1 Introduction

On s'intéresse aux équations de Navier–Stokes suivantes, décrivant l'évolution d'un fluide visqueux (de viscosité $\nu > 0$) et incompressible dans $\mathbb{R}^3$, de vitesse $v(t,x)$ et de pression $p(t,x)$, où $t \in \mathbb{R}^+$ est la variable de temps, et $x \in \mathbb{R}^3$ la variable d'espace:

$$(NS) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v & = & -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ \operatorname{div} v & = & 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ v_{|t=0} & = & v_0. \end{array} \right.$$

Rappellons que la pression peut être éliminée de ce système par projection sur les champs de vecteurs de divergence nulle, par l'intermédiaire du projecteur de Leray P, orthogonal dans L^2. Avant d'entrer dans le cœur de notre étude, commençons par rappeller quelques résultats bien connus sur ce système; nous ne nous intéressons ici qu'aux solutions dites "fortes" de (NS), c'est–à–dire aux cas où l'on a unicité des solutions (en particulier, nous n'étudions pas les solutions à la Leray [9]). Rappellons donc pour commencer le résultat de H. Fujita et T. Kato de [3]. On définit les espaces de Sobolev homogènes

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} < +\infty \right\} \quad \text{avec} \quad \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2},$$

et le résultat de [3] est le suivant: si $v_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, alors il existe un unique temps maximal $T_* > 0$ et une unique solution $v = NS(v_0)$ avec $v \in E_T \stackrel{\text{déf}}{=} C^0([0,T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ pour tout $T < T_*$. D'autre part, si le temps T_* vérifie $T_* < +\infty$, alors

$$\lim_{T \to T_*} \|v\|_{L^2([0,T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))} = +\infty. \tag{1.1}$$

Enfin il existe une constante universelle c telle que

$$\|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu \quad \Rightarrow \quad T_* = +\infty \tag{1.2}$$

et dans ce cas on a pour tout $t \geq 0$,

$$\|NS(v_0)(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} + \nu \int_0^t \|NS(v_0)(s)\|^2_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \, ds \leq \|v_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.3}$$

Il est important de remarquer que l'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est invariant par le changement d'échelle lié à l'équation: il est en effet facile de vérifier que pour tout réel λ,

$$\begin{gathered} v = NS(v_0) \quad \Leftrightarrow \quad v_\lambda = NS(v_{0,\lambda}) \\ \text{avec} \quad v_\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad v_{0,\lambda}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v_0(\lambda x). \end{gathered} \tag{1.4}$$

En plus de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, nous nous intéresserons à un autre espace invariant par ce changement d'échelle, qui est $L^3(\mathbb{R}^3)$: T. Kato a démontré dans [8] un théorème d'existence analogue au théorème de H. Fujita et T. Kato pour une donnée initiale dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, et G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo ont obtenu dans [4] l'unicité de la solution associée dans $C^0([0,T],L^3(\mathbb{R}^3))$. En particulier, nous utiliserons dans la suite le fait suivant, dont une démonstration peut se trouver en corollaire du théorème 3.4.2 de [2] (voir aussi [5] pour une preuve directe): il existe une constante universelle δ telle que si $v_0 \in \dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\|v_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta\nu$, alors

$$NS(v_0) \in E_\infty \quad \text{et} \quad \|NS(v_0)(t)\|^2_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} + \nu \int_0^t \|NS(v_0)(s)\|^2_{\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\, ds \leq \|v_0\|^2_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)}. \quad (1.5)$$

Nous définissons, pour $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espace $\mathcal{D}_T \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ v_0 \in \dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3) \,|\, NS(v_0) \in E_T \Big\}$. Remarquons que la boule de $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ centrée en 0 et de rayon $c\nu$, avec la notation (1.2), est évidemment incluse dans $\mathcal{D}_\infty$, mais on peut trouver des fonctions arbitrairement grandes dans $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ qui sont des éléments de $\mathcal{D}_\infty$: par exemple, des fonctions de $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dont la norme $L^3(\mathbb{R}^3)$ est petite, d'après (1.5). Dans la suite, nous noterons

$$C_{NS} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \{\rho > 0 \,|\, \overline{\mathcal{B}}_\rho \subset \mathcal{D}_\infty\}, \quad (1.6)$$

où $\mathcal{B}_\rho \stackrel{\text{déf}}{=} \{\varphi \in \dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3) \,|\, \|\varphi\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} < \rho\}$, et $\mathcal{B}_{NS} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{C_{NS}}$. Enfin pour tout champ de vecteurs v nous noterons, pour $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\|v\|_{E_T^\nu} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\|v\|^2_{L^\infty([0,T],\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3))} + 2\nu\, \|v\|^2_{L^2([0,T],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} \Big)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Venons-en à présent à l'objet de ce travail: il est bien connu que l'injection de $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ est continue, mais non compacte. Dans [7], P. Gérard a étudié très précisément le défaut de compacité de cette injection, en démontrant le résultat suivant.

