Rôle des oscillations quadratiques dans des équations de Schrödinger non linéaires

R. Carles * C. Fermanian–Kammerer † I. Gallagher ‡

1 Introduction

Considérons les équations de Schrödinger semi linéaires, semi classiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^\beta u^\varepsilon,\ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon_{|t=0} = u_0^\varepsilon, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où α et β sont des paramètres fixés, et la famille de données initiales u_0^ε est bornée dans un espace fonctionnel à préciser. Le paramètre ε est positif, on s'intéresse au comportement de u^ε lorsque ε tend vers zéro. Dans le cas où la donnée initiale est de type BKW

$$u_0^\varepsilon(x) = f(x)e^{i\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}},$$

on peut chercher à approximer la solution u^ε en $u^\varepsilon(t,x) \sim \varepsilon^J U(t,x,\dfrac{\Phi(t,x)}{\varepsilon})$. C'est la démarche habituelle de l'optique géométrique. La phase Φ vérifie une équation eikonale, et les caustiques sont les singularités développées en temps fini — l'optique géométrique n'est plus valide. Dans le cas d'une équation non linéaire, on s'attend à voir apparaître plusieurs régimes suivant les valeurs relatives de α et β : pour α «grand», on s'attend à ce que le terme non linéaire ne joue pas de rôle (au premier ordre) dans l'approximation et que l'optique géométrique «linéaire» soit valide. Inversement pour α «petit» il faut s'attendre à des équations d'amplitude non linéaires, et ainsi à une optique géométrique «non linéaire». D'autre part on sait par la théorie des équations de Schrödinger ([5],[15] par exemple) que pour une donnée initiale dans H^1 il y a une solution globale à (1.1) (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé). La caustique est donc «traversée», là encore de manière a priori «linéaire» ou «non linéaire» suivant les tailles relatives de α et β.

Une étude mathématique précise de ces différents régimes a été menée par R. Carles dans [3], dans le cas d'une donnée initiale du type "oscillation quadratique" :

$$u_0^\varepsilon(x) = f(x)e^{-i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon t_0}}, \quad x_0\in\mathbb{R}^n,\ t_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{1.2}$$

Ce type de donnée initiale est en quelque sorte la «pire» du point de vue de l'optique géométrique, puisque les rayons (des droites ici) focalisent tous en (x_0,t_0) : c'est le cas le plus

*MAB, UMR CNRS 5466, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France
†Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques, 2 avenue Adolphe Chauvin, BP 222, Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France
‡Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, UMR CNRS 7640, 91128 Palaiseau Cedex, France

dégénéré possible. Nous renvoyons à [3] pour l'énoncé précis des différents régimes asymptotiques suivant les valeurs relatives de α et β. Nous nous concentrerons ici sur le cas

$$\alpha = n\sigma, \quad \beta = 2\sigma, \quad \frac{2}{n} < \sigma < \frac{2}{n-2} \cdot$$

Dans ce cas, et avec une donnée initiale du type (1.2), le résultat suivant est démontré dans [3]. On a noté $H^1_\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \{\Phi^\varepsilon \text{ bornée dans } L^2(\mathbb{R}^n), \varepsilon\nabla\Phi^\varepsilon \text{ bornée dans } L^2(\mathbb{R}^n)\}$, avec la norme associée

$$\|\Phi^\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon} \stackrel{\text{déf}}{=} \|\Phi^\varepsilon\|_{L^2} + \varepsilon\|\nabla\Phi^\varepsilon\|_{L^2}.$$

On note également $\Sigma \stackrel{\text{déf}}{=} \{\Phi \in H^1(\mathbb{R}^n), |x|\Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

Théorème 1 ([3]) *Soit $u_0^\varepsilon(x) = f(x)e^{-i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon t_0}}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $f \in \Sigma$. Soit $Z = \mathcal{F}S\mathcal{F}^{-1}$ où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier, et S est l'opérateur de scattering non linéaire associé à $i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = |\psi|^{2\sigma}\psi$. Alors dans H^1 on a quand ε tend vers zéro,*

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \frac{1}{(1-\frac{t}{t_0})^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{x-x_0}{1-\frac{t}{t_0}}\right) e^{-i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon(t-t_0)}}, \quad t < t_0 \tag{1.3}$$

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}}}{(\frac{t}{t_0}-1)^{\frac{n}{2}}} Zf\left(\frac{x-x_0}{1-\frac{t}{t_0}}\right) e^{i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon(t-t_0)}}, \quad t > t_0. \tag{1.4}$$

