.2.3. Propriétés qualitatives. —

4.2.3.1. Conservation de l'énergie. —

Théorème 4.2.6. — *Si u_0, u_1 sont dans $H^1 \times L^2(\mathbb{R}^d)$ et u est l'unique solution de (4.2.2) avec $f = 0$, dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$, alors l'énergie*

$$E(t) := \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2\Big)$$

est constante.

Démonstration. — On peut utiliser la formule explicite (4.2.4). Une autre méthode (valable seulement si u est suffisamment régulière, il faut donc procéder par approximation pour justifier le calcul) consiste à multiplier l'équation par $\partial_t u$ et intégrer par parties:

$$\begin{aligned} 0 = \big(\Box u | \partial_t u\big) &= \big(\partial_t^2 u | \partial_t u\big) - \big(\Delta u | \partial_t u\big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \big(\nabla u | \nabla \partial_t u\big) \\ &= \frac{d}{dt} E(t) \ . \end{aligned}$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle ne repose pas sur une formule exacte pour la solution, elle est donc beaucoup plus robuste. □

4.2.3.2. Vitesse finie de propagation et domaine de dépendance. —

***Théorème 4.2.7* (Vitesse finie de propagation et domaine de dépendance)**. — *Soient u_0, u_1 dans $H^1 \times L^2(\mathbb{R}^d)$, et u l'unique solution de (4.2.2) avec $f = 0$, dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$. Si u_0 et u_1 sont nulles dans $B(x_0, R_0)$ alors*

$$u \equiv 0 \quad \textit{dans le cône} \quad \Big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \,/\, t \geq 0 \quad \textit{et} \quad |x - x_0| \leq R_0 - t\Big\}.$$

Si u_0 et u_1 sont à support dans $B(x_0, R_0)$ alors

$$\mathit{Supp}\, u \subset \Big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \,/\, t \geq 0 \quad \textit{et} \quad x \in B(x_0, R_0 + t)\Big\}.$$

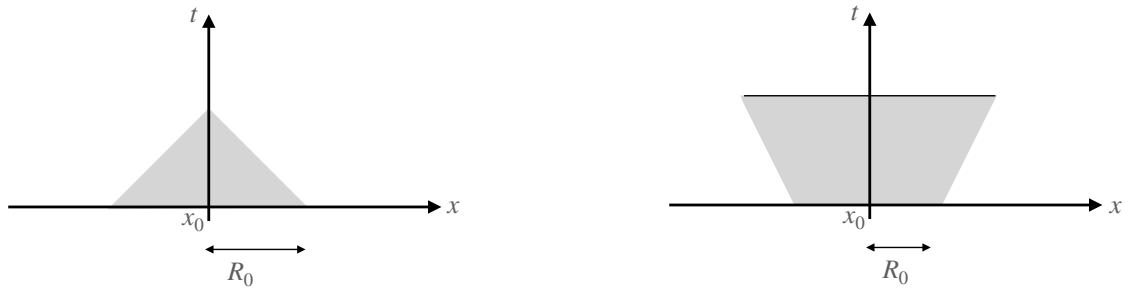

FIGURE 6. Sur la figure de gauche, domaine de dépendance. Sur la figure de droite, vitesse finie de propagation.

Démonstration. — Dans les Exercices on montre le résultat (plus fort puisqu'il est valable dans le cadre des solutions tempérées)

$$\mathrm{Supp}\, S \subset \Big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \,/\, t \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in B(0,t)\Big\}.$$

Comme pour le Théorème 4.2.6 au-dessus, on propose ici une démonstration qui ne repose pas sur la formule explicite de la solution, mais sur une estimation a priori. Soit donc $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $R_0 > 0$, et posons, pour $0 \le t \le R_0$,

$$F(t) := \frac{1}{2}\int_{B(x_0,R_0-t)} \big(|\nabla u(t,x)|^2 + |\partial_t u(t,x)|^2\big)\,dx.$$

En notant $\Omega_t := B(x_0, R_0 - t)$ on remarque que

$$F'(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \partial_t\big(|\nabla u(t,x)|^2 + |\partial_t u(t,x)|^2\big)\,dx - \frac{1}{2}\int_{|x-x_0|=R_0-t} \big(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\big)dx.$$

Mais

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \partial_t|\partial_t u(t,x)|^2\,dx &= \int_{\Omega_t} \partial_t^2 u(t,x)\,\partial_t u(t,x)\,dx \\ &= \int_{\Omega_t} \Delta u\,\partial_t u(t,x)\,dx,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} \Delta u\,\partial_t u(t,x)\,dx &= \int_{\Omega_t} \mathrm{div}_x\big(\nabla u\partial_t u\big)(t,x)\,dx - \int_{\Omega_t} \nabla u\cdot\nabla\partial_t u(t,x)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega_t} \nabla u(t,x)\cdot \nu_t(x)\,\partial_t u(t,x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \partial_t|\nabla u(t,x)|^2\,dx,\end{aligned}$$

où $\nu_t(x)$ est la normale unitaire extérieure de $\partial\Omega_t$ en x. On a donc

$$F'(t) = \int_{|x-x_0|=R_0-t} \nabla u(t,x)\cdot\nu_t(x)\,\partial_t u(t,x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{|x-x_0|=R_0-t} \big(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\big)dx.$$

Mais

$$2\big|\nabla u\cdot\nu_t(x)\,\partial_t u\big| \le |\partial_t u(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2$$

donc on obtient que $F'(t) \le 0$. En particulier si u_0 et u_1 sont nulles sur $B(x_0, R_0)$, alors $u(t)$ s'annule sur le cône $|x - x_0| \le R_0 - t$.

Montrons de même que si u_0 et u_1 ont leur support dans $B(x_0, R)$, alors pour tout $t \ge 0$ le support de $u(t)$ est dans $B(x_0, R + t)$. Soit y_0 tel que $|x_0 - y_0| > R_0 + t$. On note que

$$|y - y_0| \le t \Rightarrow |y - x_0| \ge |x_0 - y_0| - |y - y_0| \ge R_0 + t - t = R_0$$

donc $\overline{B}(y_0, t) \subset {}^c\overline{B}(x_0, R_0)$. On en déduit que u_0 et u_1 sont nulles sur $B(y_0, t)$ et donc $u(t, y_0) = 0$.

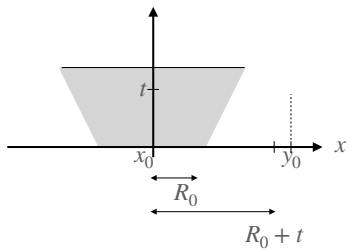

FIGURE 7.

Le théorème est démontré. □

4.3. Résolution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des distributions tempérées et de Lebesgue

On considère l'équation de Schrödinger homogène

$$\left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u &=& 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ u_{|t=0} &=& u_0\,, \end{array}\right. \tag{4.3.1}$$

et inhomogène

$$\left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u &=& f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \\ u_{|t=0} &=& u_0\,, \end{array}\right. \tag{4.3.2}$$

où u, comme le terme source f, est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. La donnée initiale u_0 est une fonction de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque 4.3.1. — *On ne s'intéresse qu'aux temps positifs mais par réversibilité c'est équivalent de considérer $t \in \mathbb{R}$.*

4.3.1. Résolution de l'équation homogène. —

4.3.1.1. Solutions dans la classe de Schwartz. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et soit k un entier. On dit que f appartient à $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \leq k$, $\partial_t^n f(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq p$,

$$\lim_{t' \to t} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \langle x \rangle^q \partial_t^n \partial_x^\alpha \big(f(t',x) - f(t,x) \big) \right| = 0\,.$$

Dans la suite on choisit la détermination principale de la racine carrée.

Théorème 4.3.2. — *Soit $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ de (4.3.1), qui est donnée par*

$$\forall\, t > 0\,, \quad u(t) = E(t) \star u_0$$

avec

$$E(t,x) := \frac{1}{(-2\pi i\, t)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{|x|^2}{2t}}\,.$$

De plus $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$.

On note que si $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors le produit de convolution de E avec u_0 est bien défini car $x \mapsto E(t,x)$ est une fonction bornée.

Démonstration. — Cherchons une solution de (4.3.1) dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$. En prenant la transformée de Fourier en x on trouve

$$i\partial_t \widehat{u}(t,\xi) + \frac{1}{2}|\xi|^2 \widehat{u}(t,\xi) = 0\,, \tag{4.3.3}$$

dont la solution est

$$\widehat{u}(t,\xi) := e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\, \widehat{u}_0(\xi)\,.$$

On remarque que $\widehat{u} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$, donc par transformée de Fourier inverse (toujours en x), on trouve que $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$. On définit

$$\widehat{E}(t,\xi) := e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\,,$$

et l'on remarque que $\widehat{E}$ est bornée mais n'est pas intégrable, et il s'agit néanmoins de calculer la transformée de Fourier inverse de cette distribution tempérée : on va montrer que pour tout $t>0$, $\mathscr{F}^{-1}\big(\widehat{E}(t)\big)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ donnée par la fonction

$$E(t,x)=\frac{1}{(-2\pi i t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|x|^2}{2t}}.$$

On rappelle que pour tout réel $a>0$,

$$\mathscr{F}^{-1}\big(e^{-\frac{a|\cdot|^2}{2}}\big)(x)=\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2a}},$$

et l'on souhaite étendre ceci à $a=-it, t>0$. Soit $\mathscr{H}:=\big\{z\in\mathbb{C}\,/\,\operatorname{Re}z>0\big\}$. On écrit pour tout $z\in\mathscr{H}$, son argument $\theta:=\operatorname{Arg}z\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $z=|z|e^{i\theta}$ et $z^{\frac{d}{2}}=|z|^{\frac{d}{2}}e^{id\frac{\theta}{2}}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, les fonctions

$$z\in\mathscr{H}\mapsto\mathscr{F}^{-1}\big(e^{-z\frac{|\cdot|^2}{2}}\big)(x):=\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{ix\cdot\xi-z\frac{|\xi|^2}{2}}\,d\xi$$

$$z\in\mathscr{H}\mapsto\frac{1}{(2\pi z)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2z}}$$

sont holomorphes, et elles coïncident sur $\big\{z\in\mathscr{H}\,/\,\operatorname{Im}z=0\big\}$, elles coïncident donc sur $\mathscr{H}$.

Soit maintenant $t>0$, et soit une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}$ telle que $z_n\to -it$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}^d$

$$\mathscr{F}^{-1}\big(\widehat{E}(-z_n,\cdot)\big)=:f_n(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{ix\cdot\xi-z_n\frac{|\xi|^2}{2}}\,d\xi=g_n(x):=\frac{1}{(2\pi z_n)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{2z_n}}.$$

Dans la suite on note $\langle f,g\rangle$ pour $\langle f,g\rangle_{\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}$. Pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty}\langle g_n,\varphi\rangle=\lim_{n\to\infty}\int g_n(x)\varphi(x)\,dx=\int\frac{1}{(-2\pi i t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|x|^2}{2t}}\varphi(x)\,dx$$

donc en particulier g_n converge vers $\dfrac{1}{(-2\pi i t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|\cdot|^2}{2t}}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. De même

$$\lim_{n\to\infty}\langle\widehat{E}(-z_n,\cdot),\phi\rangle=\lim_{n\to\infty}\int e^{-z_n\frac{|\xi|^2}{2}}\phi(\xi)\,d\xi=\int e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\phi(\xi)\,d\xi,$$

donc $e^{-z_n\frac{|\cdot|^2}{2}}$ converge vers $e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et par continuité de $\mathscr{F}^{-1}$ sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on obtient que f_n converge vers $\mathscr{F}^{-1}\big(e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\big)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Finalement il vient

$$\mathscr{F}^{-1}\big(e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\big)=\frac{1}{(-2\pi i t)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\frac{|\cdot|^2}{2t}}.$$

L'unicité de la solution de (4.3.1) provient du fait qu'on a raisonné par condition nécessaire, et le théorème suit. □

4.3.1.2. Solutions au sens des distributions tempérées. — Avant d'énoncer le théorème, on remarque que par définition de la solution fondamentale E, on peut donner un sens à $E(t)\star u_0$ si $u_0\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet $\widehat{E}(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}^d$ donc $\widehat{E}(t)\widehat{u}_0\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, et le résultat suit du fait que la transformée de Fourier est continue sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Le calcul suivant sera utile par la suite : si $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ alors pour tout $t>0$

$$\begin{aligned}\langle E(t)\star u_0,\phi\rangle&=(2\pi)^{-d}\langle\widehat{E}(t)\widehat{u}_0,\overline{\mathscr{F}}(\phi)\rangle\\&=(2\pi)^{-d}\langle e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\widehat{u}_0,\overline{\mathscr{F}}(\phi)\rangle\\&=(2\pi)^{-d}\big\langle\widehat{u}_0,e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)\big\rangle.\end{aligned}$$

En particulier grâce à la continuité de $\mathscr{F}^{-1}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, pour tout $t>0$ l'application $u_0 \mapsto E(t)\star u_0$ est continue dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ au sens où si u_0^n est une suite de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers u_0 dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire $\langle u_0^n - u_0, \varphi\rangle \to 0$ pour tout φ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$) alors pour tout $t>0$, $E(t)\star u_0^n$ converge vers $E(t)\star u_0$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.3.3. — *Soit $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R};\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ de (4.3.1), au sens suivant: pour toute fonction $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, l'application*

$$t\in\mathbb{R}^+ \longmapsto \langle u(t),\varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

est continue, et

$$\forall \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}),\quad \forall T>0,\quad \int_0^T \big\langle u(t), i\partial_t\phi(t)+\frac{1}{2}\Delta\phi(t)\big\rangle dt = \langle u(T), i\phi(T)\rangle - \langle u_0, i\phi(0)\rangle. \tag{4.3.4}$$

Elle est donnée par

$$u(t) = E(t)\star u_0.$$

Démonstration. — Par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on peut approximer u_0 par une suite u_0^n de fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'on définit $u^n(t)$ la solution de (4.3.1) associée à u_0^n. On a

$$u^n(t) = E(t)\star u_0^n.$$

Comme noté au-dessus,

$$u^n(t)\to E(t)\star u_0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs en écrivant $u^n(t) = \mathscr{F}^{-1}\big(e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\widehat{u}_0^n\big)$ on a par continuité de $\mathscr{F}^{-1}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ que

$$u^n(t)\to \mathscr{F}^{-1}\big(e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\widehat{u}_0\big) =: u(t) \quad \text{dans} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

On a ainsi

$$u(t) = E(t)\star u_0.$$

Puis on note que pour tout $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ on a

$$\langle u(t),\phi\rangle = (2\pi)^{-d}\big\langle \widehat{u}_0, e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)\big\rangle$$

et comme $e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ on a que $t\in\mathbb{R}^+\longmapsto\langle u(t),\phi\rangle$ est continue.