Théorème 1 (P. Gérard, [7]) *Soit (φ_n) une suite de fonctions bornées dans $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$. Alors quitte à extraire une sous–suite, on peut la décomposer comme suit, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:*

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \varphi_n(x) = \varphi^0(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} \varphi^j \left(\frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + \psi_n^\ell(x), \quad (1.8)$$

où les fonctions φ^j sont dans $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ pour $j \in \mathbb{N}$, où (ψ_n^ℓ) est une suite bornée de $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, uniformément en $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vérifiant

$$\lim_{\ell \to \infty} \left(\limsup_{n \to \infty} \|\psi_n^\ell\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \right) = 0, \quad (1.9)$$

et où pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, (h_n^j, x_n^j) est une suite de $\big(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3\big)^{\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété d'orthogonalité suivante: pour tous les entiers (j,k) tels que $j \neq k$, on a

$$\text{soit} \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{h_n^j}{h_n^k} + \frac{h_n^k}{h_n^j} \right) = +\infty \qquad \text{soit} \qquad h_n^j = h_n^k \;\; \text{et} \;\; \lim_{n \to \infty} \frac{|x_n^j - x_n^k|}{h_n^j} = +\infty. \quad (1.10)$$

Enfin l'on a pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_n\|^2_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} = \sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi^j\|^2_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} + \|\psi_n^\ell\|^2_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} + o(1), \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \quad (1.11)$$

Remarque. Il est facile de constater que si φ_n est de divergence nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors φ^j et ψ_n^ℓ le sont aussi, pour tous les entiers j, ℓ et n. D'autre part pour $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, quitte à remettre φ^j à l'échelle, on peut supposer que soit $h_n^j = 1$ (et $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n^j| = +\infty$), soit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^j \in \{0, \infty\}$. Enfin l'on notera dans la suite

$$h_n^0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1, \quad x_n^0 \stackrel{\text{déf}}{=} 0, \quad \text{et} \quad \varphi_n^0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi^0(x). \tag{1.12}$$

Notre but est de voir comment la décomposition (1.8) se propage par les équations de Navier–Stokes. Par analogie avec le travail [1] sur l'équation des ondes semi–linéaire critique, nous serons amenés à considérer l'équation linéaire associée à (NS):

$$(H) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ u_{|t=0} &= u_0. \end{cases}$$

Notation. Nous noterons $H(u_0)$ ls solution de (H) associée à la donnée u_0.

Théorème 2 *Soit (φ_n) une suite de champs de vecteurs de divergence nulle, bornée dans l'espace $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, et soit $\varphi^0 \in \dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, limite faible de (φ_n). Alors quitte à extraire une sous–suite, on a les résultats suivants, où l'on note $v_n \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi_n)$ et $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ avec les notations du théorème 1 et (1.12).*

(i) Il existe une famille $(T^j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et un sous–ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad V^j \in E_{T^j} \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus J, \quad T^j = +\infty. \tag{1.13}$$

D'autre part, si $\tau_n \stackrel{\text{déf}}{=} \min\limits_{j\in J} (h_n^j)^2 T^j$, alors $\|v_n\|_{E^\nu_{\tau_n}}$ est bornée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout temps $t \leq \tau_n$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$v_n(t,x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + w_n^\ell(t,x) + r_n^\ell(t,x), \tag{1.14}$$

où pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $w_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} H(\psi_n^\ell)$ est bornée dans E_∞ uniformément en ℓ avec

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty} \|w_n^\ell\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3))} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\ell\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty} \|r_n^\ell\|_{E^\nu_{\tau_n}} \right) = 0. \tag{1.15}$$

(ii) S'il existe un temps $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que (v_n) est bornée dans $L^2([0,T], \dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T \leq \min_{j\in J} (h_n^j)^2 T^j. \tag{1.16}$$

En particulier, les resultats ci–dessus sont vrais avec $\tau_n = T$ et les petites échelles de concentration génèrent des solutions globales à (NS): si $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^j = 0$, alors $T^j = +\infty$.

