Exercice 1. Déterminer les limites quand $x \to +\infty$ des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(e^x - x^e)}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

Exercice 2. 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, s'annulant trois fois. Montrer l'existence d'un réel c tel que $f''(c) = 0$. Généraliser à f dérivable n fois et s'annulant $n + 1$ fois.
2. On considère une fonction g continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa limite en $\pm\infty$ est zéro. Montrer que g' s'annule.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < x.$$

En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leq \alpha x.$$

Exercice 4. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -x^2 - 4x,$$

et soient les ensembles

$$A =]-\infty, -2[\quad \text{et} \quad B =]-\infty, 4[.$$

Montrer que $f(A) = B$ (sans faire d'étude de fonction).

Exercice 5. On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0, \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour les suites suivantes, vérifier si elles sont monotones (auquel cas préciser si elles sont croissantes ou décroissantes) et calculer leur limite :

$$u_n = 3 \times 2^n; \quad u_n = 3 + 2n; \quad u_n = 3 + 2^n; \quad u_n = -3 - 2n; \quad u_n = -3 \times 2^n;$$

$$u_n = 3 \times 2^{-n}; \quad u_n = 3 - 2^{-n}.$$

Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes :

$$u_n = -n^4 + 2n^3 - n^2 - 1; \quad v_n = n^3 + n^2 + 1; \quad s_n = u_n + v_n; \quad p_n = u_n v_n; \quad q_n = u_n / v_n.$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}; \quad u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Exercice 7. Pour tous n, p dans $\mathbb{N}$ on définit

$$J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^p t \, dt.$$

Trouver les relations de récurrence reliant $J_{n,p}$ et $J_{n,p-2}$ ainsi que $J_{n,p}$ et $J_{n-2,p}$. En déduire la valeur de $J_{n,p}$.