Remarquons que la solution de

$$i\varepsilon\partial_t\psi^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta\psi^\varepsilon = 0, \quad \psi^\varepsilon_{|t=0} = f(x)e^{-i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon t_0}} \tag{1.5}$$

s'écrit justement, pour $t \neq t_0$,

$$\psi^\varepsilon(t,x) = \frac{e^{in\frac{\pi}{4}(1+\operatorname{sgn}(t-t_0))}}{\left|1-\frac{t}{t_0}\right|^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{x-x_0}{1-\frac{t}{t_0}}\right) e^{-i\frac{|x-x_0|^2}{2\varepsilon(t-t_0)}}.$$

Le Théorème 1 montre donc que la solution du problème non linéaire est «linéarisable» jusqu'au temps de focalisation t_0 (au sens où elle est asymptotique à la solution du problème linéaire (1.5) associé). Après ce temps, elle l'est encore mais la solution linéaire associée a été modifiée par un opérateur de scattering (le facteur $e^{-in\frac{\pi}{2}}$ quant à lui est habituel après une traversée de caustique — c'est l'indice de Maslov [7]). On a donc affaire ici à une *propagation linéaire* et une *traversée de caustique non linéaire*. L'objectif de la présente étude est le suivant : supposons que la donnée initiale ne soit plus du type (1.2), mais soit simplement une famille u_0^ε bornée dans H^1_ε, l'espace d'énergie naturel associé à (1.1). Qu'en est-il dans ce cas de la propagation (linéaire/non linéaire) ? Intuitivement les phases quadratiques étant les plus dégénérées du point de vue de l'optique géométrique, on souhaiterait obtenir un résultat du type

$$u^\varepsilon \text{ n'est «pas linéarisable» sur } [0,T] \text{ pour un } T>0 \\ \Rightarrow \quad u_0^\varepsilon \text{ est formée d'oscillations quadratiques .}$$

C'est à cette question que nous nous proposons de répondre ici. Le plan de l'étude est le suivant. Tout d'abord nous allons rappeller quelques résultats antérieurs sur les équations de Schrödinger dans lesquels des oscillations quadratiques sont sources de perte de régularité ; nous rappellerons aussi brièvement quelques résultats bien connus sur (1.1). Ensuite nous énonçerons un théorème de linéarisabilité permettant de formaliser l'assertion «u^ε n'est pas linéarisable sur $[0,T]$». Nous montrerons alors l'implication souhaitée en recourant à une méthode de décomposition en profils. Enfin nous verrons que dans le cas où u_0^ε est en effet formée d'un certain nombre d'oscillations quadratiques, le Théorème 1 peut être généralisé : la solution associée est une superposition de solutions du type (1.3-1.4).

Phases quadratiques et équations de Schrödinger. Rappellons brièvement quelques résultats dans lesquels apparaissent des oscillations quadratiques, nécessaires à une perte de régularité. Dans le cas focalisant avec non linéarité critique $i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\Delta u = -|u|^{4/n}u$, F. Merle [13] a montré que si la donnée initiale est dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, de norme L^2 égale à celle du soliton, alors il n'y a explosion en temps fini que si la donnée est du type

$$u_0(x) = \left(\frac{\delta}{T}\right)^{n/2} e^{i\theta - i|x-x_1|^2/2T + i\delta^2/T} Q\left(\delta\left(\frac{x-x_1}{T} - x_0\right)\right),$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, et Q est solution du problème stationnaire. En outre dans [14], F. Merle et L. Vega montrent que le défaut de compacité de l'équation de Schrödinger cubique bidimensionnelle est dû à des oscillations quadratiques $e^{-i\lambda x^2}$, avec λ grand.

Dans le cas de l'équation $i\partial_t u + \dfrac{1}{2}\Delta u = -|u|^{2\sigma}u$, avec $\sigma \in [2/n, 2/(n-2)[$, et une donnée $u_0 \in \Sigma$, T. Cazenave et F. Weissler [6] ont montré qu'en remplaçant u_0 par $u_0 e^{ib|\cdot|^2}$ pour $b > 0$ assez grand, une solution explosive peut devenir globale. À l'inverse on peut aussi avancer le temps d'explosion en multipliant une donnée explosive par $e^{-ib|x|^2}$ pour $b > 0$ assez grand.

Quelques rappels sur les équations de Schrödinger. Nous allons rappeler ici quelques résultats très classiques sur ces équations : si la donnée initiale est bornée dans H^1_ε, alors l'équation (1.1) possède une unique solution globale, bornée dans $C^0(\mathbb{R}, H^1_\varepsilon)$. Évidemment on a le même résultat pour les équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{c} i\varepsilon\partial_t v^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta v^\varepsilon = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ v^\varepsilon_{|t=0} = u_0^\varepsilon. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Dans toute la suite, v^ε désignera la solution de l'équation linéaire (1.6), $v^\varepsilon(t) = U_0^\varepsilon(t) u_0^\varepsilon$.