Montrons maintenant (4.3.4). Si $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ et $T>0$ sont donnés alors

$$\begin{aligned}
&\langle u(T), i\phi(T)\rangle - \langle u_0, i\phi(0)\rangle - \int_0^T \big\langle u(t), i\partial_t\phi(t)+\frac{1}{2}\Delta\phi(t)\big\rangle dt\\
&= (2\pi)^{-d}\Big(\big\langle \widehat{u}_0, ie^{iT\frac{|\cdot|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)(T)\big\rangle - \big\langle \widehat{u}_0, i\overline{\mathscr{F}}(\phi)(0)\big\rangle - \int_0^T \Big\langle \widehat{u}_0, e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\big(i\partial_t\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t) - \frac{1}{2}|\cdot|^2\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t)\big)\Big\rangle dt\Big)\\
&= (2\pi)^{-d}\Big(\big\langle \widehat{u}_0, ie^{iT\frac{|\cdot|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)(T)\big\rangle - \big\langle \widehat{u}_0, i\overline{\mathscr{F}}(\phi)(0)\big\rangle - \Big\langle \widehat{u}_0, \int_0^T e^{it\frac{|\cdot|^2}{2}}\big(i\partial_t\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t) - \frac{1}{2}|\cdot|^2\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t)\big)dt\Big\rangle\Big).
\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\int_0^T e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\partial_t\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t,\xi)dt = e^{iT\frac{|\xi|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)(T,\xi) - \overline{\mathscr{F}}(\phi)(0,\xi) - \int_0^T \frac{i}{2}|\xi|^2 e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t,\xi)dt$$

d'où

$$\int_0^T e^{it\frac{|\xi|^2}{2}} i\partial_t\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t,\xi)dt = e^{iT\frac{|\xi|^2}{2}} i\overline{\mathscr{F}}(\phi)(T,\xi) - i\overline{\mathscr{F}}(\phi)(0,\xi) + \int_0^T \frac{1}{2}|\xi|^2 e^{it\frac{|\xi|^2}{2}}\overline{\mathscr{F}}(\phi)(t,\xi)dt$$

et enfin on obtient

$$\langle u(T), i\phi(T)\rangle - \langle u_0, i\phi(0)\rangle - \int_0^T \big\langle u(t), i\partial_t\phi(t)+\frac{1}{2}\Delta\phi(t)\big\rangle dt = 0.$$

Pour démontrer l'unicité on raisonne par dualité : on suppose que $u_0 = 0$ et on considère l'unique solution associée, notée u. On va montrer que pour tout $T > 0$ et tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$,

$$\langle u(T), \psi\rangle = 0\,.$$

Soit $\chi_T \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\chi_T \equiv 1$ sur $[0,T]$. Alors la fonction $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ définie par sa transformée de Fourier en x par

$$\widehat{\phi}(t,\xi) := e^{-i(T-t)\frac{|\xi|^2}{2}}\widehat{\psi}(\xi)\chi_T(t)$$

vérifie

$$\partial_t\phi + \frac{i}{2}\Delta\phi = 0$$

sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ et donc par (4.3.4)

$$\forall \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\,,\quad \langle u(T),\psi\rangle = \langle u_0, e^{iT\Delta}\psi\rangle = 0\,.$$

On a donc $u(T) = 0$ pour tout $T \in \mathbb{R}^+$, et le théorème est démontré. □

Remarque 4.3.4. — *Supposons que $u_0 = \delta_0$. Alors*

$$\forall\, t > 0\,,\quad u(t) = E(t) = \frac{1}{(-2\pi i\, t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-i\frac{|x|^2}{2t}}\,.$$

Cela est un phénomène de vitesse infinie de propagation. En particulier u est une fonction analytique dès que $t > 0$.

Notons $S(t) := e^{-it\frac{\Delta}{2}}$ l'opérateur d'évolution linéaire

$$S(t) : u_0 \longmapsto u(t) \text{ solution de (4.3.1)}\,.$$

On a donc que les applications suivantes sont continues pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} S(t) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \\ \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\,. \end{aligned}$$

4.3.2. Résolution de l'équation inhomogène. — On peut montrer, par les mêmes méthodes qu'au-dessus, que si $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$, alors il existe une unique solution à (4.3.2) au sens où

$$\forall\, T > 0\,,\quad \forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)\,,\quad \langle u(T),\phi(T)\rangle - \langle u(0),\phi(0)\rangle = \int_0^T \Big\langle u(t), \partial_t\phi(t) + \frac{i}{2}\Delta\phi(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \langle f(t),\phi(t)\rangle dt\,,$$

et elle est dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.

4.3.3. Données initiales dans $L^p(\mathbb{R}^d), 1 \le p \le 2$. —

4.3.3.1. Conservation de la masse et de l'énergie pour l'équation homogène. —

Théorème 4.3.5. — *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors la solution de (4.3.1) construite au Théorème 4.3.3 vérifie $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))$ et on a la conservation de la masse*

$$\forall\, t \ge 0 \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,. \tag{4.3.5}$$

Démonstration. — Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On sait que la solution est dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$ puisque $\widehat{E}$ est bornée dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. L'égalité (4.3.5) peut s'obtenir en utilisant la formule explicite de la solution. Une autre approche consiste à multiplier (formellement) l'équation (4.3.1) par $\bar{u}$ et à multiplier l'équation

$$-i\partial_t \overline{u} - \frac{1}{2}\Delta \overline{u} = 0$$

par $-u$, à sommer les deux équations et à intégrer sur $\mathbb{R}^d$. On trouve

$$i\int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t u\,\overline{u} + \partial_t \overline{u}\,u\right)(t,x)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(t,x)\,\overline{u}(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\overline{u}(t,x)\,u(t,x)\,dx = 0$$

donc

$$\frac{i}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2(t,x)dx = 0\,.$$

Pour rendre cet argument rigoureux on commence par régulariser u_0 dans L^2 par $u_0^n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, auquel cas la solution associée u^n vérifie $u^n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+; \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ et le calcul précédent fonctionne : on trouve

$$\forall\, t \geq 0 \quad \|u^n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0^n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

On montre de même que cette suite est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$ et par unicité de la limite au sens des distributions tempérées elle converge vers la solution u qui est en particulier dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$. L'égalité d'énergie est donc démontrée pour u. □

Théorème 4.3.6. — *Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, alors la solution de (4.3.1) construite au Théorème 4.3.3 vérifie $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^d))$ et la conservation de l'énergie*

$$\forall\, t \geq 0 \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Démonstration. — L'argument formel est identique en multipliant l'équation par $\Delta\bar{u}$ et en prenant la partie imaginaire. On raisonne alors une fois de plus par approximation. □

4.3.3.2. Estimation de dispersion pour l'équation homogène. —

Théorème 4.3.7. — *Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors la solution de (4.3.1) associée vérifie pour tout $t > 0$ que $u(t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ et tend vers zéro à l'infini en x, et*

$$\forall\, t > 0, \quad \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Démonstration. — L'inégalité de dispersion provient de l'inégalité de Young. La continuité en espace de $u(t)$ provient de celle de $E(t)$ et du théorème de convergence dominée, puisque

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\int e^{-i\frac{|x-y|^2}{2t}}\,u_0(y)\,dy\,.$$

Enfin en écrivant

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\,e^{-i\frac{|x|^2}{2t}}\int e^{i\frac{x\cdot y}{t} - i\frac{|y|^2}{2t}}\,u_0(y)\,dy$$

le résultat de décroissance vers 0 quand x tend vers l'infini suit par le lemme de Riemann Lebesgue, pour tout $t > 0$. □

On a donc montré que les applications suivantes sont continues :

$$S(t) : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d), \quad \text{de norme} \quad 1$$

$$L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{de norme} \quad \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}}\,.$$

On va mettre en place un argument dit "d'interpolation" qui permettra de conclure que

$$S(t) : L^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad 1 \le p \le 2, \quad \text{de norme} \quad \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{2}}}\cdot \tag{4.3.6}$$

Remarque 4.3.8. — *La continuité (4.3.6) est fausse pour $p > 2$ (sauf dans le cas radial) : voir par exemple Tao, Nonlinear dispersive equations : local and global analysis, Exercise 2.35 pour un contrexemple.*

Théorème 4.3.9. — *Soient (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurés, et soient quatre réels p_0, q_0, p_1, q_1 dans $[1,\infty]$. On considère un opérateur linéaire A défini sur l'ensemble des fonctions étagées sur X et intégrables pour μ. On suppose que les applications suivantes sont continues :*

$$A : L^{p_0}(X,\mu) \longrightarrow L^{q_0}(Y,\nu)$$
$$L^{p_1}(X,\mu) \longrightarrow L^{q_1}(Y,\nu).$$

On note $\mathscr{A}_i := \|A\|_{L^{p_i}(X,\mu);L^{q_i}(Y,\nu)}$. Soit $\theta \in [0,1]$, et p_θ, q_θ définis par

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}\cdot$$

Alors A envoie continûment $L^{p_\theta}(X,\mu)$ dans $L^{q_\theta}(Y,\nu)$ et

$$\big\|A\big\|_{L^{p_\theta}(X,\mu);L^{q_\theta}(Y,\nu)} \le \mathscr{A}_0^{1-\theta}\mathscr{A}_1^{\theta}.$$

Démonstration. — Soit $\theta \in]0,1[$. Alors p_θ, q_θ sont dans $]1,\infty[$ et il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^\infty(X)$ et $g \in L^1 \cap L^\infty(Y)$ de norme 1 respectivement dans $L^{p_\theta}(X)$ et $L^{q'_\theta}(Y)$ on a

$$\Big|\int (Af)(y)g(y)\,d\nu(y)\Big| \le \mathscr{A}_0^{1-\theta}\mathscr{A}_1^{\theta}.$$

Soit

$$D := \big\{z \in \mathbb{C}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1\big\}.$$

Pour $z \in \bar{D}$ fixé on pose, pour $x \in X$ et $y \in Y$,

$$f^{(z)}(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}|f(x)|^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1})} \quad \text{et} \quad g^{(z)}(y) := \frac{g(y)}{|g(y)|}|g(y)|^{q'_\theta(\frac{1-z}{q'_0}+\frac{z}{q'_1})}.$$

On note que $f^{(\theta)} = f$ et $g^{(\theta)} = g$, et qu'en écrivant $z = a + ib \in \bar{D}$ avec $a \in [0,1]$ et $b \in \mathbb{R}$ alors

$$\big|f^{(z)}(x)\big| = \big|f(x)\big|^{\frac{p_\theta}{p_a}} \quad \text{et} \quad \big|g^{(z)}(y)\big| = \big|g(y)\big|^{\frac{q'_\theta}{q'_a}}.$$

Par ailleurs pour presque tout $x \in X$ et $y \in Y$, les applications $z \mapsto f^{(z)}(x)$ et $z \mapsto g^{(z)}(y)$ sont holomorphes dans D et continues dans $\bar{D}$. Soit

$$F(z) := \int (Af^{(z)})(y)g^{(z)}(y)\,d\nu(y).$$

Nous allons montrer que

$$\forall z = a+ib \in D, \quad |F(z)| \le \mathscr{A}_0^{1-a}\mathscr{A}_1^{a}, \tag{4.3.7}$$

ce qui donnera le résultat en prenant $z = \theta \in]0,1[$. Dans le cas où $z = k + ib \in D$ avec $k \in \{0,1\}$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\big|F(z)\big| &\le \big\|Af^{(z)}\big\|_{L^{q_k}}\|g^{(z)}\|_{L^{q'_k}}\\ &\le \mathscr{A}_k\|f^{(z)}\|_{L^{p_k}}\|g^{(z)}\|_{L^{q'_k}}\\ &= \mathscr{A}_k\|f\|_{L^{p_\theta}}\|g\|_{L^{q'_\theta}} = \mathscr{A}_k.\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Dans le cas où $z = a + ib \in D$ avec $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\big|f^{(z)}(x)\big| = \big|f(x)\big|^{\frac{p_\theta}{p_a}} \quad \text{et} \quad \big|g^{(z)}(y)\big| = \big|g(y)\big|^{\frac{q'_\theta}{q'_a}}.$$

On peut supposer que $p_0 < p_1$, auquel cas $a \mapsto p_a$ est croissante et

$$\text{si } a = \operatorname{Re} z \le \theta \text{ alors } 1 \le \frac{p_\theta}{p_a} \text{ donc } f^{(z)} \in L^1 \cap L^\infty(X),$$
$$\text{si } a = \operatorname{Re} z \ge \theta \text{ alors } p_\theta \le \frac{p_\theta p_1}{p_a} \text{ donc } f^{(z)} \in L^{p_1}(X),$$

et de même avec q'_θ / q'_x. On a utilisé dans le premier cas que

$$\int \left|f^{(z)}(x)\right|^{\frac{p_\theta}{p_a}} \le \|f^{(z)}\|_{L^1} \|f^{(z)}\|_{L^\infty}^{\frac{p_\theta p_1}{p_a}-1}$$

et dans le second cas

$$\int \left|f^{(z)}(x)\right|^{\frac{p_\theta p_1}{p_a}} \le \|f^{(z)}\|_{L^\infty}^{\frac{p_\theta p_1}{p_a}-p_\theta} \|f^{(z)}\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta}.$$

Finalement F est bien définie sur $\bar{D}$, est holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$. On montre de la même façon que F est bornée sur $\bar{D}$. On définit enfin la fonction $\widetilde{F}$ par

$$\widetilde{F}(z) := F(z) \mathscr{A}_0^{z-1} \mathscr{A}_1^{-z}$$

qui est holomorphe dans D et continue dans $\bar{D}$. D'après le principe du maximum on a

$$\sup_{z\in D} \left|\widetilde{F}(z)\right| \le \sup_{z\in \partial D} \left|\widetilde{F}(z)\right| \le 1$$

par (4.3.8), et donc (4.3.7) est démontrée. □

Corollaire 4.3.10. — *Soit $p \in [1,2]$. Si $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $t \neq 0$ on a $S(t)u_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|S(t)u_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{p}-\frac{d}{2}}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

4.3.4. Estimations de Strichartz. — Grâce à la conservation de la masse et à la dispersion, on peut démontrer un effet "régularisant" sur l'équation de Schrödinger. C'est un fait très général, on propose donc ici de démontrer un théorème abstrait.

On rappelle que si T est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors son adjoint T^*, est l'unique opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall y \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \big(Tx|y\big) = \big(x|T^*y\big).$$

Le résultat suivant est dû à J. Ginibre[1] et G. Velo. La méthode de démonstration s'appelle la méthode TT^*.

Théorème 4.3.11. — *Soit $\big(U(t)\big)_{t\ge 0}$ une famille bornée d'opérateurs continus sur $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ telle que pour tous $t \neq t'$, $U(t')U^\star(t)$ est continue de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\exists C_0 > 0,\ \exists \sigma > 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \neq t', \quad \big\|U(t')U^\star(t)f\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C_0}{|t-t'|^\sigma} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Alors pour tous les réels $(q,r) \in [2,\infty]$ vérifiant la condition d'admissibilité

$$\frac{1}{q} + \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma}{2}, \quad (q,r,\sigma) \neq (2,\infty,1)$$

il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \big\|U(t)u_0\big\|_{L^q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^d))} \le C\|u_0\|_{L^2}. \tag{4.3.9}$$

[1] 1938-2020

Démonstration. — On remarque que le cas $(q,r)=(\infty,2)$ est simplement dû au fait que la famille $\big(U(t)\big)_{t\geq 0}$ est bornée sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dans la suite on peut supposer $q<\infty$. On ne va démontrer l'estimation (4.3.9) que dans le cas où $q>2$. Le cas extrêmal $(q,r,\sigma)=(2,r,\sigma)$ avec $(r,\sigma)\neq(\infty,1)$ demande beaucoup plus de travail. Voir [Keel-Tao[(2)] , 1999].