(iii) Dans le cas où il existe un réel ρ tel que $\|\varphi_n\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho < C_{NS}$, alors $T^j = +\infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et les resultats ci–dessus sont vrais avec $\tau_n = +\infty$.

Corollaire 1 *Il existe une fonction croissante A de $[0, C_{NS}[$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout champ de vecteurs de divergence nulle $\varphi \in \mathcal{B}_{NS}$, on a $\|NS(\varphi)\|_{E^\nu_\infty} \leq A\left(\|\varphi\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}\right)$. En outre, l'application NS envoyant les éléments de $\mathcal{B}_{NS}$ sur la solution associée est Lipschitzienne.*

Remarque. L'idée de décomposer ainsi les solutions d'équations non linéaires trouve son origine dans le travail de H. Bahouri et P. Gérard dans [1], sur l'équation des ondes semi–linéaire critique. Ici l'on rencontre la difficulté supplémentaire du contrôle des temps d'existence des solutions de (NS) associées aux profils φ^j. Par contre on n'a pas de problème d'extraction de temps de concentration autres que le temps $t = 0$; cela est dû à l'effet diffusif de l'équation de la chaleur.

2 Démonstration du théorème

2.1 Résultat préliminaire

Proposition 1 *Soit $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, et soient φ^1 et φ^2 deux champs de vecteurs de divergence nulle, éléments de $\mathcal{D}_T$. Considérons deux suites orthogonales de $\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3\right)^{\mathbb{N}}$ au sens de (1.10), notées (h^1_n, x^1_n) et (h^2_n, x^2_n). Supposons par exemple que $h^1_n \leq h^2_n$. Alors avec la notation*

$$\varphi^j_n(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{h^j_n} \varphi^j \left(\frac{x - x^j_n}{h^j_n} \right), \tag{2.1}$$

on a les résultats d'orthogonalité suivants:

$$\lim_{n\to\infty} \|NS(\varphi^1_n) NS(\varphi^2_n)\|_{L^4([0,(h^1_n)^2\, T], L^2(\mathbb{R}^3))} = 0, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(NS(\varphi^1_n) \mid NS(\varphi^2_n) \Big)_{L^\infty([0,(h^1_n)^2\, T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0, \tag{2.3}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \Big(NS(\varphi^1_n) \mid NS(\varphi^2_n) \Big)_{L^2([0,(h^1_n)^2\, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))} = 0. \tag{2.4}$$

Démonstration. L'invariance par changement d'échelle rappellée en (1.4) implique que la solution de (NS) associée à la donnée φ^j_n est définie par

$$\forall j \in \{1,2\}, \quad v^j_n(t,x) \overset{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j_n)(t,x) = \frac{1}{h^j_n} V^j \left(\frac{t}{(h^j_n)^2}, \frac{x - x^j_n}{h^j_n} \right),$$

où $V^j \overset{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$. On a $V^j \in E_T$, donc $v^j_n \in E_{(h^j_n)^2 T}$. Calculons

$$\|NS(\varphi^1_n) NS(\varphi^2_n)\|^4_{L^4([0,t], L^2(\mathbb{R}^3))}$$

$$= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^3} (h^1_n h^2_n)^{-2} \left| V^1 \left(\frac{t}{(h^1_n)^2}, \frac{x - x^1_n}{h^1_n} \right) \right|^2 \left| V^2 \left(\frac{t}{(h^2_n)^2}, \frac{x - x^2_n}{h^2_n} \right) \right|^2 dx \right)^2 dt.$$

On peut supposer que les fonctions V^j sont régulières et à support compact; procédons alors au changement de variables suivant:

$$x = x_n^1 + h_n^1 y, \quad t = (h_n^1)^2 s. \tag{2.5}$$

Il vient

$$\forall t \leq (h_n^1)^2\, T, \quad \|v_n^1 v_n^2\|_{L^4([0,t],L^2(\mathbb{R}^3))} = O\left(\frac{h_n^1}{h_n^2}\right),$$

ce qui donne le résultat. Dans le cas où $h_n^1 = h_n^2$, ce changement de variables donne

$$\|v_n^1 v_n^2\|^4_{L^4([0,(h_n^1)^2\,T],L^2(\mathbb{R}^3))} = \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} |V^1(s,y)|^2 \left|V^2\left(s, y + \frac{x_n^1 - x_n^2}{h_n^2}\right)\right|^2 \, dy\right)^2 \, ds,$$

et comme V^2 est à support compact, le résultat (2.2) suit. Les arguments sont identiques pour les limites (2.3) et (2.4), et la proposition 1 est démontrée. □