Il est bien connu que les quantités suivantes ne dépendent pas du temps :

– Masse : $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2} = \|u_0^\varepsilon\|_{L^2}$.

– Énergie linéaire :

$$E_0^\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\|\varepsilon\nabla v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = E_0^\varepsilon(0).$$

– Énergie non linéaire :

$$E^\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}\|\varepsilon\nabla_x u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon^{n\sigma}}{\sigma+1}\|u^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = E^\varepsilon(0).$$

Dorénavant on notera

$$\|f^\varepsilon\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}_\varepsilon} \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{n\sigma}\|f^\varepsilon\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}.$$

Rappelons aussi les inégalités de Gagliardo–Nirenberg : soit $r \geq 2$ (si $n \geq 3$, on suppose que $r < 2n/(n-2)$). Alors

$$\|f\|_{L^r} \leq C_r \|f\|^{1-\delta(r)}_{L^2} \|\nabla f\|^{\delta(r)}_{L^2},$$

avec $\delta(r) \stackrel{\text{déf}}{=} n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$.

En particulier on remarque que

$$\|f\|_{L^{2\sigma+2}_\varepsilon} \leq C\|f\|^{1-\delta}_{L^2} \|\varepsilon\nabla f\|^{\delta}_{L^2} \tag{1.7}$$

avec $\delta \stackrel{\text{déf}}{=} n\sigma/(2\sigma+2)$.

Pour terminer ces rappels, énonçons les estimations de Strichartz, dans le cadre semi–classique : les solutions u^ε et v^ε vérifient, pour $q = \delta(r)$ et $r < +\infty$,

$$\|u^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)} + \|v^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)} + \|\varepsilon\nabla u^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)} + \|\varepsilon\nabla v^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{q}}\|u_0^\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon}. \tag{1.8}$$

2 Théorème de linéarisabilité

L'objectif de notre étude étant de comprendre quel type de donnée initiale donne lieu à un phénomène non linéaire dans l'équation (1.1), il est naturel de commencer par comprendre ce que signifie le fait d'être linéarisable ou non. Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2 *Soit $T > 0$, et soit u_0^ε bornée dans H^1_ε avec $\limsup_{\varepsilon\to 0}\|u_0^\varepsilon\|_{L^{2\sigma+2}_\varepsilon} = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) La fonction v^ε est une approximation de u^ε sur l'intervalle $[0,T]$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{H^1_\varepsilon} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

(ii) La fonction v^ε vérifie

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\|v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}_\varepsilon} = 0. \tag{2.1}$$

Remarques. Ce résultat est le pendant d'un théorème de P. Gérard [9] sur les équations des ondes semi linéaires. L'intérêt d'un tel résultat est que la vérification de la linéarisabilité de u^ε revient à une estimation sur l'équation linéaire, ce qui a priori doit être plus simple que l'étude de la solution de l'équation non linéaire. Notons en outre que l'hypothèse supplémentaire sur la limite de u_0^ε dans $L^{2\sigma+2}_\varepsilon$ est naturelle, car elle signifie que l'on exclut que la non linéarité intervienne au temps $t = 0$: cela apparaîtra clairement dans la démonstration du théorème de décomposition de la donnée initiale.

Principe de la démonstration du Théorème 2.

Commençons par démontrer que (i) implique (ii). On définit pour cela

$$R^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{1}{2}\|\varepsilon\nabla u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\sigma+1}\|u^\varepsilon(t)\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\|\varepsilon\nabla_x v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\sigma+1}\|v^\varepsilon(t)\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}\right|.$$

D'après (i), on a

$$\begin{aligned} R^\varepsilon &\leq \sup_{0\leq t\leq T}\frac{\varepsilon^{n\sigma}}{\sigma+1}\int\left||u^\varepsilon(t,x)|^{2\sigma+2} - |v^\varepsilon(t,x)|^{2\sigma+2}\right|dx + o(1)\\ &\lesssim \sup_{0\leq t\leq T}\varepsilon^{n\sigma}\int\left(|u^\varepsilon(t,x)|^{2\sigma+1} + |v^\varepsilon(t,x)|^{2\sigma+1}\right)|u^\varepsilon(t,x) - v^\varepsilon(t,x)|dx + o(1)\ , \end{aligned}$$

et donc par l'inégalité de Hölder, il vient

$$R^\varepsilon \lesssim \sup_{0\leq t\leq T}\varepsilon^{n\sigma}\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}\Big(\|u^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}} + \|v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}\Big)^{2\sigma+1} + o(1)\ .$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg (1.7) pour conclure que