Pour alléger les notations on écrira $L^q(L^r)$ pour $L^q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^d))$. On commence par remarquer que

$$\big\|U(t')U^\star(t)\big\|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)}\leq C_1 \quad\text{et}\quad \big\|U(t')U^\star(t)\big\|_{\mathscr{L}(L^1,L^\infty)}\leq \frac{C_0}{|t-t'|^\sigma},$$

donc par définition de σ, q et r on trouve par le Théorème 4.3.9 d'interpolation

$$\forall 2\leq r\leq\infty,\quad \big\|U(t')U^\star(t)\big\|_{\mathscr{L}(L^{r'},L^r)}\leq \frac{C_1^{\frac{2}{r}}C_0^{1-\frac{2}{r}}}{|t-t'|^{\frac{2}{q}}}\cdot \tag{4.3.10}$$

On note que

$$\big\|U(t)u_0\big\|_{L^q(L^r)}=\sup_{\varphi\in\mathscr{B}_{q',r'}}\Big|\int\big(U(t)u_0\big)(x)\varphi(t,x)\,dtdx\Big|,\quad \mathscr{B}_{q',r'}:=\big\{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{d+1})\,/\,\|\varphi\|_{L^{q'}(L^{r'})}\leq 1\big\}.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\big\|U(t)u_0\big\|_{L^q(L^r)}&=\sup_{\varphi\in\mathscr{B}_{q',r'}}\Big|\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}}U(t)u_0(x)\varphi(t,x)\,dtdx\Big|\\&=\sup_{\varphi\in\mathscr{B}_{q',r'}}\Big|\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}}u_0(x)\big(\overline{U^\star(t)\overline{\varphi}(t,\cdot)}\big)(x)\,dtdx\Big|\\&\leq\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\sup_{\varphi\in\mathscr{B}_{q',r'}}\Big\|\int_{\mathbb{R}}U^\star(t)\overline{\varphi}(t,\cdot)\,dt\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\mathbb{R}}U^\star(t)\overline{\varphi}(t,\cdot)\,dt\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}&=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\Big(U^\star(t)\overline{\varphi}(t,x)\Big)\Big(\overline{U^\star(t')\overline{\varphi}(t',x)}\Big)\,dxdtdt'\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\Big(U(t')U^\star(t)\overline{\varphi}(t,x)\Big)\varphi(t',x)\,dxdtdt'.\end{aligned}$$

Par (4.3.10) il vient

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\mathbb{R}}U^\star(t)\overline{\varphi}(t,\cdot)\,dt\Big\|^2_{L^2}&\leq C_r\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\frac{1}{|t-t'|^{\frac{2}{q}}}\|\varphi(t)\|_{L^{r'}}\|\varphi(t')\|_{L^{r'}}\,dtdt'\\&=C_r\int\Big(\frac{1}{|\cdot|^{\frac{2}{q}}}\star\|\varphi(\cdot)\|_{L^{r'}}\Big)(t)\|\varphi(t)\|_{L^{r'}}\,dt.\end{aligned}$$

Pour conclure fait appel au lemme suivant en dimension 1 (avec $\alpha=2/q$, $p_1=q'$ et $p_2=q$), que nous admettrons (et qui justifie la restriction $q>2$ qui évite $\frac{2}{q}=1$). □

***Lemme 4.3.12* (Hardy-Littlewood-Sobolev).** — *Soit $n\geq 1$, $\alpha\in]0,n[$ et soient p_1,p_2 dans $]1,\infty[$ tels que*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{\alpha}{n}=1+\frac{1}{p_2}\cdot$$

Alors il existe $C>0$ telle que pour tout $f\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$,

$$\big\||\cdot|^{-\alpha}\star f\big\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les estimations de Strichartz pour l'équation de Schrödinger.

[(2)] 1975

***Corollaire 4.3.13* (Estimation de Strichartz).** — *Soient deux couples admissibles (q_1, r_1) et (q_2, r_2) au sens où*

$$2 \le q_i, r_i \le \infty, \quad \frac{2}{q_i} + \frac{d}{r_i} = \frac{d}{2}, \quad (q_i, r_i, d) \neq (2, \infty, 2). \tag{4.3.11}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^{q_2'}([0,T]; L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))$, la solution u de (4.3.2) associée vérifie

$$\|u\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))} \le C\Big(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^{q_2'}([0,T];L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))}\Big).$$

Démonstration. — Comme précédemment, le cas $q_1 = \infty$ est trivial, et nous n'allons considérer ici que le cas $q_1 > 2$. Comme l'équation est linéaire, on peut commencer par considérer le cas $f \equiv 0$, qui est une conséquence directe du Théorème 4.3.11 en remarquant que S est un groupe ($S(t+t') = S(t)S(t')$), et que $S^*(t) = S(-t)$ (cela se voit directement par la formule en Fourier) et en choisissant $\sigma = d/2$.

On se tourne maintenant vers le cas inhomogène. Si $u_0 \equiv 0$ et f est dans la classe de Schwartz (on omet l'argument de régularisation permettant de faire cette hypothèse) alors la formule de Duhamel donne, pour $0 \le t \le T$ et en variables de Fourier

$$\mathscr{F}u(t,\xi) = \int_0^t e^{\frac{it|\xi|^2}{2}} \mathscr{F}f(t',\xi)\,dt'$$

autrement dit

$$u(t) = \int_0^t S(t-t')f(t')\,dt' \ .$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^t S(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))} &\le \Big\| \int_0^t \big\|S(t-t')f(t')\big\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^d)} dt' \Big\|_{L^{q_1}([0,T])} \\ &\le C\Big\| |\cdot|^{-\frac{2}{q_1}} \star \mathbb{1}_{[0,t]} \|f(\cdot)\|_{L^{r_1'}(\mathbb{R}^d)} \Big\|_{L^{q_1}([0,T])},\end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation de dispersion

$$\big\|S(t-t')\mathbb{1}_{t'\in[0,t]}f(t')\big\|_{L^{r_1}(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{(2\pi(t-t'))^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1})}} \|f(t')\|_{L^{r_1'}(\mathbb{R}^d)}$$

et la relation (4.3.11). Par le Lemme 4.3.12 on trouve alors pour tout couple admissible (q_1, r_1) au sens de (4.3.11), pour $q_1 > 2$,

$$\Big\| \int_0^t S(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))} \le C\|f\|_{L^{q_1'}([0,T];L^{r_1'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Pour dissocier les couples admissibles du membre de droite et du membre de gauche on va utiliser un argument d'interpolation, joint à un lemme (admis) de Christ et Kiselev. On commence par noter que pour tout $f \in L^{q_2'}([0,T]; L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))$, par le résultat précédent

$$\Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^t S(t-t')f(t',x)dt' \Big) \overline{f}(t,x)dxdt \Big| \le C\|f\|^2_{L^{q_2'}([0,T];L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^t S(t-t')f(t',x)dt' \Big) \overline{f}(t,x)dt &= \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{t'\in[0,t]} S(-t')f(t',x)\overline{S(-t)f(t,x)}dxdtdt' \\ &= \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{t\in[0,t']} S(-t)f(t,x)\overline{S(-t')f(t',x)}dxdtdt'\end{aligned}$$

et on remarque que

$$\overline{\int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{t'\in[0,t]} S(-t')f(t',x)\overline{S(-t)f(t,x)}dxdtdt'} = \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{t'\in[0,t]} S(-t)f(t,x)\overline{S(-t')f(t',x)}dxdtdt'$$

donc

$$2\mathrm{Re}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^t S(t-t')f(t',x)dt'\Big)\overline{f}(t,x)dxdt = \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} S(-t)f(t,x)\overline{S(-t')f(t',x)}dxdtdt'$$
$$= \Big\|\int_0^T S(-t')f(t')dt'\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais alors

$$\Big\|\int_0^T S(-t')f(t')dt'\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^{q_2'}([0,T];L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))}$$

et donc par Strichartz

$$\Big\|\int_0^T S(t-t')f(t')dt'\Big\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))} = \Big\|S(t)\int_0^T S(-t')f(t')dt'\Big\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))}$$
$$\leq C\Big\|\int_0^T S(-t')f(t')dt'\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leq C\|f\|_{L^{q_2'}([0,T];L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Malheureusement on cherche plutôt à montrer que

$$\Big\|\int_0^T \mathbb{1}_{t'\in[0,t]}S(t-t')f(t')dt'\Big\|_{L^{q_1}([0,T];L^{r_1}(\mathbb{R}^d))} \leq C\|f\|_{L^{q_2'}([0,T];L^{r_2'}(\mathbb{R}^d))}.$$

Le passage de l'un à l'autre est précisément le lemme (admis) de Christ[3] et Kiselev[4] suivant. □

***Lemme 4.3.14* (Christ-Kiselev 2001).** — *Si X, Y sont deux espaces de Banach et I un intervalle de $\mathbb{R}$, et si $K \in C(I\times I;\mathscr{L}(X,Y))$ vérifie pour un couple $1\leq r_1<r_2<\infty$*

$$\exists C>0,\quad \forall f\in L^{r_1}(I;X),\quad \Big\|\int_I K(t,t')f(t')\,dt'\Big\|_{L^{r_2}(I;Y)} \leq C\|f\|_{L^{r_1}(I;X)}$$

alors

$$\exists C>0,\quad \forall f\in L^{r_1}(I;X),\quad \Big\|\int_I \mathbb{1}_{t'\in[0,t]}K(t,t')f(t')\,dt'\Big\|_{L^{r_2}(I;Y)} \leq C\|f\|_{L^{r_1}(I;X)}.$$

Remarque 4.3.15. — *Si u est solution de (4.3.2) associée à u_0 et f, alors pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha u$ est solution de (4.3.2) associée $\partial^\alpha u_0$ et $\partial^\alpha f$. En particulier pour tous les couples admissibles (q_1,r_1) et (q_2,r_2) au sens de (4.3.11) il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, si $u_0\in H^k(\mathbb{R}^d)$ et $f\in L^{q_2'}([0,T];W^{k,r_2'}(\mathbb{R}^d))$, la solution u de (4.3.2) associée vérifie $u\in L^{q_1}([0,T];W^{k,r_1}(\mathbb{R}^d))$ et*

$$\|u\|_{L^{q_1}([0,T];W^{k,r_1}(\mathbb{R}^d))} \leq C\Big(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} + \|f\|_{L^{q_2'}([0,T];W^{k,r_2'}(\mathbb{R}^d))}\Big).$$

Remarque 4.3.16. — *Des estimations de Strichartz sont associées à un grand nombre d'équations dites dispersives posées dans l'espace entier. On peut aussi démontrer par des méthodes de restriction de Fourier. Des estimations similaires, souvent "à perte" peuvent parfois être obtenues dans le cas de domaines, de variétés, d'opérateurs elliptiques à coefficients variables, voire d'opérateurs dits sous-elliptiques.*

(3) 1955
(4) 1969

4.3.5. Conservation de la masse pour l'équation inhomogène. — Démontrons enfin un résultat de conservation de la masse pour l'équation inhomogène (4.3.2).

Théorème 4.3.17. — *Soit (q,r) un couple admissible au sens de (4.3.11). Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^{q'}([0,T];L^{r'}(\mathbb{R}^d))$, alors la solution de (4.3.2) vérifie $u \in C(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))$ et on a la conservation de la masse*

$$\forall\, t \in [0,T] \quad \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2Im \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\overline{u}(t,x)\,dxdt\,.$$

Démonstration. — Commençons par régulariser u_0 et f par $u_0^n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f^n \in \mathscr{C}^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$. Alors la solution associée vérifie $u^n \in \mathscr{C}^\infty([0,T];\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$. On note que

$$-i\partial_t \overline{u}^n - \frac{1}{2}\Delta \overline{u}^n = \overline{f}^n$$

donc en reprenant la preuve du Théorème 4.3.5 on trouve

$$\|u^n(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2\mathrm{Im} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f^n(t,x)\overline{u}^n(t,x)\,dxdt\,, \tag{4.3.12}$$

et

$$\begin{aligned}\|u^n(t)-u^m(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|u_0^n - u_0^m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2\mathrm{Im}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f^n(t,x)\overline{u}^n(t,x)\,dtdx - 2\mathrm{Im}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f^m(t,x)\overline{u}^m(t,x)\,dxdt\,.\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Par ailleurs par les estimations de Strichartz donnent

$$\|u^n - u^m\|_{L^q([0,T];L^r(\mathbb{R}^d))} \le C\Big(\|u_0^n - u_0^m\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f^n - f^m\|_{L^{q'}([0,T];L^{r'}(\mathbb{R}^d))}\Big)$$

donc par (4.3.13) et l'inégalité de Hölder (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^q([0,T];L^r(\mathbb{R}^d))$, ce qui permet de passer à la limite dans (4.3.12) et conclure. □

4.3.6. Résolution de NLS cubique. — On s'intéresse à l'équation cubique semilinéaire suivante, en deux dimensions d'espace :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i\partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u &=& P_3(u,\overline{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2 \\ u_{|t=0} &=& u_0\,, \end{array}\right. \tag{4.3.14}$$

où P_3 est un polynôme homogène de degré 3 donné. L'application des estimations de Strichartz à l'équation de Schrödinger non linéaire remonte à G. Ponce[(5)] et T. Sideris en 1993. On va montrer le résultat suivant. La méthode (que nous mettrons aussi en œuvre dans le chapitre suivant pour la résolution de l'équation de Navier-Stokes) repose sur un lemme de point fixe.

Lemme 4.3.18. — *Soit E un espace de Banach de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, soit $m \ge 2$ un entier et soit $\mathscr{B}_m = \mathscr{B}_m(x,\overline{x})$ un opérateur borné de E^m dans E, de norme $\|\mathscr{B}_m\|$:*

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|\mathscr{B}_m(x,\overline{x})\big\|_E \le \|\mathscr{B}_m\|\|x\|_E^m\,.$$

Il existe une constante $\kappa_m \ge 2^m$ telle que si $\alpha > 0$ vérifie

$$\alpha^{m-1} \le \frac{1}{\kappa_m\|\mathscr{B}_m\|}\,, \tag{4.3.15}$$

alors pour tout $x_0 \in B_E(0,\alpha)$, il existe un unique x dans $B_E(0,2\alpha)$ tel que

$$x = x_0 + \mathscr{B}_m(x,\overline{x})\,.$$

(5) 1952

Démonstration. — On utilise un argument classique d'itération : on pose

$$z_0 := x_0 \quad \text{et} \quad z_{n+1} := x_0 + \mathscr{B}_m(z_n, \overline{z}_n)\,.$$

On suppose que $\|x_0\|_E \leq \alpha$ et on commence par vérifier par récurrence que $\|z_n\|_E \leq 2\alpha$. Supposons donc que $\|z_n\|_E \leq 2\alpha$ pour $n \geq 0$ donné. Par définition et par (5.4.1) on a

$$\|z_{n+1}\|_E \leq \alpha\big(1 + 2^m \alpha^{m-1} \|\mathscr{B}_m\|\big) \leq 2\alpha\,.$$

La suite (z_n) est donc bornée dans $B_E(0,2\alpha)$ puisque $\alpha^{m-1} \leq 1/(2^m\|\mathscr{B}_m\|)$. Par ailleurs il existe une constante C_m ne dépendant que de $\mathscr{B}_m$ telle que

$$\|z_{n+1} - z_n\|_E \leq C_m (2\alpha)^{m-1} \|\mathscr{B}_m\| \|z_n - z_{n-1}\|_E$$

donc si

$$C_m (2\alpha)^{m-1} \|\mathscr{B}_m\| < 1$$

alors (z_n) est une suite de Cauchy dans E, dont la limite est un point fixe de $x \mapsto x_0 + \mathscr{B}_m(x, \overline{x})$. L'unicité provient du fait que si x et y sont deux points fixes, alors

$$\|x - y\|_E \leq C_m (2\alpha)^{m-1} \|\mathscr{B}_m\| \|x - y\|_E\,.$$

Le lemme est démontré. □

Remarque 4.3.19. — *Dans le cas où $m = 2$ la condition (5.4.1) peut s'écrire*

$$\alpha < \frac{1}{4\|\mathscr{B}_2\|}\cdot$$

Théorème 4.3.20. — *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe un temps $T > 0$ tel qu'il existe une unique solution au système (4.3.14) dans $L^3([0,T]; L^6(\mathbb{R}^2))$. La solution est de plus dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$. En outre, il existe une constante $c > 0$ telle que si $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c$, alors la solution est dans $L^3(\mathbb{R}^+; L^6(\mathbb{R}^2)) \cap C_b(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$.*

Remarquons que cette équation possède la propriété d'invariance d'échelle suivante : si u est solution sur $[0,T]$, alors $u_\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ aussi, sur $[0, \lambda^{-2}T]$. Les espaces $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$ et $L^3(\mathbb{R}^+; L^6(\mathbb{R}^2))$ sont invariants par le changement d'échelle $u \mapsto u_\lambda$. Plus généralement, les espaces $L^q(R^+; L^r(\mathbb{R}^d))$ avec (q,r) admissibles sont invariants d'échelle. C'est ce qui fait tout l'intérêt de l'équation cubique en dimension deux (voir le TD pour des cas plus généraux) : on dit que c'est un exposant *critique* pour la norme L^2 (équation "masse-critique") en dimension deux (en dimension d on vérifie que l'équation polynômiale de degré $4/d + 1$ est masse-critique). On vérifie facilement que l'équation polynômiale de degré $4/d - 2 + 1$ est "énergie-critique".