2.2 Démonstration du théorème, cas (*iii*)

Nous allons supposer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho < C_{NS}$, avec la notation (1.6). Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{\ell} \varphi_n^j + \psi_n^\ell,$$

avec la notation (1.12), donc (1.11) implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho$, donc en particulier $\varphi^j \in \mathcal{D}_\infty$ pour tout j. Par conséquent, la fonction $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$ est dans E_∞ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On définit alors

$$v_n^j(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_n^j} V^j\left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right) = NS(\varphi_n^j),$$

et

$$r_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} v_n - \sum_{j\leq \ell} v_n^j - w_n^\ell,$$

où $w_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} H(\psi_n^\ell)$ et $v_n \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi_n)$. Un résultat classique sur l'équation de la chaleur (voir par exemple [2], Lemme 3.2.2) donne

$$\|H(\psi_n^\ell)(t,\cdot)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\psi_n^\ell\|_{L^3(\mathbb{R}^3)},$$

donc on a

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty}\ w_n^\ell\right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3)), \tag{2.6}$$

et pour obtenir le théorème 2 (*iii*), il suffit de démontrer que

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty}\ r_n^\ell\right) = 0 \quad \text{dans} \quad E_\infty. \tag{2.7}$$

La fonction r_n^ℓ vérifie le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t r_n^\ell + P(r_n^\ell\cdot\nabla r_n^\ell) - \nu\Delta r_n^\ell + Q(r_n^\ell, f_n^\ell) & = & g_n^\ell \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3 \\ r^\ell_{n|t=0} & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.8}$$

avec $f_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell$ et $g_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\neq k\\(j,k)\in\{0,..,\ell\}^2}} Q(v_n^j, v_n^k) - \sum_{j\leq\ell} Q(v_n^j, w_n^\ell) - P(w_n^\ell\cdot\nabla w_n^\ell)$, et où l'on a noté $Q(a,b) \stackrel{\text{déf}}{=} P(a\cdot\nabla b + b\cdot\nabla a)$.

Proposition 2 *La suite (f_n^ℓ) est bornée dans E_∞ uniformément en ℓ, et*

$$\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|g_n^\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Avant de démontrer cette proposition, terminons la démonstration du théorème 2 (*iii*): un calcul classique sur les équations de type Navier–Stokes (voir par exemple [5]) implique que pour ℓ assez grand, uniformément en n, on a

$$\|r_n^\ell\|_{E_\infty^\nu} \leq C\|g_n^\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^+,\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))}\left(1+\exp\left(C\|f_n^\ell\|^2_{E_\infty^\nu}\right)\right).$$

Donc la proposition 2 implique (2.7), et le théorème 2 (*iii*) est démontré. □

Démonstration de la proposition 2. Commençons par remarquer que la suite (v_n^j) est bornée dans E_∞ pour tout $j\in\mathbb{N}$ puisque

$$\|v_n^j\|_{E_\infty^\nu} = \|V^j\|_{E_\infty^\nu}.$$

Notons toutefois que l'on n'a pas à notre disposition d'estimation a priori pour $\|v_n^j\|_{E_\infty^\nu}$ (une telle estimation est par contre disponible pour des données petites par exemple, d'après (1.3)). Admettons provisoirement le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit (φ_n) une suite bornée dans $\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ de champs de vecteurs de divergence nulle, convergeant faiblement vers φ^0. Alors il existe j_0 tel que si $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$, avec les notations du théorème 1, alors*

$$\forall j\geq j_0,\quad V^j\in E_\infty \quad \textit{et} \quad \sum_{j\geq j_0}\|V^j\|^2_{E_\infty^\nu} < +\infty.$$

Cette proposition démontre le résultat sur f_n^ℓ puisque d'après la proposition 1, on a

$$\|\sum_{j\leq\ell} v_n^j\|^2_{E_\infty^\nu} = \sum_{j\leq\ell}\|V^j\|^2_{E_\infty^\nu} + o(1), \quad \text{quand} \quad n\to\infty,$$

et la proposition 3 implique ainsi en particulier que

$$\sum_{j\leq\ell} v_n^j \quad \text{est bornée dans } E_\infty, \quad \text{uniformément en } \ell. \tag{2.9}$$