$$R^\varepsilon \lesssim \sup_{0\leq t\leq T}\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^{1-\delta(2\sigma+2)}\|\varepsilon\nabla u^\varepsilon(t) - \varepsilon\nabla v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^{\delta(2\sigma+2)} + o(1)\ ,$$

où l'on rappelle que $\delta(r) \stackrel{\text{déf}}{=} n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$. Par (i) on obtient que $\limsup_{\varepsilon\to 0} R^\varepsilon = 0$. Mais par la conservation de l'énergie on a

$$R^\varepsilon = \sup_{0\leq t\leq T}\frac{\varepsilon^{n\sigma}}{\sigma+1}\left|\|u_0^\varepsilon\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} - \|v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}\right|.$$

Comme u_0^ε tend vers zéro dans $L_\varepsilon^{2\sigma+2}$, on obtient que (i) implique (ii).

Pour démontrer que (ii) implique (i), on forme la différence $w^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} u^\varepsilon - v^\varepsilon$, qui vérifie

$$\left\{\begin{array}{c} i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta w^\varepsilon = \varepsilon^{n\sigma}|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon,\quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n,\\ w^\varepsilon_{|t=0} = 0. \end{array}\right.$$

En contrôlant le membre de droite par $|w^\varepsilon|^{2\sigma+1} + |v^\varepsilon|^{2\sigma+1}$ on arrive au résultat : la partie surlinéaire en w^ε se traite comme d'habitude par bootstrap, et pour se débarrasser du terme source en v^ε on utilise l'hypothèse (ii) de petitesse. Nous n'allons pas écrire les détails ici, qui sont techniques mais sans difficulté majeure (tout se fait à coup d'estimations de Strichartz (1.8) sur w^ε et sur $\varepsilon\nabla w^\varepsilon$ et d'inégalités de Hölder pour faire apparaître la norme $L_\varepsilon^{2\sigma+2}$ de v^ε dans le terme source). Nous renvoyons à [4] pour les détails.

Notons que l'hypothèse $\sigma > 2/n$ n'intervient que dans cette deuxième partie $(ii) \Rightarrow (i)$.

3 Décomposition de la donnée initiale

Nous avons établi dans la section précédente un critère, portant sur la solution linéaire v^ε, permettant d'assurer que la solution non linéaire est linéarisable sur $[0,T]$. Pour déterminer quel type de donnée initiale donne lieu à une solution non linéarisable sur $[0,T]$, nous devons donc caractériser les données initiales générant une solution linéaire telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{0\le t\le T}\|v^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}_\varepsilon}\ge C>0\ . \tag{3.1}$$

Pour simplifier les notations, nous allons procéder au changement d'échelle suivant : définissons

$$V^\varepsilon(s,y)\overset{\text{déf}}{=}\varepsilon^{\frac{n}{2}}v^\varepsilon(\varepsilon s,\varepsilon y).$$

La suite V^ε vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_s V^\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta_y V^\varepsilon=0\\ V^\varepsilon_{|s=0}=V^\varepsilon_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $V_0^\varepsilon\overset{\text{déf}}{=}\varepsilon^{\frac{n}{2}}u_0^\varepsilon(\varepsilon\cdot)$. L'intérêt de ce changement d'échelle est que la suite V^ε est à présent bornée dans $C^0(\mathbb{R},H^1)$, et l'hypothèse (3.1) devient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{0\le s\le\frac{T}{\varepsilon}}\|V^\varepsilon(s)\|_{L^{2\sigma+2}}\ge C>0. \tag{3.3}$$

Nous avons ainsi affaire à une suite bornée dans H^1 de solutions de l'équation de Schrödinger linéaire, et il est naturel de lui appliquer le théorème de décomposition en profils de S. Keraani [12]. Plaçons–nous dorénavant en dimension $n=3$ pour simplifier l'exposition : le Théorème 1.6 de [12] implique que (quitte à extraire une sous–suite),

$$V^\varepsilon(s,y)=\sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{\sqrt{\eta_j^\varepsilon}}V_j\left(\frac{s-s_j^\varepsilon}{(\eta_j^\varepsilon)^2},\frac{y-y_j^\varepsilon}{\eta_j^\varepsilon}\right)+W_\ell^\varepsilon(s,y)\ , \tag{3.4}$$

où $\eta_j^\varepsilon\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ sont les «échelles» de concentration, qui vérifient pour tout $j\neq k$,

$$\text{soit}\quad \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta_j^\varepsilon}{\eta_k^\varepsilon}+\frac{\eta_k^\varepsilon}{\eta_j^\varepsilon}=+\infty,\qquad\text{soit}\quad \eta_j^\varepsilon=\eta_k^\varepsilon\quad\text{et}\quad\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{|s_j^\varepsilon-s_k^\varepsilon|+|y_j^\varepsilon-y_k^\varepsilon|}{\eta_j^\varepsilon}=+\infty.$$