Démonstration. — Soit Q la fonctionnelle définie par

$$\begin{cases} i\partial_t Q(u) - \frac{1}{2}\Delta Q(u) &= P_3(u, \overline{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ Q(u)_{|t=0} &= 0\,. \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver un point fixe à l'application

$$F(u) := S(t)u_0 + Q(u)\,.$$

Montrons que pour n'importe quel $T > 0$, Q envoie continûment $L^3([0,T]; L^6(\mathbb{R}^2))$ dans $L^3([0,T]; L^6(\mathbb{R}^2))$, avec une constante indépendante de T. On a

$$Q(u)(t) = \int_0^t S(t-t') P_3\big(u(t'), \bar{u}(t')\big) dt'\,,$$

et les estimations de Strichartz du Corollaire 4.3.13 fournissent

$$\begin{aligned}\left\|Q(u)\right\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))} &\leq C\left\|P_3(u,\overline{u})\right\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))}\\ &\leq C_1\|u\|^3_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))}.\end{aligned}$$

Comme par ailleurs

$$\left\|S(t)u_0\right\|_{L^3(\mathbb{R}^+;L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C_0\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.3.16}$$

le Lemme 4.3.18 implique qu'il existe une constante κ_3 ne dépendant que de P_3 telle que si

$$\left\|S(t)u_0\right\|^2_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))} \leq \frac{1}{\kappa_3 C_1}$$

alors il existe une unique solution dans un voisinage de 0 dans $L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))$. En particulier par (4.3.16) si

$$\kappa_3 C_1 C_0^2 \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1,$$

alors il existe une unique solution dans un voisinage de 0 dans $L^3(\mathbb{R}^+;L^6(\mathbb{R}^2))$. Dans le cas où u_0 n'est pas petite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on va montrer que

$$\lim_{T\to 0}\left\|S(t)u_0\right\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))} = 0. \tag{4.3.17}$$

En effet pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_0^N := \mathscr{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{|\cdot|\leq N}\mathscr{F}u_0\right)$ vérifie

$$\|u_0 - u_0^N\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon.$$

Mais alors d'une part par le Corollaire 4.3.13

$$\left\|S(t)(u_0 - u_0^N)\right\|_{L^3(\mathbb{R}^+;L^6(\mathbb{R}^2))} \leq C_0\varepsilon$$

et d'autre part par les injections de Sobolev, la propriété de localisation en fréquences puis l'inégalité de Hölder et la conservation de la masse,

$$\begin{aligned}\left\|S(t)u_0^N\right\|_{L^3([0,T];L^6(\mathbb{R}^2))} &\leq C\left\|S(t)u_0^N\right\|_{L^3([0,T];\dot{H}^{\frac{2}{3}}(\mathbb{R}^2))}\\ &\leq CN^{\frac{2}{3}}\|S(t)u_0^N\|_{L^3([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))}\\ &\leq CN^{\frac{2}{3}}T^{\frac{1}{3}}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Le résultat (4.3.17) suit, ainsi que l'existence locale en temps et l'unicité d'une solution pour toute donnée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

La solution est dans $L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))$ puisque c'est aussi une norme de Strichartz. La continuité en temps s'obtient par la formue de Duhamel et la continuité en temps du flot libre $S(t)$. Le théorème est démontré.

□

Remarque 4.3.21. — *La question du comportement de la solution au voisinage du temps d'explosion est une question importante, pas toujours élucidée suivant l'équation considérée. On en parlera davantage dans le cadre des équations de Navier-Stokes au chapitre suivant.*

4.4. Exercices

On définit l'ensemble

$$\Gamma_+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, |x| \leq t\}.$$

Exercice 21 : propriétés de base de l'équation des ondes

On considère f et g deux fonctions $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Soit $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^3 \\ (u(x), \partial_t u(x))|_{t=0} = (f(x), g(x)) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1. Montrer que si $t \geq 1$, on a :

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{4\pi t} \left(\sum_{i=1}^{3} \left\| \partial_{x_i} g \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \|\partial^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \right).$$

2. On suppose que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ et de même pour $\mathrm{supp}(g)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathrm{supp}(u(t,\cdot)) \subset B(0, R+t)$.

3. On suppose encore que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ et de même pour $\mathrm{supp}(g)$. Montrer que u est nulle dans l'ensemble $\{(t,x) : t > R, |x| < t - R\}$.

4. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$. On définit le cône $C(t_0, x_0)$ par :

$$C(t_0, x_0) = \{(t,x) : |x - x_0| < t_0 - t,\ t < t_0\}.$$

Montrer que si f et g sont nulles sur l'intersection de l'hyperplan $t = 0$ avec le cône $C(t_0, x_0)$ alors on a $u(t_0, x_0) = 0$.

Exercice 22 : unicité de la solution fondamentale

Montrer que si S et $\tilde{S}$ sont deux solutions fondamentales de l'équation des ondes avec

$$\mathrm{Supp}(S) \subset \Gamma_+ \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}(\tilde{S}) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

alors $S = \tilde{S}$.

Exercice 23 : résolution en dimension 1

Montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n = 1$ est

$$S_1(t,x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{t \geq |x|}.$$

Exercice 24 : résolution en dimension 3

Montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n = 3$ est

$$S_3(t,x) = \frac{1}{4\pi|x|} \delta_0(t - |x|),$$

au sens où

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^4), \quad \langle S_3, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x|} \varphi(|x|, x)\, \partial x.$$

On montrera que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^4), \quad \forall \lambda > 0, \quad \langle S_3, \varphi \circ M_\lambda \rangle = \lambda^{-2} \langle S_3, \varphi \rangle$$

avec $M_\lambda x := \lambda x$, et que $\Box S_3$ est à support en 0.

Exercice 25 : Résolution en dimension 2

1. Soit n un entier et S_{n+1} solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que la distribution $S_{n+1}(t)$ est à support compact. Montrer que pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle S_n(t),\varphi\rangle = \langle S_{n+1}(t),\varphi\otimes 1\rangle\,.$$

2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que la seule solution fondamentale de l'équation des ondes à support dans Γ_+ avec $n=2$ est

$$S_2(t,x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\mathbb{1}_{t\geq|x|}\,.$$

Exercice 26 : propagation des singularités pour l'équation des ondes

1. Résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta u &= 0\\ (u,\partial_t u)|_{t=0} &= (0,f)\end{cases}$$

où $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact et $u\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},H^2(\mathbb{R}^n))$. Montrer que si $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $u\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$.

Définitions. — *On considère $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(i) *On dit que f est $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage d'un point $x_0\in\mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage ω de x_0 tel que pour toute $\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\omega)$, on a $\phi f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On définit alors le* support singulier *de f par son complémentaire : $x\notin\operatorname{singsupp}(f)$ s'il existe un voisinage de x sur lequel f est $\mathscr{C}^\infty$.*

(ii) *On définit également $\Sigma(f)$ par son complémentaire : on dira que $\xi\notin\Sigma(f)$ si $\widehat{f}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de u.*

(iii) *On dit que f est* microlocalement $\mathscr{C}^\infty$ *en un point $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ s'il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et un cône ouvert de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ contenant ξ_0 tels que :*

$$\forall\,\phi\in\mathscr{C}_c^\infty(\omega),\quad\forall\,N\in\mathbb{N},\quad\exists\,C_N>0:\forall\,\xi\in\Gamma,\ \left|\widehat{\phi f}\right|\leq C_N(1+|\xi|)^{-N}.$$

(iv) *L'ensemble des points (x_0,ξ_0) où f n'est pas microlocalement $\mathscr{C}^\infty$ est appelé le front d'onde de f et est noté* $\mathrm{WF}(f)$.

2. On considère une solution u. Soit $\chi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\xi)=1$ pour $|\xi|\geq 1$ et $\chi=0$ au voisinage de 0. Vérifier que :

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+-u_-)+\frac{1}{(2\pi)^n}\int(1-\chi(\xi))\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$$

où on a noté :

$$u_\pm(t,x)=\int\frac{\chi(\xi)}{|\xi|}e^{i(x\cdot\xi\pm t|\xi|)}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

3. Montrer que $\mathrm{WF}(u(t))\subset\mathrm{WF}(u_+(t))\cup\mathrm{WF}(u_-(t))$.

4. On suppose fixé $t\in\mathbb{R}$ et $x_0\notin\operatorname{Supp}(f)-t\Sigma_1(f)$, où $\Sigma_1(f)=\Sigma(f)\cap\{|\xi|=1\}$. Soit U un voisinage de x_0 et Γ un voisinage conique de $\Sigma(f)$ tels que :

$$U\cap(\operatorname{Supp}(f)-t\Gamma_1)=\emptyset$$

où on a noté $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{|\xi| = 1\}$. On introduit ψ homogène de degré 0 telle que $\psi = 1$ sur un voisinage conique de $\Sigma(f)$ et $\psi(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Gamma$. On écrit $u_+ = u_+^1 + u_+^2$ où :

$$u_+^1(t,x) = \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|} e^{i(x\cdot\xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$
$$u_+^2(t,x) = \int \frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{|\xi|} e^{i(x\cdot\xi + t|\xi|)} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Montrer que $\mathrm{singsupp}(u_+) = \mathrm{singsupp}(u_+^1)$.

5. En utilisant la relation

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right|^2} \partial_j e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} = e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)},$$

montrer que $u_+^1 \in \mathscr{C}^\infty(U)$. En déduire $x_0 \notin \mathrm{singsupp}(u_+(t))$.

6. En déduire le « théorème de propagation des singularités » suivant :

$$\mathrm{singsupp}(u(t)) \subset \bigcup_{(x,\xi)\in \mathrm{WF}(f)} \left(x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

CHAPITRE 5

Équations de Navier-Stokes

Sommaire

5.1. Problème de Stokes dans le tore **116**
5.2. Solutions faibles **117**
5.2.1. Construction d'une suite de solutions approchées 118
5.2.2. Compacité de la suite approximée 119
5.2.3. Passage à la limite dans l'équation approchée 121
5.2.4. Inégalité d'énergie 122
5.2.5. Borne dans $\mathscr{C}^0([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d))$ 122
5.3. Résultats de stabilité **123**
5.3.1. Le cas de la dimension deux 123
5.3.2. Le cas de la dimension trois 124
5.4. Résultats d'existence et d'unicité **128**
5.5. Comportement en temps grand en trois dimensions d'espace **134**

Le système de Navier-Stokes considéré concerne un fluide incompressible dans le tore d-dimensionnel $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}_{/2\pi\mathbb{Z}})^d$, représenté par son champ de vitesses $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^d$ et sa pression $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$. Il s'écrit de la manière suivante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \Delta u &=& -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \\ \operatorname{div} u &=& 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d \\ u_{|t=0} &=& u_0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{T}^d. \end{array} \right. \tag{5.0.1}$$

On remarque que

$$\operatorname{div} u = 0 \Longrightarrow u\cdot\nabla u = \operatorname{div}(u\otimes u)$$

donc la moyenne spatiale est préservée par l'équation. Dorénavant on cherche la solution dans l'espace des fonctions de moyenne spatiale nulle. En outre en prenant la divergence de la première équation on trouve

$$-\Delta p = \operatorname{div}(u\cdot\nabla u) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j (u\cdot\nabla u^j) = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\partial_j (u^i u^j),$$

de sorte que résoudre (5.0.1) revient à trouver u solution de

$$\partial_t u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla u) - \Delta u = 0$$

avec $\mathbb{P} := \mathbb{I} - \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle. On remarque que

$$(\widehat{\mathbb{P}}(n))_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{n_i n_j}{|n|^2}$$

où $n \in \mathbb{Z}^d$ est le nombre d'onde : on rappelle que

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{u}(n) e^{in\cdot x} \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{T}^d), \quad \widehat{u}(n) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} e^{-in\cdot x} u(x)\,dx.$$

Enfin les espaces de Sobolev sur $\mathbb{T}^d$ sont définis par la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^d)} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s} \big|\widehat{u}(n)\big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

5.1. Problème de Stokes dans le tore

On s'intéresse au problème suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u &=& f - \nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{T}^d \\ \mathrm{div}\, u &=& 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{T}^d \\ u_{|t=0} &=& u_0\,. \end{array}\right. \tag{5.1.1}$$

Dans la suite on utilise la notation suivante pour le produit de contraction de deux matrices A et B

$$A : B := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}\,.$$

Définition 5.1.1. — *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ un champ de vecteurs de divergence nulle, et $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\mathbb{T}^d))$ un champ de vecteurs de divergence nulle au sens où presque partout en t,* $\mathrm{div}\, f(t) = 0$. *On dit que u est solution de* (5.1.1) *avec donnée initiale u_0 et force extérieure f si $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\mathbb{T}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{T}^d))$ est de divergence nulle et satisfait, pour tout champ de vecteurs $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{T}^d))$ pour tout $t \geq 0$*

$$\begin{aligned}\langle u(t), \Psi(t)\rangle + \int_{[0,t]\times\mathbb{T}^d} \nabla u : \nabla\Psi(t',x)\,dx\,dt' - \int_{[0,t]} \langle u(t'), \partial_{t'}\Psi(t')\rangle\,dt' \\ = \langle u_0, \Psi(0)\rangle + \int_0^t \langle f(t'), \Psi(t')\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Une légère adaptation des méthodes du Chapitre 3 permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.1.2. — *Il existe une unique solution u au sens de la Définition 5.1.1, elle est de plus dans l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{T}^d))$ et vérifie pour tout $t \geq 0$*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,dt' = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle\,dt'.$$

Remarque 5.1.3. — *Comme en Proposition 3.3.2, on peut aussi montrer que si $s \in \mathbb{R}$ et si $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^d)$ et $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^{s-1}(\mathbb{T}^d))$ sont des champs de vecteurs de divergence nulle, alors il existe une unique solution u,*

au sens où $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^{s-1}(\mathbb{T}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^{s+1}(\mathbb{T}^d))$ *est de divergence nulle et satisfait, pour tout champ de vecteurs* Ψ *dans* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+; H^{-s+1}(\mathbb{T}^d))$ *et pour tout* $t \geq 0$

$$\langle u(t), \Psi(t)\rangle + \int_{[0,t]} \langle \nabla u(t'), \nabla \Psi(t')\rangle \, dt' - \int_{[0,t]} \langle u(t'), \partial_{t'} \Psi(t')\rangle dt' = \langle u_0, \Psi(0)\rangle + \int_0^t \langle f(t'), \Psi(t')\rangle \, dt' .$$

De plus

$$\|u(t)\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} dt' \leq \|u_0\|^2_{H^s(\mathbb{T}^d)} + \int_0^t \|f(t')\|^2_{H^{s-1}} \, dt' .$$

5.2. Solutions faibles

***Définition 5.2.1* (Solution faible).** — *Soit* $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ *un champ de vecteurs de divergence nulle. On dit que* u *est solution faible de* (5.0.1) *avec donnée initiale* u_0 *si* u *est de divergence nulle, appartient à l'espace* $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{T}^3))$ *et satisfait, pour tout champ de vecteurs* Ψ *dans* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d)$ *de divergence nulle, et pour presque tout* $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{T}^d} u(t,x) \cdot \Psi(t,x) \, dx - \int_{[0,t]\times\mathbb{T}^d} \Big(u \cdot \Delta \Psi + u \otimes u : \nabla \Psi + u \cdot \partial_t \Psi \Big)(t', x) \, dx \, dt' = \int_{\mathbb{T}^d} u_0(x) \cdot \Psi(0,x) \, dx \, dt' .$$

***Définition 5.2.2* (Solution turbulente).** — *Soit* $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ *un champ de vecteurs de divergence nulle. On dit que* u *est solution turbulente de* (5.0.1) *avec donnée initiale* u_0 *si* u *est une solution faible qui appartient à* $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{T}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{T}^d))$ *et qui satisfait l'inégalité d'énergie*

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)} .$$

Remarque 5.2.3. — *Une solution turbulente vérifie donc pour tout champ de vecteurs* Ψ *dans* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d)$ *de divergence nulle, et pour presque tout* $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{T}^d} u(t,x) \cdot \Psi(t,x) \, dx - \int_{[0,t]\times\mathbb{T}^d} \Big(-\nabla u : \nabla \Psi + u \otimes u : \nabla \Psi + u \cdot \partial_t \Psi \Big)(t', x) \, dx \, dt' = \int_{\mathbb{T}^d} u_0(x) \cdot \Psi(0,x) \, dx \, dt' .$$

Le théorème suivant est dû à J . Leray[(1)].