Démontrons à présent le résultat sur g_n^ℓ: il suffit de montrer que

$$\forall j \neq k, \quad \lim_{n\to\infty} Q(v_n^j, v_n^k) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)), \tag{2.10}$$

$$\lim_{\ell\to\infty} \limsup_{n\to\infty} Q(\sum_{j\leq\ell} v_n^j, w_n^\ell) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)), \tag{2.11}$$

et

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(\limsup_{n\to\infty} Q(w_n^\ell, w_n^\ell) \right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)). \tag{2.12}$$

En effet, supposons un instant que (2.10)-(2.12) sont démontrés. Les fonctions v_n^j et w_n^ℓ sont bornées uniformément en j et en ℓ dans E_∞, donc en particulier dans $L^{8/3}(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{5/4}(\mathbb{R}^3))$ par exemple. Alors les lois de produit dans les espaces de Sobolev permettent d'en déduire que g_n^ℓ est bornée dans $L^{4/3}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$, et donc par interpolation avec (2.10)-(2.12), le résultat est démontré.

Démontrons donc (2.10). La condition de divergence nulle sur v_n^j implique que

$$P(v_n^j \cdot \nabla v_n^k) = P\mathrm{div}(v_n^j \otimes v_n^k),$$

donc il suffit de démontrer que

$$\forall j \neq k, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n^j v_n^k\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} = 0, \tag{2.13}$$

ce qui est une conséquence de (2.2) démontrée dans la proposition 1. Donc (2.10) est obtenue, et démontrons maintenant (2.11) et (2.12): comme dans (2.13), il suffit de montrer que

$$\lim_{\ell\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|(\sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell) w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\|(\sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell) w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} \leq \|\sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))} \|w_n^\ell\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3))}. \tag{2.14}$$

Mais

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))} &\leq C\|\sum_{j\leq\ell} v_n^j\|_{L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} + C\|w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq C\|\sum_{j\leq\ell} v_n^j\|_{E_\infty^\nu} + C\|w_n^\ell\|_{E_\infty^\nu}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Alors par le résultat (2.9), on obtient que $\|\sum_{j\leq\ell} v_n^j + w_n^\ell\|$ est bornée dans $L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))$, uniformément en ℓ, donc (2.6) et (2.14) impliquent (2.11) et (2.12). La proposition 2 est démontrée. □

Démonstration de la proposition 3. La série de terme général $\|\varphi^j\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}$ étant convergente, on peut trouver j assez grand tel que la norme de φ^j dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ soit plus petite que $c\nu$, avec la notation (1.2). Alors par (1.3) on a pour j assez grand,

$$V^j \in E_\infty \quad \text{et} \quad \|V^j\|^2_{E_\infty^\nu} \leq 2\|\varphi^j\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}.$$

D'où la proposition. □

2.3 Démonstration du théorème, cas (i) et (ii)

Nous allons procéder par récurrence sur la borne de (φ_n) dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$: pour tout entier k, soit l'hypothèse de récurrence

$$(H_k) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Soit } (\varphi_n) \text{ une suite de champs de divergence nulle, bornée dans } \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \\ \text{avec } \|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\dfrac{k}{2}\right)^{1/2} C_{NS} \,. \\ \text{Alors les conclusions du théorème 2 } (i)\text{-}(ii) \text{ sont vérifiées.} \end{array} \right.$$

Notons que le paragraphe précédent correspond en particulier à la démonstration de (H_1); dans ce cas, l'ensemble J est vide et $\tau_n = +\infty$.