On dira que $(\eta_j^\varepsilon,s_j^\varepsilon,y_j^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale. Le reste W_ℓ^ε vérifie

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\|W_\ell^\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R},L^r)}\to 0\quad\text{quand}\quad\ell\to\infty, \tag{3.5}$$

et $\dfrac{2}{q}+\dfrac{3}{r}=\dfrac{1}{2}$, avec $r<+\infty$. De tels (q,r) sont dits $\dot H^1$-admissibles. Enfin les V_j et W_ℓ^ε sont solutions de (3.2) dans $C_b^0(\mathbb{R},\dot H^1)$. Ce type de résultat est typique des théorèmes de décompositions en profils : cette théorie est due à P. Gérard [10] pour la description du défaut de compacité dans les injections de Sobolev, et a été ensuite appliquée à l'étude de diverses EDP, comme les équations d'ondes [1, 2], de Navier–Stokes [8] ou encore de Schrödinger [12].

Énonçons maintenant le théorème que nous souhaitons démontrer.

Théorème 3 *Sous les hypothèses du Théorème 2, on a le résultat suivant. Supposons que (3.1) soit vérifiée. Alors quitte à extraire une sous–suite, il existe une famille $(t_j^\varepsilon, x_j^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ orthogonale dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, une famille $(\Psi_\ell^\varepsilon)_{\ell\in\mathbb{N}}$, bornée dans $H_\varepsilon^1(\mathbb{R}^n)$, et une famille (non vide) $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, bornée dans Σ, telles que :*

$$u_0^\varepsilon(x) = \Psi_\ell^\varepsilon(x) + r_\ell^\varepsilon(x), \quad \text{avec } \limsup_{\varepsilon\to 0} \|U_0^\varepsilon(t) r_\ell^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L_\varepsilon^{2\sigma+2})} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, , \tag{3.6}$$

et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a, quand ε tend vers zéro, l'asymptotique suivante dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Psi_\ell^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{(t_j^\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \varphi_j \left(\frac{x - x_j^\varepsilon}{t_j^\varepsilon} \right) e^{-i\frac{(x-x_j^\varepsilon)^2}{2\varepsilon t_j^\varepsilon}} + o(1). \tag{3.7}$$

En outre on a $\limsup_{\varepsilon\to 0} \dfrac{t_j^\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty$ et $\limsup_{\varepsilon\to 0} t_j^\varepsilon \in [0, T]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Remarques. Par le Théorème 2, (3.6) signifie que l'obstruction à la linéarisabilité vient de Ψ_ℓ^ε. L'équation (3.7) implique que cette obstruction est due à des oscillations quadratiques. Du point de vue de l'optique géométrique, les oscillations quadratiques génèrent une focalisation en un point, ce qui est le cas le plus dégénéré : en particulier si les données initiales oscillent différemment, il peut y avoir une caustique mais le terme non linéaire restera négigeable : la non linéarité est «sous critique» de ce point de vue. À ce sujet nous renvoyons aux travaux de J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch [11], où ce type de phénomène est analysé pour des équations d'ondes non linéaires.

Donnons une idée de la démonstration du Théorème 3 : elle se fait en plusieurs étapes que nous détaillons ci–dessous.

Étape 1. On part bien sûr de la décomposition (3.4), sur laquelle on se propose de démontrer les propriétés suivantes.

(i) Quitte à extraire une sous–suite, η_j^ε est égal à un pour tout j.

(ii) Les V_j et W_ℓ^ε sont bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^1)$.

(iii) On a $\limsup_{\varepsilon\to 0} \|W_\ell^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^{2\sigma+2})} \to 0$ quand ℓ tend vers l'infini.

Notons que (ii) et (iii) découlent de (i). En effet si (i) est vérifiée alors

$$V^\varepsilon(s + s_j^\varepsilon, y + y_j^\varepsilon) \rightharpoonup V_j(s, y) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

et comme V^ε est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2)$, on obtient le résultat voulu pour V_j, et donc

$$(W_\ell^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leq 1} \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}, L^2), \qquad \text{uniformément en } \ell \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Finalement pour montrer (iii) on utilise simplement (3.5) avec $q = +\infty$, que l'on interpole avec (3.8). Le résultat suit.