***Théorème 5.2.4* (Leray, 1934).** — *Soit* $2 \leq d \leq 3$ *et soit* $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ *un champ de vecteurs de divergence nulle. Il existe une solution turbulente de* (5.0.1) *avec donnée initiale* u_0 *qui vérifie de plus* $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\mathbb{T}^d))$.

Remarque 5.2.5. — *Le résultat est vrai aussi si* $d \geq 4$ *mais la démonstration serait à adapter. On discutera plus bas (voir la Remarque 5.2.9) de généralisations à d'autres domaines en espace.*

Démonstration. — Comme pour le Théorème 3.4.3, la démonstration repose sur un schéma d'approximation:

1. Construction d'une suite de solutions approchées.
2. Compacité de cette suite.
3. Passage à la limite.
4. Estimation d'énergie.
5. Borne $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+; H^{-1}(\mathbb{T}^d))$.

(1) 1906-1998

5.2.1. Construction d'une suite de solutions approchées. — Commençons par définir le projecteur spectral $\mathbb{P}_N$ sur les modes propres de l'opérateur de Stokes (5.1.1) sur $\mathbb{T}^d$: étant donné $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et $(f_k^m)_{1\le m\le d-1}$ une base orthonormée de $\{k\}^\perp$, on pose

$$e_k^{m,n}(x) := \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\big((f_k^m + i f_k^n)e^{ik\cdot x} + (f_k^m - i f_k^n)e^{-ik\cdot x}\big).$$

On remarque que les composantes de $e_k^{m,n}(x)$ sont à valeurs réelles et que $\operatorname{div} e_k^{m,n}(x) = 0$. La famille $(e_k^{m,n})_{k,m,n}$ est une base hilbertienne de $\left\{g \in L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d) \,/\, \int g\,dx = 0 \text{ et } \operatorname{div} g = 0\right\}$ et l'on a pour tous $1 \le m,n \le d-1$

$$-\Delta e_k^{m,n} = |k|^2 e_k^{m,n}\ ,$$

et pour tout $g \in L^2(\mathbb{T}^d)$ de divergence nulle,

$$g = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\sum_{1\le m,n\le d-1} g_k^{m,n} e_k^{m,n}\ ,\quad g_k^{m,n} := \big(g|e_k^{m,n}\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)}\ ,\quad \text{et}\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\sum_{1\le m,n\le d-1}\big|g_k^{m,n}\big|^2 = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{T}^d)}.$$

Comme dans le cas de l'étude spectrale du Laplacien au Chapitre 3, et en particulier le Théorème 3.4.4, on note que pour tout $g \in H^{-1}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)$ de moyenne et de divergence nulles on a

$$\|g\|^2_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\sum_{1\le m,n\le d-1} |k|^{-2}\langle g, e_k^{m,n}\rangle^2, \tag{5.2.1}$$

et pour tout $g \in H^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)$ de moyenne et de divergence nulles on a

$$\|g\|^2_{H^1(\mathbb{T}^d)} = \langle -\Delta g, g\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\sum_{1\le m,n\le d-1} |k|^2\big|g_k^{m,n}\big|^2.$$

Enfin on définit $\mathbb{P}_N$ le projecteur orthogonal dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $\operatorname{Vect}\{e_k^{m,n}, |k| \le N\}$. Comme dans le cas de l'étude spectrale du Laplacien au Chapitre 3, on remarque que $\mathbb{P}_N$ est également un projecteur dans $H^1(\mathbb{T}^d)$. On introduit alors l'équation différentielle ordinaire (en remarquant que $\mathbb{P}_N\mathbb{P} = \mathbb{P}_N$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{du_N}{dt} &=& \mathbb{P}_N\Delta u_N + \mathbb{P}_N Q(u_N,u_N) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{T}^d \\ u_{N|t=0} &=& \mathbb{P}_N u_0 \end{array}\right. \tag{5.2.2}$$

que l'on va résoudre dans $L^2_N := \{g \in L^2(\mathbb{T}^d) \,/\, g = \mathbb{P}_N g\}$. On a posé

$$Q(u,v) := -\operatorname{div}(u\otimes v).$$

Lemme 5.2.6. *— L'opérateur $\mathbb{P}_N\Delta$ est linéaire continu de L^2_N dans lui-même, et $\mathbb{P}_N Q$ est bilinéaire continu de $L^2_N \times L^2_N$ dans L^2_N.*

Démonstration. — Ce résultat peut se démontrer simplement en remarquant que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie. Nous en proposons ci-dessous une démonstration qui se généralise au cas où la troncature spectrale n'est pas en dimension finie (par exemple si l'équation est posée dans $\mathbb{R}^d$).

Le premier résultat est évident par la troncature spectrale:

$$\|\mathbb{P}_N\Delta f\|_{L^2} \le N^2\|f\|_{L^2}.$$

Quant au second, on écrit pour $u, v \in L^2_N$

$$\begin{aligned}\big\|\mathbb{P}_N Q(u,v)\big\|_{L^2}^2 &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |k|\le N}} \sum_{1\le m,n\le d-1} \big(Q(u,v)|e_k^{m,n}\big)^2 \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |k|\le N}} \sum_{1\le m,n\le d-1} |k|^2 \big\langle Q(u,v), |k|^{-1} e_k^{m,n}\big\rangle^2 \\ &\le N^2 \big\|Q(u,v)\big\|_{H^{-1}}^2\end{aligned}$$

par (5.2.1). Mais par les injections de Sobolev puis la troncature spectrale,

$$\begin{aligned}\big\|Q(u,v)\big\|_{H^{-1}} &\le \big\|u\otimes v\big\|_{L^2} \\ &\le \|u\|_{L^4}\|v\|_{L^4} \\ &\le C\|u\|_{H^{\frac{d}{4}}}\|v\|_{H^{\frac{d}{4}}} \\ &\le CN^{\frac{d}{2}}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que pour toute fonction $a \in H^1(\mathbb{T}^d)$

$$\|a\|_{H^{\frac{d}{4}}} \le \|a\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|a\|_{H^1}^{\frac{d}{4}}\,,$$

et que si $a \in L^2_N$ alors

$$\|a\|_{H^1} \le N\|a\|_{L^2}\,.$$

On en déduit que si $u, v \in L^2_N$ alors

$$\big\|\mathbb{P}_N Q(u,v)\big\|_{L^2} \le CN^{1+\frac{d}{2}}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\,.$$

On peut donc appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz 1.2.1 : il existe un temps T_N et une unique solution $u_N \in \mathscr{C}^\infty([0,T_N[;L^2_N)$ à (5.2.2). Pour montrer que $T_N = \infty$, il suffit de montrer une borne uniforme en temps dans L^2 sur la suite (u_N). Ceci est une conséquence immédiate de l'égalité d'énergie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_N(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 dt' &= \frac{1}{2}\|u_N(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \int_0^t \big(-\mathbb{P}_N Q(u_N,u_N)(t')|u_N(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} dt' \\ &= \frac{1}{2}\|u_N(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \int_0^t \big(-Q(u_N,u_N)(t')|u_N(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} dt' \\ &= \frac{1}{2}\|u_N(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \int_0^t \big(u_N\cdot\nabla u_N(t')|u_N(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} dt'\,.\end{aligned}$$

Mais

$$\big(u_N\cdot\nabla u_N(t')|u_N(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} = \Big(\frac{1}{2}\nabla|u_N(t')|^2\Big|u_N(t')\Big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} = 0\,,$$

donc

$$\frac{1}{2}\|u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 + \int_0^t \|\nabla u_N(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 dt' = \frac{1}{2}\|u_N(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2\,.$$

Le lemme est démontré. □

5.2.2. Compacité de la suite approximée. — Montrons le résultat suivant.

Proposition 5.2.7. *— Il existe $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;H^1)$ de divergence nulle tel que quitte à extraire une sous-suite, pour tout $T>0$*

$$u_N \to u \quad \textit{dans} \quad L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)\,, \quad \nabla u_N \rightharpoonup \nabla u \quad \textit{dans} \quad L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)\,.$$

Enfin si ψ est un champ de vecteurs dans $\mathscr{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{T}^d))$, alors

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{[0,T]}\Big|\langle u_N(t)-u(t),\psi(t)\rangle\Big|=0\,.$$

Démonstration. — Comme (∇u_N) est bornée dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ qui est un espace de Hilbert séparable, il existe par le Théorème 1.3.3 de Banach-Alaoglu une fonction $v\in L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ telle que quitte à extraire une sous-suite, $\nabla u_N\rightharpoonup v$ dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$.

Pour montrer qu'il existe $u\in L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ telle que quitte à extraire une nouvelle sous-suite,

$$u_N\to u\in L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)\,,$$

il suffit de démontrer que la suite (u_N) est relativement compacte dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$. On va appliquer le lemme d'Aubin-Lions 1.10.2, avec

$$X=H^1(\mathbb{T}^d)\,,\quad Y=L^2(\mathbb{T}^d)\,,\quad Z=H^{-1}(\mathbb{T}^d)\,.$$

On rappelle en effet que l'injection de $H^1(\mathbb{T}^d)$ dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ est compacte (c'est le Théorème 1.7.15 de Rellich). On remarque que $(-\Delta u_n)$ est bornée dans $L^2([0,T],H^{-1}(\mathbb{T}^d))$, et comme précédemment

$$\begin{aligned}\big\|\mathbb{P}_N Q(u_N,u_N)\big\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)}&\le C\|u_N\|_{L^4}^2\\&\le C\|u_N\|_{H^{\frac{d}{4}}}^2\\&\le C\|u_N\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}}\|\nabla u_N\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}\,.\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

On en déduit que $(\partial_t u_N)$ est bornée dans $L^{\frac{4}{d}}([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d))$. Par le lemme d'Aubin-Lions, quitte à extraire une sous-suite, (u_N) converge fortement vers une limite u dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$. Enfin par unicité de la limite au sens des distributions on a $v=\nabla u$.

Pour conclure, soit $\psi\in\mathscr{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{T}^d))$ et

$$g_N(t):=\langle u_N(t),\psi(t)\rangle$$

qui est bornée dans $L^\infty([0,T])$. En outre

$$\begin{aligned}g_N'(t)&=\langle\partial_t u_N(t),\psi(t)\rangle+\langle u_N(t),\partial_t\psi(t)\rangle\\&\le\|\partial_t u_N(t)\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)}\sup_{[0,T]}\|\psi(t)\|_{H^1(\mathbb{T}^d)}+\|u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\sup_{[0,T]}\|\partial_t\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\end{aligned}$$

qui est donc bornée dans $L^{\frac{4}{d}}([0,T])$. On en déduit que (g_N) est bornée dans $\mathscr{C}^{1-\frac{d}{4}}([0,T];\mathbb{R})$[(2)] : en effet pour tout $t'<t$

$$\begin{aligned}\Big|g_N(t')-g_N(t)\Big|&\le\int_{t'}^t\big|g_N'(s)\big|\,ds\\&\le|t-t'|^{1-\frac{d}{4}}\|g_N'\|_{L^{\frac{4}{d}}([0,T])}\end{aligned}$$

et par le théorème d'Ascoli (g_N) converge vers une limite g dans $L^\infty([0,T];\mathbb{R})$. Comme par ailleurs

$$g_N(t)\to\int u(t,x)\psi(t,x)\,dx$$

dans $L^2([0,T])$, le résultat suit par unicité de la limite. □

[(2)] Elle est est équicontinue si $d=4$ puisque g_N' est uniformément bornée par une fonction de $L^1([0,T])$.

5.2.3. Passage à la limite dans l'équation approchée. — Soit $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^d)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u_N(t), \Psi(t)\rangle &= \langle \mathbb{P}_N \Delta u_N(t), \Psi(t)\rangle + \big\langle \mathbb{P}_N Q\big(u_N(t), u_N(t)\big), \Psi(t)\big\rangle + \langle u_N(t), \partial_t \Psi(t)\rangle \\ &= -\int_{\mathbb{T}^d} \nabla u_N(t,x) : \nabla \mathbb{P}_N \Psi(t,x)\, dx + \int_{\mathbb{T}^d} u_N(t,x) \otimes u_N(t,x) : \nabla \mathbb{P}_N \Psi(t,x)\, dx + \int_{\mathbb{T}^d} u_N(t,x) \partial_t \Psi(t,x)\, dx\end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d} u_N(t,x)\cdot \Psi(t,x)\, dx + \int_{[0,t]\times \mathbb{T}^d} \Big(\nabla u_N : \nabla \mathbb{P}_N \Psi - u_N \otimes u_N : \nabla \mathbb{P}_N \Psi - u_N \cdot \partial_t \Psi\Big)(t',x)\, dx\, dt' \\ = \int_{\mathbb{T}^d} u_N(0,x)\cdot \Psi(0,x)\, dx.\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Pour passer à la limite en $N \to \infty$ on utilise le lemme suivant.