Supposons à présent (H_k) vérifiée, et démontrons (H_{k+1}): on considère une suite (φ_n) de champs de vecteurs de divergence nulle, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/2} C_{NS} \,.$$

Dans la décomposition (1.8), si l'on a $\|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} < C_{NS}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors les arguments de la section précédente donnent le résultat. Supposons donc qu'il existe un entier k_0 tel que

$$\|\varphi^{k_0}\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \geq C_{NS},$$

et soit $\ell_0 \geq k_0$ un entier vérifiant

$$\limsup_{n\to\infty} \|\psi_n^{\ell_0}\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta\nu, \tag{2.16}$$

où δ est la constante définie dans l'introduction pour vérifier (1.5). On a alors

$$(\psi_n^{\ell_0}) \quad \text{est bornée dans } \mathcal{D}_\infty \quad \text{et} \quad (NS(\psi_n^{\ell_0})) \quad \text{est bornée dans } E_\infty. \tag{2.17}$$

D'autre part, on déduit de (1.11) que pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \|\psi_n^{\ell_0}\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\varphi_n\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} - \sum_{j=0}^{\ell_0} \|\varphi^j\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} + \frac{C^2_{NS}}{2} \\ &\leq \frac{k+1}{2} C^2_{NS} - C^2_{NS} + \frac{C^2_{NS}}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\psi_n^{\ell_0}\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{k}{2} C^2_{NS}, \tag{2.18}$$

et donc la suite $(\psi_n^{\ell_0})$ vérifie l'hypothèse de récurrence (H_k). On a donc

$$\forall \ell \geq \ell_0 + 1, \quad NS(\psi_n^{\ell_0})(t,x) = \sum_{j=\ell_0+1}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + w_n^\ell(t,x) + \widetilde{r}_n^\ell(t,x), \tag{2.19}$$

avec $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j) \in E_\infty$, $w_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} H(\psi_n^\ell)$ vérifie

$$\lim_{\ell\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}\ w_n^\ell\right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3)),$$

et

$$\lim_{\ell\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty}\ \widetilde{r}_n^\ell\right) = 0 \quad \text{dans} \quad E_\infty. \tag{2.20}$$

Notons que l'on peut donc en particulier choisir $J \stackrel{\text{déf}}{=} \{0, .., \ell_0\}$ et ainsi démontrer (1.13).

On définit $(t_n) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|NS(\varphi_n)\|_{E^\nu_{t_n}}$ est bornée. Alors on peut écrire, pour tout $t \leq \min(\tau_n, t_n)$,

$$NS(\varphi_n)(t,x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j\left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right) + w_n^\ell(t,x) + \widetilde{r}_n^\ell(t,x) + \overline{r}_n^{\ell_0}(t,x), \tag{2.21}$$

et il suffit de montrer que l'on peut prendre

$$t_n = \tau_n, \tag{2.22}$$

ainsi que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\overline{r}_n^{\ell_0}\|_{E^\nu_{\tau_n}} = 0. \tag{2.23}$$

Notons que le résultat (2.22) est une conséquence de (2.23) par (2.21): en effet si (2.23) est vérifiée, alors tous les termes dans le membre de droite de (2.21) ont une norme $E^\nu_{\tau_n}$ bornée, ce qui implique la même chose sur $NS(\varphi_n)$.

Pour simplifier les notations, ré–ordonnons les fonctions V^j, pour $j \leq \ell_0$, de manière à ce que pour n assez grand, on ait

$$\forall j \leq k \leq \ell_0, \quad (h_n^j)^2 T_*^j \ \leq\ (h_n^k)^2 T_*^k, \tag{2.24}$$

où T_*^j est le temps d'existence de V^j. Si $T_*^j = +\infty$ pour tout j mais tous les φ^j ne sont pas dans $\mathcal{D}_\infty$, alors on choisit le premier indice 0 de telle manière à ce que $\varphi^0 \notin \mathcal{D}_\infty$. Notons que $(h_n^j)^2 T_*^j$ est le temps d'existence de v_n^j définie par

$$v_n^j \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_n^j} V^j\left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right).$$

On définit alors, pour tout champ f,

$$S_0 f(s,y) \stackrel{\text{déf}}{=} h_n^0 f((h_n^0)^2 s, x_n^0 + h_n^0 y). \tag{2.25}$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $S_0 v_n^0 = V^0$. Alors pour tout entier ℓ, on définit

$$\forall j \leq \ell, \quad V_n^{j,0} \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 v_n^j, \quad \overline{R}_n^{\ell_0,0} \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 \overline{r}_n^{\ell_0},$$

$$W_n^{\ell,0} \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 w_n^\ell, \quad \widetilde{R}_n^{\ell,0} \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 \widetilde{r}_n^\ell, \quad \text{et} \quad V_n^0 \stackrel{\text{déf}}{=} S_0 v_n.$$