Montrons maintenant que η_j^ε est égal à un pour tout j. C'est un résultat sur les suites η^ε-oscillantes. Rappellons en effet (voir [12]) que si η_j^ε est une échelle de la décomposition de V^ε, alors V^ε est η_j^ε-oscillante, au sens où

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\eta_j^\varepsilon |\xi| \leq R^{-1}} |\xi|^2 |\mathcal{F}(V^\varepsilon)(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\eta_j^\varepsilon |\xi| \geq R} |\xi|^2 |\mathcal{F}(V^\varepsilon)(\xi)|^2 \, d\xi \right) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, .$$

Cette limite est en outre uniforme en temps.

Supposons donc que (V^ε) est η^ε–oscillante, pour une certaine échelle η^ε. Nous allons montrer que nécessairement la limite de η^ε ne peut être ni zéro ni l'infini, ce qui impliquera le résultat (i) voulu : sa limite est alors finie, et quitte à remettre le profil V^j associé à l'échelle, cette limite peut être choisie égale à un.

On peut écrire, uniformément en temps,

$$\begin{aligned} \|\nabla V^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_{R^{-1}\leq \eta^\varepsilon|\xi|\leq R} |\xi|^2 |\mathcal{F}(V^\varepsilon)|^2\, d\xi + \delta(\varepsilon, R) \\ &\lesssim \left(\frac{R}{\eta^\varepsilon}\right)^2 \|V^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 + \delta(\varepsilon, R), \end{aligned}$$

avec $\limsup_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon, R) \to 0$ quand $R \to \infty$. Mais par Gagliardo–Nirenberg, les normes L^2 et $\dot H^1$ de V^ε ne peuvent tendre vers zéro, puisque la norme $L^{2\sigma+2}$ est uniformément minorée. On a donc nécessairement

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \eta^\varepsilon = \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Supposons maintenant que $\lambda = 0$. Alors on écrit, pour tout temps,

$$V^\varepsilon = V_R^\varepsilon + W_R^\varepsilon, \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}V_R^\varepsilon(s,\xi) := \mathbf{1}_{R^{-1}\leq \eta^\varepsilon|\xi|\leq R} \mathcal{F}V^\varepsilon(s,\xi)\ ,$$

et pour tout $\delta > 0$, si R est assez grand uniformément en ε et η^ε, on a

$$\|W_R^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^1)} \leq \delta\ .$$

Par Gagliardo–Nirenberg on obtient que $\|W_R^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{2\sigma+2})}$ est arbitrairement petit si R est assez grand, uniformément en ε et η^ε. Il suit que

$$\begin{aligned} \|V^\varepsilon\|^{2\sigma+2}_{L^\infty([0,T],L^{2\sigma+2})} &\lesssim \|V_R^\varepsilon\|^{2\sigma+2}_{L^\infty([0,T],L^{2\sigma+2})} + o(1) \\ &\lesssim \|V_R^\varepsilon\|^{(2\sigma+2)(1-\delta(2\sigma+2))}_{L^\infty([0,T],L^2)} + o(1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par la localisation en fréquence encore une fois, on a pour tout $s \in [0,T]$,

$$\|V_R^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 \lesssim (\eta^\varepsilon)^2 \int_{\frac{1}{R}\leq \eta^\varepsilon \xi \leq R} |\xi|^2 |\mathcal{F}V_R^\varepsilon(s,\xi)|^2 d\xi.$$

Le résultat suit, car $(2\sigma+2)\,(1-\delta(2\sigma+2)) = 2-\sigma > 0$ (nous nous sommes placés dans le cas $n=3$) ; (i) est démontré.

Étape 2. On a donc démontré finalement que la décomposition (3.4) s'écrit plus simplement dans notre cas de la manière suivante :

$$V^\varepsilon(s,y) = \sum_{j=0}^{\ell} V_j(s - s_j^\varepsilon, y - y_j^\varepsilon) + W_\ell^\varepsilon(s,y)$$

avec

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|W_\ell^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{2\sigma+2})} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.10}$$

Reste à présent à appliquer cette décomposition à $s=0$, et à remettre le tout à l'échelle. On obtient

$$u_0^\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} V_j\left(-\frac{t_j^\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x-x_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right) + w_\ell^\varepsilon(x), \tag{3.11}$$

où l'on a défini

$$t_j^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon s_j^\varepsilon, \quad x_j^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon y_j^\varepsilon \quad \text{et} \quad w_\ell^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} W_\ell^\varepsilon\left(0, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \cdot \tag{3.12}$$

Bien sûr $U_0^\varepsilon(t) w_\ell^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} W_\ell^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$, donc (3.10) devient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|U_0^\varepsilon(t) w_\ell^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L_\varepsilon^{2\sigma+2})} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \tag{3.13}$$

Définissons maintenant

$$I_j^\varepsilon(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} V_j\left(\frac{t-t_j^\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{x-x_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right),$$

dont on cherche le comportement asymptotique quand $t=0$ et ε tend vers zéro.