Lemme 5.2.8. *— Soit (A_N) une suite bornée d'opérateurs linéaires sur un espace de Banach E telle que*

$$\forall h \in E, \quad \big\| A_N h - h\big\|_E \to 0, \quad N \to \infty.$$

Alors pour toute fonction $\Psi \in \mathscr{C}^0([0,T]; E)$ on a

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\| A_N \Psi(t) - \Psi(t)\big\|_E \to 0, \quad N \to \infty.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction Ψ est continue à valeurs dans E, on peut recouvrir l'ensemble compact $\Psi([0,T])$ par un nombre fini L de boules de rayon $\varepsilon/2(\mathscr{A}+1)$ avec $\mathscr{A} := \sup_N \|A_N\|_{\mathscr{L}(E)}$ et de centres $\Psi(t_\ell)$ avec $1 \le \ell \le L$. Alors pour tout $t \in [0,T]$ et tout $1 \le \ell \le L$ on a

$$\begin{aligned}\big\| A_N \Psi(t) - \Psi(t)\big\|_E &\le \big\| A_N \Psi(t) - A_N \Psi(t_\ell)\big\|_E \\ &\quad + \big\| A_N \Psi(t_\ell) - \Psi(t_\ell)\big\|_E + \big\| \Psi(t_\ell) - \Psi(t)\big\|_E.\end{aligned}$$

Par hypothèse sur A_N, la suite $(A_N \Psi(t_\ell))$ converge vers $\Psi(t_\ell)$ pour tout $1 \le \ell \le L$ donc il existe N_L tel que si $n \ge N_L$ alors

$$\forall 1 \le \ell \le L, \quad \big\| A_N \Psi(t_\ell) - \Psi(t_\ell)\big\|_E \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

On en déduit que si $n \ge N_L$, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $1 \le \ell \le L$ on a

$$\begin{aligned}\big\| A_N \Psi(t) - \Psi(t)\big\|_E &\le \big\| A_N \Psi(t) - A_N \Psi(t_\ell)\big\|_E + \big\| \Psi(t_\ell) - \Psi(t)\big\|_E + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le (\mathscr{A}+1)\big\| \Psi(t_\ell) - \Psi(t)\big\|_E + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

et étant donné $t \in [0,T]$, si ℓ est tel que

$$\big\| \Psi(t_\ell) - \Psi(t)\big\|_E \le \frac{\varepsilon}{2(\mathscr{A}+1)}$$

le résultat suit. □

On applique ce lemme à $E = H^1(\mathbb{T}^d)$ et $A_N = \mathbb{P}_N$. Alors

$$\sup_{t\in[0,T]} \big\| \mathbb{P}_N \Psi(t) - \Psi(t)\big\|_{H^1(\mathbb{T}^d)} \to 0, \quad N \to \infty,$$

et donc tous les termes linéaires en u_N dans la formulation (5.2.4) ci-dessus passent à la limite grâce aux résultats de convergence faible de la Proposition 5.2.7. Il reste donc à étudier le terme non linéaire. Il s'agit de montrer que

$$\int_{[0,t]\times\Omega} u_N \otimes u_N : \nabla \Psi(t',x)\, dx\, dt' \to \int_{[0,t]\times\Omega} u \otimes u : \nabla \Psi(t',x)\, dx\, dt', \quad N \to \infty.$$

On va montrer que

$$\left\| u_N \otimes u_N - u \otimes u \right\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))} \to 0\,, \quad N \to \infty.$$

On écrit

$$u_N \otimes u_N - u \otimes u = (u_N - u) \otimes u_N + u \otimes (u_N - u)$$

et on utilise le fait vu ci-dessus que pour toute fonction $a \in H^1(\mathbb{T}^d)$

$$\|a\|_{L^4(\mathbb{T}^d)} \leq \|a\|^{1-\frac{d}{4}}_{L^2(\mathbb{T}^d)} \|\nabla a\|^{\frac{d}{4}}_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,, \tag{5.2.5}$$

et donc pour toute fonction $b \in L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^d))$

$$\|b\|^2_{L^2([0,T];L^4(\mathbb{T}^d))} \leq \|b\|^{2-\frac{d}{2}}_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))} \|\nabla b\|^{\frac{d}{2}}_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))}.$$

On applique cette inégalité à $b = u_N - u$ et $b = u_N, u$. Avec une inégalité de Hölder, le résultat suit.

5.2.4. Inégalité d'énergie. — On sait par la Proposition 5.2.7 que pour tout champ de vecteurs ψ dans $\mathscr{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{T}^d))$ de divergence nulle,

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{[0,T]} \left| \langle u_N(t) - u(t), \psi(t) \rangle \right| = 0\,.$$

Comme (u_N) est bornée dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))$, la suite $(u_N(t))$ est bornée dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ pour tout $t \in [0,T]$ et donc par unicité de la limite, pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{T}^d)$ de divergence nulle, quitte à extraire une sous-suite,

$$\big(u_N(t)|\varphi\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)} \longrightarrow \big(u(t)|\varphi\big)_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,, \quad N \to \infty.$$

Comme $H^1(\mathbb{T}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, on a donc pour tout $t \in [0,T]$

$$u_N(t) \rightharpoonup u(t) \in L^2(\mathbb{T}^d)\,,$$

ce qui donne en particulier que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq \liminf_{N\to\infty} \|u_N(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}\,.$$

Le résultat suit puisque par ailleurs $\nabla u_N \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d)$.

5.2.5. Borne dans $\mathscr{C}^0([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d))$. — Grâce à (5.2.5) on a

$$\|u\|_{L^{\frac{8}{d}}([0,T];L^4(\mathbb{T}^d))} \leq \|u\|^{1-\frac{d}{4}}_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))} \|\nabla u\|^{\frac{d}{4}}_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))}.$$

Si $\varphi \in H^1(\mathbb{T}^d)$ alors pour tout $0 < t < t'$ on a

$$\begin{aligned}\left| \langle u(t), \varphi \rangle - \langle u(t'), \varphi \rangle \right| &= \left| \int_t^{t'} \big(\langle \nabla u(t''), \nabla\varphi \rangle - \langle u \otimes u(t''), \nabla\varphi \rangle \big)\, dt'' \right| \\ &\leq |t-t'|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))} \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{T}^d)} + |t-t'|^{1-\frac{d}{4}} \|u\|^2_{L^{\frac{8}{d}}([0,T];L^4(\mathbb{T}^d))} \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{T}^d)}\,.\end{aligned}$$

Le théorème est démontré. □

Remarque 5.2.9. — • *Si l'équation est posée dans l'espace entier, la démonstration est analogue en ayant recours à une troncature en Fourier, et des fonctions test à support compact en espace pour pouvoir utiliser la compacité de l'injection de l'espace des fonctions H^1 à support compact dans L^2.*

• *De même si l'équation est posée dans un domaine, avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes au bord par exemple, alors on peut appliquer exactement la même démarche en utilisant la théorie spectrale de l'opérateur de Stokes.*

• *La démonstration est inchangée si l'on rajoute une force extérieure dans $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d))$.*

• *Le théorème ne dit rien de l'unicité de la solution, qui sera examinée aux paragraphes suivants.*

• *La démonstration montre que l'on pourrait prendre la fonction test dans* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{T}^d))$ *: on peut remplacer en effet dans la formulation faible le terme* $\int_{[0,t]\times\mathbb{T}^d}\big(u\otimes u:\nabla\Psi\big)(t')\,dx\,dt'$ *par* $\int_{[0,t]}\big\langle u\otimes u,\nabla\Psi\big\rangle(t',x)dt'$*. En effet comme vu dans (5.2.3) on a*

$$\|u\otimes u\|_{L^{\frac{4}{d}}([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))}\leq C\|u\|^{2-\frac{d}{2}}_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^d))}\|u\|^{\frac{d}{2}}_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^d))}.$$

5.3. Résultats de stabilité

5.3.1. Le cas de la dimension deux. —

***Théorème 5.3.1* (Leray, 1934)**. — *Soit* $u_0\in L^2(\mathbb{T}^2)$ *un champ de vecteurs de divergence nulle. Alors la solution turbulente construite au Théorème 5.2.4 est unique, appartient à* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))$ *et vérifie l'égalité d'énergie:*

$$\forall\, t\geq 0,\quad \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}+\int_0^t\|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}dt'=\frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

En outre si u_0 *et* v_0 *sont deux champs de vecteurs de divergence nulle dans* $L^2(\mathbb{T}^2)$ *alors les solutions* u *et* v *associées vérifient*

$$\forall\, t\geq 0,\quad \|u(t)-v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}+\int_0^t\|\nabla(u(t')-v(t'))\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}dt'\leq\|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\exp C\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{5.3.1}$$

Démonstration. — Commençons par vérifier que la solution turbulente appartient à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))$ et vérifie l'égalité d'énergie. On a pour tout $u\in L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))\cap L^2(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{T}^2))$

$$\begin{aligned}\big\|Q(u,u)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^+;H^{-1}(\mathbb{T}^2))}&\leq\|u\otimes u\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))}\\&\leq\|u\|^2_{L^4(\mathbb{R}^+;L^4(\mathbb{T}^2))}\\&\leq C\|u\|^2_{L^4(\mathbb{R}^+;H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2))}\\&\leq C\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))}.\end{aligned}$$

On en déduit que si u est une solution turbulente, alors u est solution du problème de Stokes avec terme source $Q(u,u)$. Par le Théorème 5.1.2, elle est donc bien dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{T}^2))$. Par ailleurs elle vérifie

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}+\int_0^t\|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}dt'=\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}+\int_0^t\langle Q(u,u)(t'),u(t')\rangle\,dt',$$

et on en déduit l'égalité d'énergie.

Pour montrer l'unicité on va en fait montrer le résultat de stabilité (5.3.1): si u et v sont deux solutions turbulentes associées respectivement à u_0 et v_0, alors $w:=u-v$ est solution du système de Stokes avec terme source $Q(u,u)-Q(v,v)$ et il suffit de remarquer que pour tous les champs de vecteurs a,b dans $H^1(\mathbb{T}^2)$

$$\big\langle Q(a,a)-Q(b,b),a-b\big\rangle=\big\langle Q(a-b,a),a-b\big\rangle$$

et

$$\begin{aligned}\Big|\big\langle Q(a-b,a),a-b\big\rangle\Big|&\leq\|\nabla(a-b)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|(a-b)\otimes a\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\\&\leq\|\nabla(a-b)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|a-b\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}\|a\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}\\&\leq C\|\nabla(a-b)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|a-b\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|\nabla a\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)}.\end{aligned}$$

On trouve alors par le Théorème 5.1.2 sur le problème de Stokes

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt' = \frac{1}{2}\|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \int_0^t \Big\langle \big(Q(u,u) - Q(v,v)\big)(t'), u(t')\Big\rangle dt'$$
$$\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + C\int_0^t \|\nabla w\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|w\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt'.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + C\int_0^t \|w\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt'.$$

On conclut par l'inégalité de Gronwall et l'estimation d'énergie vérifiée par u. □

Remarque 5.3.2. — *Nous verrons ci-dessous que la situation est bien moins favorable en dimensions trois d'espace, puisque l'on ne sait pas si les solutions de Leray sont uniques (un résultat récent d'Albritton, Brué et Colombo*[3] *montre d'ailleurs qu'il existe une force extérieure donnant lieu à deux solutions pour une donnée initiale nulle), ni si les solutions uniques (on en construira au Paragraphe 5.3.2) sont globales. Si la raison peut sembler technique — c'est lié au fait que les injections de Sobolev dépendent de la dimension — on peut constater une différence importante sur l'équation en dimension 2 par rapport à la dimension 3 : le tourbillon $\omega := \mathrm{rot}\, u$ vérifie une simple équation de transport-diffusion (non linéaire) en dimension 2*

$$\partial_t \omega + u\cdot\nabla\omega - \Delta\omega = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathbb{T}^2$$

alors qu'en dimension 3 il y a un terme de "stretching" supplémentaire qui en rend l'analyse beaucoup plus difficile :

$$\partial_t \omega + u\cdot\nabla\omega - \omega\cdot\nabla u - \Delta\omega = 0 \quad \textit{dans} \quad \mathbb{T}^3.$$

5.3.2. Le cas de la dimension trois. —

Théorème 5.3.3. — *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^3)$ un champ de vecteurs de divergence nulle et soit u une solution turbulente associée. Si u appartient à $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$ alors u est unique, est dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))$ et vérifie l'égalité d'énergie: pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' = \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

En outre si $v_0 \in L^2(\mathbb{T}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle et v une solution turbulente associée, on a

$$\|u(t) - v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \big\|\nabla(u(t') - v(t'))\big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} dt' \leq \|u_0 - v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \exp C\|u\|^4_{L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))}. \tag{5.3.2}$$

Remarque 5.3.4. — *Notons que l'espace $L^4(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{R}^3))$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation*[4] *: si $u(t,x)$ est solution associée à $u_0(x)$ alors $u_\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution associée à $\lambda u_0(\lambda x)$, et $\|u_\lambda\|_{L^4(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{R}^3))} = \|u\|_{L^4(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{R}^3))}$.*

On note aussi que $L^2(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{R}^2))$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation.

---

[3] Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations, Annals of Mathematics, 2022.

[4] Dans le cas périodique il faut ajuster la taille de la période au changement d'échelle.

Démonstration. — Pour le premier point il suffit grâce au Théorème 5.1.2 de vérifier que $Q(u,u)$ appartient à $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$. Pour cela on écrit, pour tout champ de vecteurs a suffisamment régulier,

$$\begin{aligned}\|Q(a,a)\|_{H^{-1}(\mathbb{T}^3)} &\leq \|a\otimes a\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\\ &\leq \|a\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}\\ &\leq C\|a\|^2_{H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{T}^3)}\\ &\leq C\|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla a\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}.\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\|Q(a,a)\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))} &\leq C\|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))}\|\nabla a\|^{\frac{3}{2}}_{L^3([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))}\\ &\leq CT^{\frac{1}{8}}\|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))}\|\nabla a\|^{\frac{3}{2}}_{L^4([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))},\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat.

Montrons à présent l'inégalité de stabilité (5.3.2), d'où découle l'unicité. On va utiliser une méthode dite d'unicité "fort-faible". On écrit, pour $w := u-v$,

$$\begin{aligned}E(w)(t) &:= \frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt'\\ &= E(u)(t)+E(v)(t)-\big(u(t)|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} - 2\int_0^t \big(\nabla u(t')|\nabla v(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt' \qquad (5.3.3)\\ &\leq E(u_0)+E(v_0)-\big(u(t)|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} - 2\int_0^t \big(\nabla u(t')|\nabla v(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt',\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'estimation d'énergie sur les solutions turbulentes. Supposons provisoirement que u et v sont régulières en t,x (nous verrons plus bas comment justifier le calcul qui suit). Alors en prenant v comme fonction test dans l'équation vérifiée par u on a

$$\big(\partial_t u(t)|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(\nabla u(t)|\nabla v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \big(Q(u(t),u(t))|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

et de même en prenant u comme fonction test dans l'équation vérifiée par v il vient

$$\big(\partial_t v(t)|u(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(\nabla v(t)|\nabla u(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \big(Q(v(t),v(t))\,|u(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

En sommant ces deux identités il vient

$$\frac{d}{dt}(u(t)|v(t))_{L^2(\mathbb{T}^3)} + 2\big(\nabla u(t)|\nabla v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} = \big(Q(u(t),u(t))|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(Q(v(t),v(t))\,|u(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

On remarque maintenant que pour tous les champs de vecteurs a et b de divergence nulle, suffisamment réguliers,

$$\begin{aligned}\big(Q(a,a)|b\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(Q(b,b)|a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} &= \big(Q(a,a)|b-a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(Q(b,b)|a-b\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\\ &= \big(Q(a,a)|b-a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \big(Q(b,a)|a-b\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} \qquad (5.3.4)\\ &= \big(Q(a-b,a)|b-a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}&\big(u(t)|v(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + 2\int_0^t \big(\nabla u(t')|\nabla v(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'\\ &\quad = (u_0|v_0)_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \big((u-v)\cdot\nabla u|u-v\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}(t')\,dt'\end{aligned}$$

En majorant

$$\begin{aligned}\Big|\big((u-v)\cdot\nabla u|u-v\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}(t')\Big| &\leq \|(u-v)(t')\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}\|\nabla u(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\\ &\leq C\|(u-v)(t')\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla(u-v)(t')\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla u(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\end{aligned}$$

on obtient, en remarquant que $E(u_0)+E(v_0)-(u_0|v_0)_{L^2(\mathbb{T}^3)}=E(w_0)=\frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$, que

$$\begin{aligned}E(w)(t)&\leq\frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+C\int_0^t\|w(t')\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla w(t')\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla u(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'\\&\leq\frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\frac{1}{2}\int_0^t\|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt'+C\int_0^t\|w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla u(t')\|^4_{L^2(\mathbb{T}^3)}.\end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Gronwall.

Nous allons maintenant montrer que le fait que $u\in L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$ permet de rendre ces arguments rigoureux. Plus précisément on va pouvoir prendre une approximation de u comme fonction test dans l'équation vérifiée par v. Admettons momentanément le lemme d'approximation suivant.