La fonction $\overline{R}_n^{\ell_0,0}$ vérifie le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_s \overline{R}_n^{\ell_0,0} + P(\overline{R}_n^{\ell_0,0}\cdot\nabla \overline{R}_n^{\ell_0,0}) - \nu\Delta \overline{R}_n^{\ell_0,0} + Q(\overline{R}_n^{\ell_0,0}, F_n^{\ell,0}) & = & G_n^{\ell,0}\\ \overline{R}_{n|s=0}^{\ell_0,0} & = & 0,\end{array}\right. \tag{2.26}$$

avec $F_n^{\ell,0} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j\leq \ell} V_n^{j,0} + W_n^{\ell,0} + \widetilde{R}_n^{\ell,0}$, et

$$\begin{aligned} G_n^{\ell,0} \quad & \stackrel{\text{déf}}{=} \quad -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j\neq k\\ (j,k)\in\{0,..,\ell\}^2}} Q(V_n^{j,0}, V_n^{k,0}) - \sum_{j\leq\ell} Q(V_n^{j,0}, W_n^{\ell,0} + \widetilde{R}_n^{\ell,0})\\ & - \quad \frac{1}{2} Q(W_n^{\ell,0}, 2\widetilde{R}_n^{\ell,0} + W_n^{\ell,0}). \end{aligned}$$

Soit à présent $T^0 < T_*^0$ donné; alors $V_n^{j,0} = V^0$ est bornée dans E_{T^0} et plus généralement

$$\forall j\in\mathbb{N}, \quad (V_n^{j,0}) \quad \text{est bornée dans} \quad E_{T^0}. \tag{2.27}$$

On a aussi le résultat suivant, qui se démontre de manière analogue à la proposition 2.

Proposition 4 *La suite (F_n^ℓ) est bornée dans E_{T^0} uniformément en ℓ, et*

$$\lim_{\ell\to\infty}\limsup_{n\to\infty} \|G_n^{\ell,0}\|_{L^2([0,T^0],\dot H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Cette proposition implique, comme pour r_n^ℓ dans la section précédente, que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\overline{R}_n^{\ell_0,0}\|_{E_{T^0}^\nu} = 0, \tag{2.28}$$

d'où (2.23) après un changement d'échelle, et donc le résultat (i) est démontré. $\square$

Montrons enfin le résultat (ii). Soit $T\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ tel que la suite (v_n) est bornée dans l'espace $L^2([0,T],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$. Si $\varphi^j\in\mathcal{D}_\infty$ pour tout j, alors le résultat suit.

Sinon, alors avec la notation (2.24), on a $\varphi^0\notin\mathcal{D}_\infty$. Choisissons $T^0 < T_*^0$ de la façon suivante. On a d'après la décomposition (2.21),

$$\sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \overline{r}_n^{\ell_0} \quad \text{est bornée dans} \quad L^2([0,T],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3)).$$

Alors par (1.1) on peut choisir $T^0 < T_*^0$ de telle manière que

$$\|V^0\|_{L^2([0,T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} \geq 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \overline{r}_n^{\ell_0}\|_{L^2([0,T],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))},$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|^2_{L^2([0,T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} \geq 4\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \overline{r}_n^{\ell_0}\|^2_{L^2([0,T],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))}. \tag{2.29}$$

Mais par la proposition 1 on a

$$\|\sum_{j=0}^{\ell_0} V_n^{j,0}\|^2_{L^2([0,T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} = \sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|^2_{L^2([0,T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} + o(1),$$

quand n tend vers l'infini, donc (2.28) implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, on a, en notant $L^2_{T^0}(\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \stackrel{\text{déf}}{=} L^2([0,T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|^2_{L^2_{T^0}(\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} &\leq \varepsilon + 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\overline{R}_n^{\ell_0,0} + \sum_{j=0}^{\ell_0} V_n^{j,0}\|^2_{L^2_{T^0}(\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} + 2\|\overline{R}_n^{\ell_0,0}\|^2_{L^2_{T^0}(\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq \varepsilon + 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\overline{r}_n^{\ell_0} + \sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j\|^2_{L^2([0,(h_n^0)^2T^0],\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

La seule façon de ne pas contredire (2.29) est d'avoir $T \leq (h_n^0)^2 T^0$, et donc le résultat (ii) est démontré. □

3 Démonstration du corollaire

La démonstration du corollaire énoncé en introduction repose sur les méthodes de [1] et [6].