Pour simplifier la présentation, nous allons supposer dans la suite que les profils V_j sont aussi réguliers que nécessaire — cela n'est pas exact et il faudrait procéder à des régularisations pour rendre les arguments ci–dessous rigoureux (voir [4]). L'asymptotique de $I_j^\varepsilon(0,\cdot)$ dépend essentiellement de la limite de $t_j^\varepsilon/\varepsilon$: si cette limite est finie, égale à λ_j, alors par continuité des solutions de (1.6), on a dans H_ε^1,

$$I_j^\varepsilon(0,\cdot) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \Phi_j\left(\frac{\cdot - x_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

pour $\Phi_j = V_j(-\lambda_j, \cdot) \in H^1$.

Si la limite de $t_j^\varepsilon/\varepsilon$ est infinie en revanche, on utilise un résultat classique d'asymptotique en temps grand des solutions de (3.2), voir [15] : si $V_0 \in \Sigma$, alors

$$\left\| V(s,y) - \frac{e^{i\frac{|y|^2}{2s}}}{s^{n/2}} \widehat{V}_0\left(\frac{y}{s}\right) \right\|_{H^1} \underset{s\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \ , \ \text{avec} \ \frac{1}{s^{n/2}} = \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{|s|^{n/2}} \ \text{si} \ s<0 \ .$$

Il vient alors, dans L^2,

$$I_j^\varepsilon(0,x) \sim \frac{1}{\left(t_j^\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\frac{|x-x_j^\varepsilon|^2}{2\varepsilon t_j^\varepsilon}} \psi_j\left(\frac{x-x_j^\varepsilon}{t_j^\varepsilon}\right).$$

Nous avons donc à présent une décomposition du type

$$u_0^\varepsilon(x) = \sum_{\substack{0\le j\le \ell \\ \limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon \in\mathbb{R}}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \Phi_j\left(\frac{x-x_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \sum_{\substack{0\le j\le \ell \\ \limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon = \pm\infty}} \frac{1}{\left(t_j^\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\frac{|x-x_j^\varepsilon|^2}{2\varepsilon t_j^\varepsilon}} \psi_j\left(\frac{x-x_j^\varepsilon}{t_j^\varepsilon}\right) + w_\ell^\varepsilon(x) \ ,$$

et pour achever la démonstration du théorème, il reste à montrer les résultats énoncés sur les temps t_j^ε, ainsi que le fait que $\Phi_j = 0$ pour tout j.

Étape 3. Commençons par étudier les temps t_j^ε. On constate que si $\limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon = \pm\infty$, alors

$$I_j^\varepsilon(t,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{\left(t-t_j^\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}} e^{i\frac{|x-x_j^\varepsilon|^2}{2\varepsilon(t-t_j^\varepsilon)}} \psi_j\left(\frac{x-x_j^\varepsilon}{t-t_j^\varepsilon}\right) \ , \text{ dans } L^\infty([0,T],H_\varepsilon^1) \ ,$$

et

$$\|I_j^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T],L_\varepsilon^{2\sigma+2})} \leq \sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\varepsilon}{t_j^\varepsilon - t}\right|^{\frac{3\sigma}{2\sigma+2}} \|\psi_j\|_{L^{2\sigma+2}} + o(1) \ .$$

Dans le cas où $\limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon = -\infty$ on a pour ε assez petit et pour tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{\varepsilon}{|t_j^\varepsilon - t|} = \frac{\varepsilon}{t - t_j^\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{-t_j^\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Par conséquent, les termes de la décomposition de u_0^ε concernant le cas $\limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon = -\infty$ peuvent être incorporés au terme de reste w_ℓ^ε. Le fait que chaque t_j^ε puisse être choisi dans $[0,T]$ relève du même type de raisonnement (voir [4]).

Reste donc à montrer que dans la décomposition initiale il n'y a pas de profil Φ_j. Ce résultat découle d'un argument d'orthogonalité. En effet on se convainc sans peine que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \left\| \frac{1}{(t_j^\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{i(\cdot - x_j^\varepsilon)^2}{2\varepsilon t_j^\varepsilon}} \psi_j\left(\frac{\cdot - x_j^\varepsilon}{t_j^\varepsilon}\right)\right\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}} = 0 \ .$$

Comme par hypothèse la limite de $\|u_0^\varepsilon\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}}$ est nulle, ainsi bien sûr que celle de $\|w_\ell^\varepsilon\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}}$, on en déduit que la norme de $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq j\leq \ell \\ \limsup t_j^\varepsilon/\varepsilon\in\mathbb{R}}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\Phi_j\left(\frac{x-x_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ dans $L_\varepsilon^{2\sigma+2}$ est arbitrairement petite.