Lemme 5.3.5. — *Soit u une solution turbulente appartenant à $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$. Il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de champs de vecteurs de divergence nulle dans $\mathscr{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$ telle que*

- *la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))\cap L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))$;*
- *pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $R_k\in L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$ telle que*

$$\partial_t u_k-\Delta u_k=Q(u_k,u_k)+R_k+\nabla p \tag{5.3.5}$$

avec $\lim_{k\to\infty}\|R_k\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))}=0$.

La fonction u_k donnée par le Lemme 5.3.5 appartient à $\mathscr{C}^1([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$, donc elle peut être utilisée comme fonction test dans la Définition 5.2.1 (grâce à la Remarque 5.2.9). Comme v est une solution turbulente, on a ainsi

$$\begin{aligned}\big(v(t)|u_k(t)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}=\big(v_0|u_k(0)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}&-\int_0^t\big(\nabla v(t')|\nabla u_k(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt'\\&+\int_0^t\big\langle v(t')\otimes v(t'),\nabla u_k(t')\big\rangle\,dt'+\int_0^t\big\langle v(t'),\partial_t u_k(t')\big\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Alors en utilisant (5.3.5) il vient

$$\begin{aligned}\big(v(t)|u_k(t)\big)_{L^2}\;=\;&\big(v_0|u_k(0)\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}-2\int_0^t\big(\nabla v(t')|\nabla u_k(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt'\\&+\int_0^t\big\langle v(t')\otimes v(t'),\nabla u_k(t')\big\rangle\,dt'+\int_0^t\big\langle v(t'),Q\big(u_k(t'),u_k(t')\big)\big\rangle\,dt'+\int_0^t\big\langle v(t'),R_k(t')\big\rangle\,dt'.\end{aligned}$$

Le Lemme 5.3.5 implique que $\lim_{k\to\infty}(v(t)|u_k(t))_{L^2(\mathbb{T}^3)}=(v(t)|u(t))_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ et que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Big\{\big(v_0|u_k(0)\big)_{L^2}-2\int_0^t\big(\nabla v(t')|\nabla u_k(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'+\int_0^t\big\langle v(t'),R_k(t')\big\rangle\,dt'\Big\}&\\=\big(v_0|u_0\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}-2\int_0^t\big(\nabla v(t')|\nabla u(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'.&\end{aligned}$$

Alors en définissant

$$\mathscr{N}_k(t):=\int_0^t\big\langle v(t')\otimes v(t'),\nabla u_k(t')\big\rangle\,dt'+\int_0^t\big\langle Q(u_k(t'),u_k(t')),v(t')\big\rangle\,dt',$$

on obtient

$$\big(v(t)|u(t)\big)_{L^2}=\big(v_0|u_0\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}-2\int_0^t\big(\nabla v(t')|\nabla u(t')\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'+\lim_{k\to\infty}\mathscr{N}_k(t).$$

En revenant à (5.3.3), on a donc

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+2\int_0^t\|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt'\leq\|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\lim_{k\to\infty}\mathscr{N}_k(t).$$

Il reste à étudier le terme $\mathscr{N}_k(t)$. On rappelle que pour tout a et b dans $H^1(\mathbb{T}^3)$, on a $(b\otimes b|\nabla a)_{L^2} = \langle Q(b,b),a\rangle$ et donc

$$(b\otimes b|\nabla a)_{L^2} + \langle Q(a,a),b\rangle = \langle Q(b,b),a\rangle + \langle Q(a,a),b\rangle.$$

Alors comme vu dans (5.3.4),

$$\begin{aligned}\langle Q(b,b),a\rangle + \langle Q(a,a),b\rangle &= \langle Q(a-b,a),b-a\rangle \\ &= \big((a-b)\cdot\nabla a|b-a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\big|\big((a-b)\cdot\nabla a|b-a\big)_{L^2(\mathbb{T}^3)}\big| &\le \|a-b\|^2_{L^4(\mathbb{T}^3)}\|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\le C\|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|a-b\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla(a-b)\|^{\frac32}_{L^2(\mathbb{T}^3)}.\end{aligned}$$

Pour presque tout temps t, le champ de vecteurs $v(t)$ appartient à $H^1(\mathbb{T}^3)$. On a donc que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $t\ge 0$, en prenant $a = u_k(t')$ et $b = v(t')$, $t'\in[0,t]$,

$$\mathscr{N}_k(t) \le C\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|(u_k-v)(t')\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla(u_k-v)(t')\|^{\frac32}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'.$$

Par le Lemme 5.3.5, on sait que quand k tend vers l'infini

$$\begin{aligned}\|\nabla u_k(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\longrightarrow \|\nabla u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \quad \text{dans} \quad L^4([0,T]) \\ \|(u_k-v)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\longrightarrow \|(u-v)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \quad \text{dans} \quad L^\infty([0,T]) \\ \|\nabla(u_k-v)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} &\longrightarrow \|\nabla(u-v)(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \quad \text{dans} \quad L^2([0,T]).\end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{k\to\infty}\mathscr{N}_k(t) \le \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|(u-v)(t')\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla(u-v)(t')\|^{\frac32}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'.$$

On conclut que

$$\begin{aligned}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + 2\int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' &\le \|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \\ &\quad + C\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\nabla w(t')\|^{\frac32}_{L^2(\mathbb{T}^3}\|w(t')\|^{\frac12}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}dt' &\le \|u_0-v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3} \\ &\quad + \int_0^t C\|\nabla u(t')\|^4_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|w(t')\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}\,dt'.\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure la démonstration, à condition de démontrer le Lemme 5.3.5. □

Démonstration du Lemme 5.3.5. On a vu que si u est une solution turbulente dans $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$, alors $Q(u,u)$ appartient à $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$. Cela implique que $\partial_t u$ appartient à $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$. Par le théorème de convergence dominée on a donc

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbb{P}_k u-u\|_{L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))} = \lim_{k\to\infty}\|\mathbb{P}_k u-u\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))} = \lim_{k\to\infty}\|\mathbb{P}_k\partial_t u-\partial_t u\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

On rappelle (voir le Lemme 1.10.1) que si une fonction f dans $L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$ est telle que $\partial_t f$ appartient à $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$, alors on a $f\in\mathscr{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))$ et

$$\|f\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))} \le C\big(\|f\|_{L^2([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))} + \|\partial_t f\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))}\big).$$

On en déduit que

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbb{P}_k u-u\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{T}^3))} = 0.$$

Par régularisation en temps, on peut donc construire une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}^1([0,T],H^1(\mathbb{T}^3))$ telle que u_k converge vers u dans $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))\cap L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^3))$, et $\partial_t u_k$ converge vers $\partial_t u$ dans $L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))$. Enfin puisque

$$\|Q(a,a)\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))} \leq CT^{\frac{1}{8}}\|a\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^3))}\|a\|^{\frac{3}{2}}_{L^4([0,T],H^1(\mathbb{T}^3))},$$

on a

$$\lim_{k\to\infty}\|Q(u_k,u_k)-Q(u,u)\|_{L^2([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^3))}=0.$$

Le Lemme 5.3.5 est démontré. □

5.4. Résultats d'existence et d'unicité

Le théorème suivant, dû à Fujita[5] et Kato[6], sera démontré en TD.

***Théorème 5.4.1* (Fujita-Kato, 1964).** — *Si $u_0\in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3)$ est de divergence nulle et de moyenne nulle, il existe un temps $T>0$ et une unique solution de (5.0.1) dans $L^4([0,T];H^1(\mathbb{T}^3))$. Elle appartient à $\mathscr{C}^0([0,T];H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3))\cap L^2([0,T];H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3))$.*

De plus il existe une constante $c>0$ telle que si $\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3)}\leq c$, alors $T=\infty$. En outre dans ce cas

$$\forall\, t\geq 0,\quad \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3)}+\Big(\int_0^t\|u(t')\|^4_{H^1(\mathbb{T}^3)}\,dt'\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\int_0^t\|u(t')\|^2_{H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3)}\,dt'\Big)\leq 2\|u_0\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^3)}.$$

***Remarque 5.4.2*.** — *L'espace $L^\infty([0,T];H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T];H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation présenté en Remarque 5.3.4.*

Nous allons démontrer un résultat plus récent, dans l'espace entier (il est vrai dans des cas généraux mais la démonstration par Fourier est plus simple dans $\mathbb{R}^3$). La démonstration de ce résultat repose sur plusieurs théorèmes intermédiaires d'existence et d'unicité de solutions, dûs à des auteurs cités plus bas. Le premier résultat d'unicité dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{T}^3))$ est dû à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset[7] et E. Terraneo en 1997.

***Théorème 5.4.3* (Furioli, Lemarié-Rieusset, Terraneo, 1997).** — *Si $u_0\in L^3(\mathbb{R}^3)$ est de divergence nulle, il existe un temps $T>0$ et une unique solution de (5.0.1) dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{T}^3))$. De plus il existe une constante $c>0$ telle que si $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leq c$, alors $T=\infty$.*

***Remarque 5.4.4*.** — *L'espace $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation présenté en Remarque 5.3.4.*

On va commencer par démontrer le théorème suivant. On définit la famille d'espaces suivante pour tout $1\leq p\leq\infty$ et $T>0$, dont on vérifie qu'ils sont invariants d'échelle:

$$K_p(T):=\Big\{u\in\mathscr{C}^0(]0,T[;L^p(\mathbb{R}^3))\,/\,\|u\|_{K_p(T)}:=\sup_{t\in[0,T]}t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})}\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}<\infty\Big\}.$$

***Théorème 5.4.5* (Kato, 1984).** — *Soit $3<p<\infty$. Si $u_0\in L^3(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, il existe un temps $T>0$ et une unique solution de (5.0.1) dans $K_p(T)$. De plus cette solution est dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{T}^3))$ et il existe une constante $c>0$ telle que si $\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\leq c$, alors $T=\infty$.*

[5] 1928
[6] 1917-1999
[7] 1960

Pour démontrer le Théorème 5.4.5, nous allons appliquer un lemme de point fixe pour résoudre l'équation dans $K_p(T)$, et ensuite vérifier que la solution ainsi construite est bien dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{T}^3))$.

Rappellons l'énoncé du lemme de point fixe dans les espaces de Banach.

Lemme 5.4.6. — *Soit E un espace de Banach et soit $\mathscr{B}$ un opérateur bilinéaire continu de E dans E, de norme $\|\mathscr{B}\|$. Si $\alpha > 0$ vérifie*

$$\alpha \leq \frac{1}{4\|\mathscr{B}\|}, \tag{5.4.1}$$

alors pour tout $x_0 \in B_E(0,\alpha)$, il existe un unique x dans $B_E(0,2\alpha)$ tel que

$$x = x_0 + \mathscr{B}(x,x).$$

On a en outre $\|x\|_E \leq 2\|x_0\|_E$.

Afin de démontrer le Théorème 5.4.5, commençons par démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.4.7. — *Soit $3 < p < \infty$. Il existe $c > 0$ tel que si $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ est de divergence nulle et vérifie pour un $T > 0$*

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{K_p(T)} \leq c,$$

alors il existe une unique solution de (5.0.1) dans la boule de $K_p(T)$ centrée en 0 et de rayon $2c$.

Remarque 5.4.8. — *Par définition des espaces de Besov[8], le fait que $e^{t\Delta}u_0$ appartienne à $K_p(\infty)$ est équivalent au fait que u_0 appartienne à l'espace de Besov $\dot{B}^{-1+\frac{3}{p}}_{p,\infty}$. On retrouve ainsi le théorème de M. Cannone[9], Y. Meyer[10] et F. Planchon[11] de 1994. La petitesse dans un espace de Besov d'indice négatif correspond à une fonction rapidement oscillante (voir le Lemme 5.4.11).*

Le Théorème 5.4.7 est connu pour être faux dans le cas $p = \infty$ (voir J. Bourgain[12]-N. Pavlovic). Le meilleur résultat à ce jour concernant le problème de Cauchy est celui de H. Koch[13] et D. Tataru[14] en 2001, qui construisent une solution globale unique si la donnée est petite dans BMO^{-1}.

Démonstration. — On écrit la formule de Duhamel

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t), \quad B(u,u)(t) := \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}Q(u,u)(t')\,dt'. \tag{5.4.2}$$

Afin de mettre en place une démonstration par point fixe, nous allons commencer par démontrer le lemme suivant.

Lemme 5.4.9. — *Soit $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Alors pour tout $3 \leq p \leq \infty$,*

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{K_p(\infty)} \leq C\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$$

et pour tout $3 < p \leq \infty$

$$\lim_{T\to 0}\|e^{t\Delta}u_0\|_{K_p(T)} = 0.$$

[8] 1933-
[9] 1966
[10] 1939
[11] 1970
[12] 1954-2018
[13] 1962
[14] 1967

Démonstration. — On a

$$e^{t\Delta}u_0 = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \star u_0$$

donc pour tout $3 \le p \le \infty$,

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le \frac{C}{t^{\frac{3}{2}}} \|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \|e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}}\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{2}{3} + \frac{1}{p}\cdot$$

Alors en particulier

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{K_p(\infty)} \le C\|u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}.$$

Par ailleurs si $\varepsilon > 0$ est fixé, soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\|\phi - u_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \le \varepsilon.$$

On note que pour tout $t > 0$

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \le \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

et donc

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{K_p(T)} \le T^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})} \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Puisque

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{K_p(T)} \le \|e^{t\Delta}(u_0 - \phi)\|_{K_p(\infty)} + \|e^{t\Delta}\phi\|_{K_p(T)},$$

le résultat suit. □

Montrons ensuite la proposition suivante.

Proposition 5.4.10. — *Soient p, q, r tels que*

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1, \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{3} + \frac{1}{r}\cdot$$

Il existe une constante C telle que pour tout $T > 0$,

$$\forall (u, v) \in K_p(T) \times K_q(T), \quad \big\|B(u, v)\big\|_{K_r(T)} \le C\|u\|_{K_p(T)}\|v\|_{K_q(T)}.$$

Démonstration. — Soit $m \in \{1, 2, 3\}$. En rappellant la définition de $B(u, u)$ définie en (5.4.2) définissons

$$B_m(u, v)(t) := -\int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}\partial_m(u^m v)(t')dt'.$$

Alors $B_m(u, v)$ vérifie l'équation de Stokes avec donnée initiale nulle et terme source $\partial_m\mathbb{P}(u^m u)$. Supposons démontré que pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, la j-ième coordonnée de $B_m(u, v)$ vérifie

$$B_m^j(u, v)(t) = \sum_{k=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{mk}^j(t - t', y)\, u^m v^k(t', x - y)\, dy dt' \tag{5.4.3}$$

avec $\Gamma_{mk}^j \in C\big((0, \infty); L^s(\mathbb{R}^3)\big)$ pour tout $s \ge 1$ et

$$\|\Gamma_{mk}^j(t)\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \le \frac{C}{t^{2-\frac{3}{2s}}} \quad \text{et} \quad \big|\Gamma_{mk}^j(t, x)\big| \le \frac{C}{(t^{\frac{1}{2}} + |x|)^4}\cdot \tag{5.4.4}$$

Alors en écrivant $1 + 1/r = 1/s + 1/p + 1/q$ on a puisque $\frac{1}{r} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1$

$$\big\|B(u, v)(t)\big\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \le C\int_0^t \frac{1}{(t - t')^{2-\frac{3}{2}(1+\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \|u(t')\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|v(t')\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} dt'$$

d'où

$$\big\|B(u, v)(t)\big\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \le C\|u\|_{K_p(T)}\|v\|_{K_q(T)} \int_0^t \frac{1}{(t - t')^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{t'^{1-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}} dt' \tag{5.4.5}$$

et donc

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{L^r(\mathbb{R}^3)} \le C\|u\|_{K_p(T)}\|v\|_{K_q(T)}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}},$$

ce que l'on cherche à démontrer. Notons que la condition $0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{3}+\frac{1}{r}$ est nécessaire pour faire converger l'intégrale (5.4.5).