L'existence d'une estimation a priori dans le cas de données initiales dans $\mathcal{B}_{NS}$ est une conséquence immédiate du résultat du théorème 2 (iii). Démontrons donc que le semi–groupe non linéaire d'évolution est Lipschitzien sur les boules de $\mathcal{B}_{NS}$.

Le fait qu'on dispose d'une estimation a priori sur $\mathcal{B}_{NS}$ implique qu'il suffit de démontrer le résultat suivant.

Lemme 1 *Soient u_0 et v_0 deux champs de vecteurs de divergence nulle, éléments de $\mathcal{D}_\infty$, et soit $u \stackrel{\text{déf}}{=} NS(u_0)$. Alors*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(NS(u_0+\varepsilon v_0)\right)_{|\varepsilon=0} = v,$$

où v est la solution unique dans E_∞ du système suivant:

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t v + P(v\cdot\nabla u + u\cdot\nabla v) - \nu\Delta v &= 0 \\ v_{|t=0} &= v_0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\|v\|_{E_t^\nu} \leq C\|v_0\|_{\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^3)}\left(1 + \left(\int_0^t \|u(s)\|^2_{\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\,ds\right)^{1/2}\right)\exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|^2_{\dot H^{3/2}(\mathbb{R}^3)}\,ds\right). \tag{3.1}$$

Démonstration du lemme 1. C'est un calcul facile que de montrer qu'il existe une solution unique au système linéarisé, vérifiant (3.1).

Soit à présent $u^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} NS(u_0+\varepsilon v_0)$, et soit $\varepsilon r^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} u^\varepsilon - u - \varepsilon v$. Il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} r^\varepsilon = 0$ dans E_∞. Mais la fonction r^ε vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t r^\varepsilon + Q(r^\varepsilon, u) - \nu\Delta r^\varepsilon & = & f^\varepsilon \\ r^\varepsilon_{|t=0} & = & 0, \end{array}\right.$$

avec $f^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} -\varepsilon P(v\cdot\nabla v + v\cdot\nabla r^\varepsilon + r^\varepsilon\cdot\nabla v + r^\varepsilon\cdot\nabla r^\varepsilon)$. Un calcul classique donne

$$\forall t\geq 0, \quad \|r^\varepsilon\|_{E^\nu_t} \leq C\|f^\varepsilon\|_{L^4_t(\dot H^{-1})}\left(1+\|u\|_{L^2_t(\dot H^{3/2})}\exp C\|u\|^2_{L^2_t(\dot H^{3/2})}\right),$$

et comme

$$\|f^\varepsilon\|_{L^4_t(\dot H^{-1})} \leq C\varepsilon\left(\|v\|^2_{E^\nu_t} + \|v\|_{E^\nu_t}\|r^\varepsilon\|_{E^\nu_t} + \|r^\varepsilon\|^2_{E^\nu_t}\right),$$

on a, en écrivant $X^\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|r^\varepsilon\|_{E^\nu_t}$,

$$X^\varepsilon(t) \leq C\varepsilon\left(\|v\|^2_{E^\nu_t} + \|v\|_{E^\nu_t}X^\varepsilon(t) + (X^\varepsilon(t))^2\right)\left(1+\|u\|_{L^2_t(\dot H^{3/2})}\exp C\|u\|^2_{L^2_t(\dot H^{3/2})}\right).$$

Le résultat s'obtient alors par bootstrap. □

Références

[1] H. Bahouri et P. Gérard: High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Mathematics*, **121**, pages 131–175, 1999.

[2] M. Cannone: Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes, *Diderot éditeur, Arts et Sciences*, 1995.

[3] H. Fujita et T. Kato: On the Navier–Stokes Initial Value Problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269–315, 1964.

[4] G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo: Unicité des solutions mild des équations de Navier–Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites, *à paraître, Revista Matematica Iberoamericana* and *Preprint of Évry university*, 1997.

[5] I. Gallagher: Profile decomposition for solutions of the Navier-Stokes equations, *manuscrit*.

[6] I. Gallagher et P. Gérard: Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle, *Prépublication, Université de Paris-Sud*, 2000.

[7] P. Gérard: Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3**, pages 213–233, 1998 (electronic version: http://www.emath.fr/cocv/).

[8] T. Kato: Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* **187**, pages 471–480, 1984.

[9] J. Leray: Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Matematica*, **63**, pages 193-248, 1933.

[10] F. Planchon: Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **13**, pages 319–336, 1996.