Mais un calcul facile utilisant l'orthogonalité des échelles montre que pour tout ℓ on a quand ε tend vers zéro,

$$\left\| \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \Phi_j\left(\frac{\cdot - \widetilde{x}_j^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_\varepsilon^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_{j=0}^{\ell} \|\Phi_j\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \ .$$

On en déduit donc que $\Phi_j = 0$ pour tout j, et le théorème est démontré.

4 Superposition non linéaire

Jusqu'ici nous avons vu que si une solution non linéaire est non linéarisable sur $[0,T]$, alors la donnée initiale est nécessairement formée d'une superposition d'oscillations quadratiques. Il est naturel de se demander maintenant quel type de phénomène non linéaire intervient dans la solution : nous allons dans cette dernière section montrer que l'on peut en fait superposer le résultat (1.3-1.4). Nous nous contentons d'énoncer le théorème ici et renvoyons à [4] pour la démonstration.

Supposons donc que

$$u_0^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{J} f_j(x) e^{-i\frac{|x-x_j|^2}{2\varepsilon t_j}} + r_0^\varepsilon(x),$$

avec $f_j \in \Sigma$, $x_j \in \mathbb{R}^n$, $t_j > 0$, et $(t_j, x_j) \neq (t_k, x_k)$ si $j \neq k$. On suppose également que r_0^ε est bornée dans H_ε^1 et que $r^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} U^\varepsilon(t) r_0^\varepsilon$ vérifie (2.1) pour un certain $T > 0$. Soit enfin v_j^ε la solution de

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t v_j^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Delta v_j^\varepsilon = \varepsilon^{n\sigma} |v_j^\varepsilon|^{2\sigma} v_j^\varepsilon, \\ v^\varepsilon_{j|t=0} = f_j(x) e^{-i\frac{|x-x_j|^2}{2\varepsilon t_j}}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Le théorème est le suivant.

Théorème 4 *Pour tout* $T > 0$ *tel que* $\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{0\leq t\leq T} \varepsilon^{n\sigma} \|r^\varepsilon(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = 0$, *on a quand* ε *tend vers zéro,*

$$u^\varepsilon = \sum_{j=1}^{J} v_j^\varepsilon + r^\varepsilon + o(1) \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2).$$

Bibliographie

[1] H. Bahouri et P. Gérard : High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Mathematics*, **121**, pages 131–175, 1999.

[2] H. Bahouri et P. Gérard : Concentration effects in critical nonlinear wave equations and scattering theory, *Geometrical Optics and Related Topics* (F. Colombini and N. Lerner eds), Progress in Nonlinear Differential Equation and Applications, vol. **32**, Birkhäuser, Boston, 17–30, 1997.

[3] R. Carles : Geometric optics with caustic crossing for some nonlinear Schrödinger equations, *Indiana Univ. Math. J.* **49**, pages 475–551, 2000.

[4] R. Carles, C. Fermanian et I. Gallagher : On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations, `arXiv : math.AP/0212171`.

[5] T. Cazenave : *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, Text. Met. Mat., vol. 26, Univ. Fed. Rio de Jan., 1993.

[6] T. Cazenave et F. Weissler : Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.*, **147**, 75–100, 1992.

[7] J. Duistermaat : Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **27**, pages 207–281, 1974.

[8] I. Gallagher : Profile decomposition for the Navier–Stokes equations, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **129**, pages 285–316, 2001.

[9] P. Gérard : Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *J. Funct. Anal.* **141**, pages 60–98, 1996.

[10] P. Gérard : Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3**, pages 213–233, 1998 (version électronique : `http ://www.emath.fr/cocv/`).

[11] J.-L. Joly, G. Metivier et J. Rauch : *Caustics for dissipative semilinear oscillations*, Mem. Amer. Math. Soc. **144**, 2000.

[12] S. Keraani : On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations, *J. Differential Equations*, **175**, no. 2, 353–392, 2001.

[13] F. Merle : Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power, *Duke Math. J.*, **69**, no. 2, 427–454, 1993.

[14] F. Merle et L. Vega : Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, *Internat. Math. Res. Notices*, no. 8, 399–425, 1998.

[15] J. Rauch : *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Math., vol. 128, Springer-Verlag, New York, 1991.