Montrons donc le résultat (5.4.3)-(5.4.4). Pour simplifier les notations posons $f := u^m v$. On a

$$\mathscr{F}\big(B_m^j(u,v)\big)(t,\xi) = i\int_0^t e^{-(t-t')|\xi|^2}\xi_m \mathscr{F}(\mathbb{P}f)^j(t',\xi)\,dt'.$$

En se souvenant que

$$\mathscr{F}(\mathbb{P}f)^j(\xi) = \mathscr{F}f^j(\xi) - \sum_{k=1}^3 \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\mathscr{F}f^k(\xi)$$

on obtient que $\mathscr{F}\big(B_m^j(u,v)\big)(t,\xi)$ s'écrit sous la forme

$$\mathscr{F}\big(B_m^j(u,v)\big)(t,\xi) = i\sum_{k=1}^3\int_0^t e^{-(t-t')|\xi|^2}\alpha_{kj}\frac{\xi_m\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\mathscr{F}f^k(t',\xi)\,dt'$$

où les coefficients α_{kj} sont donnés. Cela définit

$$\Gamma^j_{mk}(t) := i\alpha_{kj}\mathscr{F}^{-1}\Big(\frac{\xi_m\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}e^{-t|\xi|^2}\Big).$$

Rappellons que

$$\mathscr{F}^{-1}\Big(e^{-t|\xi|^2}\Big)(x) = \Big(\frac{\pi}{t}\Big)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Pour obtenir l'estimation ponctuelle on écrit que pour tout $\beta\in\mathbb{N}^3, |\beta|=3$,

$$\begin{aligned}\Gamma_\beta(t,x) &:= i\mathscr{F}^{-1}\Big(\frac{\xi^\beta}{|\xi|^2}e^{-t|\xi|^2}\Big)\\ &= (-2\pi)^{-3}\partial^\beta\int_t^\infty\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi - t'|\xi|^2}\,d\xi\,dt'\\ &= -\partial^\beta\int_t^\infty\frac{1}{(4\pi t')^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t'}}\,dt'.\end{aligned}$$

Mais

$$\partial^\beta\Big(e^{-\frac{|x|^2}{4t'}}\Big) = \frac{1}{(4t')^{\frac{3}{2}}}\Big(\partial^\beta(e^{-|\cdot|^2})\Big)\Big(\frac{x}{(4t')^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

donc

$$\Gamma_\beta(t,x) = -\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\int_t^\infty\frac{1}{(4t')^3}\Psi_\beta\Big(\frac{x}{(4t')^{\frac{1}{2}}}\Big)dt',\quad \Psi_\beta(z) := \partial^\beta e^{-|z|^2}.$$

Le changement de variables $t'\mapsto r := |x|^2/(4t')$ fournit

$$\big|\Gamma_\beta(t,x)\big| \le \frac{C}{|x|^4}\int_0^{\frac{|x|^2}{4t}} r\Psi_\beta\Big(\frac{x}{|x|}r^{\frac{1}{2}}\Big)\,dr$$

et donc l'estimation

$$\big|\Gamma_\beta(t,x)\big| \le C\min\big(|x|^{-4}, t^{-2}\big)$$

et donc

$$\big\|\Gamma^j_{mk}(t)\big\|_{L^s(\mathbb{R}^3)} \le \frac{C}{t^{2-\frac{3}{2s}}}.$$

La Proposition 5.4.10 est démontrée. □

Terminons la démonstration du Théorème 5.4.7. On remarque que Γ^j_{mk} est continue en temps sur $]0,T[$ à valeurs dans $L^s(\mathbb{R}^3)$ car si $0<t'<t$ alors

$$\left|\Gamma^j_{mk}(t,x)-\Gamma^j_{mk}(t',x)\right| \le \frac{C}{|x|^4}\int_{\frac{|x|^2}{4t}}^{\frac{|x|^2}{4t'}} re^{-\delta r}\,dr\,,$$

et donc

$$\left|\Gamma^j_{mk}(t,x)-\Gamma^j_{mk}(t',x)\right| \le C\min\Big(\frac{t^2-t'^2}{(tt')^2},|x|^{-4}\Big).$$

On peut donc appliquer un théorème de point fixe en utilisant le Lemme 5.4.9, et la Proposition 5.4.10 avec $p=q=r$ (ce qui donne la restriction $p>3$; remarquons que le résultat est faux si $p=3$, voir Y. Meyer et F. Oru, 1996). □

Montrons pour conclure la démonstration du Théorème 5.4.5 que la solution u est continue en temps à valeurs dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. On définit pour cela la "fluctuation"

$$w := u - e^{t\Delta}u_0 = B(u,u)(t)\,.$$

En appliquant la Proposition 5.4.10 à $p=q=6$ et $r=3$ on obtient que $w\in\mathscr{C}^0(]0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$, et la continuité en $t=0$ provient du fait que

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^\infty([0,t];L^3(\mathbb{R}^3))} &\le C\|u\|^2_{K_6(t)}\\ &\le 4C\|e^{t\Delta}u_0\|^2_{K_6(t)}\,,\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

où la seconde inégalité provient de la construction de la solution par point fixe.

On a donc que $u=w+e^{t\Delta}u_0\in\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$. Le Théorème 5.4.5 est démontré. □

Pour conclure la démonstration du Théorème 5.4.3, il s'agit de vérifier que la solution est unique dans l'espace $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$. On observe que la Proposition 5.4.10 appliquée à $p=q=3$ et $r=2$ fournit que $w:=u-e^{t\Delta}u_0\in K_2(T)$ et comme précédemment $w\in\mathscr{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))$. Si $v:=u_1-u_2$ est la différence de deux solutions dans $\mathscr{C}^0([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$, associées à la même donnée u_0, alors $v=w_1-w_2\in\mathscr{C}^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))$ et est l'unique solution dans $\mathscr{C}^0([0,T];\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3))$ du problème de Stokes avec donnée initiale nulle:

$$\partial_t v-\Delta v=-\nabla p+f\,,\quad f:=Q(e^{t\Delta}u_0,v)+Q(v,e^{t\Delta}u_0)+Q(w_2,v)+Q(v,w_1)\,.$$

Mais $f\in L^2([0,T],\dot H^{-\frac32}(\mathbb{R}^3))$ car

$$\begin{aligned}\|Q(a,b)\|_{\dot H^{-\frac32}(\mathbb{R}^3)} &\le C\sup_{1\le k,\ell\le 3}\|a^\ell b^k\|_{\dot H^{-\frac12}(\mathbb{R}^3)}\\ &\le C\sup_{1\le k,\ell\le 3}\|a^\ell b^k\|_{L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\\ &\le C\|a\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\|b\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

donc appartient à $L^\infty([0,T])$ et donc à $L^2([0,T])$. Alors par la Remarque 5.1.3, l'unique solution v est du problème de Stokes est donc dans $L^\infty([0,T];\dot H^{-\frac12}(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T];\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3))$ avec

$$\|v(t)\|^2_{\dot H^{-\frac12}(\mathbb{R}^3)}+\int_0^t\|v(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)}dt'\le\int_0^t\|f(t')\|^2_{\dot H^{-\frac32}(\mathbb{R}^3)}dt'\,.$$

Par densité des fonctions régulières dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ (par troncature en fréquences par exemple) on peut décomposer

$$u_0=u_0^\sharp+u_0^\flat\,,\quad \|u_0^\sharp\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\le c\,,\quad u_0^\flat\in L^\infty\cap L^3(\mathbb{R}^3) \tag{5.4.7}$$

et alors en posant

$$g:=f-Q(e^{t\Delta}u_0^\flat,v)+Q(v,e^{t\Delta}u_0^\flat)$$

il vient

$$\begin{aligned}\|g(t)\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} &\leq C\Big(\|e^{t\Delta}u_0^\sharp\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}+\|w_1(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}+\|w_2(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\Big)\|v(t)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\Big(\|e^{t\Delta}u_0^\sharp\|_{K_3(t)}+\|w_1\|_{K_3(t)}+\|w_2\|_{K_3(t)}\Big)\|v(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\big(\|u_0^\sharp\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}+\|w_1\|_{K_3(t)}+\|w_2\|_{K_3(t)}\big)\|v(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Si t et c sont assez petits alors par (5.4.6) et (5.4.7)

$$\|g(t)\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2}\|v(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\big\|Q(e^{t\Delta}u_0^\flat,v(t))+Q(v(t),e^{t\Delta}u_0^\flat)\big\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} &\leq C\|e^{t\Delta}u_0^\flat\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|u_0^\flat\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|v(t)\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|v(t)\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

donc finalement

$$\|v(t)\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}+\frac{3}{4}\int_0^t\|v(t')\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}dt' \leq C\|u_0^\flat\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\int_0^t\|v(t')\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|v(t')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}dt'$$

et donc

$$\|v(t)\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}+\frac{1}{2}\int_0^t\|v(t')\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}dt' \leq C\|u_0^\flat\|^4_{L^6(\mathbb{R}^3)}\int_0^t\|v(t')\|^2_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}dt'.$$

Par le lemme de Gronwall, ceci implique que v est nulle près de $t=0$ et donc par un argument itératif v est identiquement nulle. Le Théorème 5.4.3 est démontré. □

Lemme 5.4.11. — *Soit $\Phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{\Phi}$ est à support compact. On définit pour un $\omega\in\mathbb{S}^{d-1}$ et pour tout $\varepsilon>0$ la fonction*

$$\Phi_\varepsilon(x) := e^{i\frac{x\cdot\omega}{\varepsilon}}\Phi(x).$$

Alors pour tout $s\in\mathbb{R}$ on a

$$\|\Phi_\varepsilon\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} \sim \varepsilon^{-s}$$

et pour tout $\sigma>0$ et $p\geq 2$ on a

$$\|\Phi_\varepsilon\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} := \sup_{t>0} t^{\frac{\sigma}{2}}\|e^{t\Delta}\Phi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^\sigma.$$

Démonstration. — On montre facilement que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^s\|\Phi_\varepsilon\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Pour ce qui est de la norme $\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,\infty}$ on remarque que

$$e^{t\Delta}\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}e^{i\frac{x\cdot\omega}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}e^{-t\left|\xi+\frac{\omega}{\varepsilon}\right|^2}\widehat{\Phi}(\xi)\,d\xi.$$

On a donc pour ε suffisamment petit et $1\leq p\leq\infty$

$$\|e^{t\Delta}\Phi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq Ce^{-\frac{t}{\varepsilon^2}}$$

donc

$$t^{\frac{\sigma}{2}}\|e^{t\Delta}\Phi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq Ct^{\frac{\sigma}{2}}e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}} \leq C\varepsilon^\sigma.$$

Le lemme suit. □

5.5. Comportement en temps grand en trois dimensions d'espace

On rappelle (voir le Théorème 5.4.1) que si $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle alors il existe un temps $T > 0$ et une unique solution u, de divergence nulle, aux équations de Navier-Stokes tridimensionnelles associée à u_0, qui est dans $C([0,T];\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^4([0,T];\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

On va montrer le résultat suivant.

Théorème 5.5.1. — *Soit $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est de divergence nulle tel que la solution unique u de l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle associée vérifie $u \in C(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^4(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = 0\,.$$

Démonstration. — Dans la suite on notera $\mathbb{P}_n f := \mathbb{P}\mathscr{F}^{-1}\big(\mathbf{1}_{|\cdot|\leq n}\mathscr{F}(f)\big)$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle, restreint aux fréquences inférieures à n.

Commençons par supposer que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. On peut montrer que pour a et b deux champs de vecteurs avec a de divergence nulle,

$$\Big|(a\cdot\nabla b|\ b)_{L^2(\mathbb{R}^3)} + (b\cdot\nabla a|\ b)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big| \leq \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|b\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla b\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,.$$

En effet d'une part

$$\begin{aligned}\Big|(b\cdot\nabla a|\ b)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big| &\leq \|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|b\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|b\|^2_{\dot{H}^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Big|(a\cdot\nabla b|\ b)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big| &\leq C\|a\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|b\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|\nabla a\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|\nabla b\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|b\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs la démonstration du théorème de Leray permet de montrer le résultat suivant (à faire à titre d'exercice !) : si $w_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, alors il existe une unique solution w_n , de divergence nulle, de

$$\partial_t w_n + \mathbb{P}_n\mathrm{div}\big(w_n\otimes w_n + (\mathbb{P}_n u)\otimes w_n + w_n\otimes(\mathbb{P}_n u)\big) - \mathbb{P}_n\Delta w_n = 0\,,\quad w_n(0,\cdot) = \mathbb{P}_n w_0$$

dans $C^1(\mathbb{R}^+;\mathbb{P}_n L^2(\mathbb{R}^3))$ qui vérifie pour tout $t \geq 0$

$$\|w_n(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla w_n(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \|w_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\exp\Big(C\int_0^t \|\nabla u(t')\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt'\Big).$$

En outre il existe $w \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;H^1(\mathbb{R}^3))$ de divergence nulle tel que quitte à extraire une sous-suite, pour tout compact K de $\mathbb{R}^3$ et tout $T>0$ on ait

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n - w\|_{L^2([0,T]\times K)} = 0$$

et pour tous les champs de vecteurs $\Psi \in L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^3))$ et $\Phi \in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^3} \nabla(w_n - w)(t,x) : \nabla\Psi(t,x)\,dtdx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^3} (w_n - w)(t,x)\cdot\Phi(t,x)\,dtdx = 0\,.$$

Enfin quitte à extraire une sous-suite, w_n converge dans $L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ vers une solution faible de

$$\partial_t w + \mathbb{P}\mathrm{div}(w\otimes w + u\otimes w + w\otimes u) - \Delta w = 0\,,\quad w(0,\cdot) = w_0\,.$$

On en déduit que si $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est une solution turbulente de Leray associée à u_0, alors $w := v - u = 0$. On a donc que u est un champ de vecteurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, et donc en particulier $u \in L^4(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$. On en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = 0$$

car $\|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ ne peut être minorée: on a donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_\varepsilon > 0, \quad \|u(T_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \varepsilon,$$

et on peut appliquer le résultat à données petites selon lequel

$$\forall\, t \geq T_\varepsilon, \quad \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq 2\|u(T_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}.$$

On ne suppose plus que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une constante $\rho > 0$ telle que les champs de vecteurs

$$u_0^\flat := \mathscr{F}^{-1}\big(\mathbf{1}_{|\cdot|\leq\rho}\,\mathscr{F}u_0\big) \quad \text{et} \quad u_0^\sharp := u_0 - u_0^\flat$$

vérifient $u_0^\sharp \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$\|u_0^\flat\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \min(\varepsilon, c).$$

On note $u^\flat$ la solution globale aux équations de Navier-Stokes tridimensionnellees associée à $u_0^\flat$, et on pose $u^\sharp := u - u^\flat$. On a

$$\frac{1}{2}\|u^\sharp(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla u^\sharp(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \frac{1}{2}\|u^\sharp(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \Big|\big(u^\sharp\cdot\nabla u^\flat \mid u^\sharp\big)(t')\Big|\,dt',$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned}\Big|\big(u^\sharp\cdot\nabla u^\flat \mid u^\sharp\big)\Big| &\leq C\|u^\flat\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u^\sharp\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|u^\sharp\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq C\|u^\flat\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|\nabla u^\sharp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

En choisissant ε suffisamment petit on peut en déduire que

$$\|u^\sharp(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla u^\sharp(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\,dt' \leq \|u^\sharp(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Le Théorème 5.5.1 suit. □