Equations de Navier-Stokes sans viscosité dans une direction

par

ISABELLE GALLAGHER

(d'après J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier)

Résumé. Lorsque l'on s'intéresse à des modèles géophysiques de fluides, dans $\mathbb{R}^3$, on est amené à considérer une viscosité dite "turbulente", très faible dans la direction verticale ; on se propose donc ici d'étudier les équations de Navier-Stokes incompressibles sans viscosité verticale, pour lesquelles on montre des résultats d'existence et d'unicité similaires au cas des équations traditionnelles. On obtient également des résultats de convergence des fluides géophysiques, dans la limite d'une forte rotation, vers un fluide régi par les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles.

Introduction

Les fluides tournants dans $\mathbb{R}^3$ (mais aussi dans $\mathbb{T}^3$ ou dans un domaine du type $\Omega_{(x_1,x_2)} \times [0,1]_{x_3}$), sont régis dans une première approximation par le système suivant :

$$(FT^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + \mathbb{P}(v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon) - \nu \Delta_h v^\varepsilon - \nu' \partial_3^2 v^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}(v^\varepsilon \times e_3) = 0 \\ \operatorname{div} v^\varepsilon = 0 \\ v^\varepsilon|_{t=0} = v_0 \;\text{ avec }\; \operatorname{div} v_0 = 0 . \end{cases}$$

On a noté $\mathbb{P}$ pour le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle, v^ε est la vitesse du fluide, $\nu > 0$ sa viscosité horizontale et $\nu' \geq 0$ sa viscosité verticale. Le paramètre ε représente le nombre de Rossby, destiné à tendre vers zéro, et l'on a noté $e_3 = {}^t(0,0,1)$. Il est courant de supposer $\nu' \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. Enfin on a noté $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$, et l'on notera de même $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2)$. Pour une justification physique de ce type de modèle, on renvoie à [Pe] ou à [Gr].

Avant de s'intéresser à la limite des solutions de (FT^ε) quand ε tend vers zéro, il est pertinent de s'interroger sur le caractère bien posé, uniformément en ε, de (FT^ε). Comme nous allons procéder par estimations d'énergie, et puisque $\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(v^\varepsilon \times e_3)$ est antisymétrique, ce terme ne jouera aucun rôle dans cette discussion et nous sommes donc amenés à considérer le système de Navier-Stokes suivant, sans viscosité dans une direction :

$$
(NS_\nu) \qquad \begin{cases} \partial_t v + \mathbb{P}(v\cdot\nabla v) - \nu\,\Delta_h v = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 \ \text{ avec } \ \operatorname{div} v_0 = 0. \end{cases}
$$

Nous nous plaçons dans la suite de cette étude dans $\mathbb{R}^3$. Il est évident que pour une donnée initiale $v_0 \in H^{\frac{5}{2}+\eta}(\mathbb{R}^3)$, avec $\eta > 0$, il existe une unique solution forte, locale en temps (par la théorie des systèmes hyperboliques, en "oubliant" la viscosité ν). Cependant le système (NS_ν) possède la même invariance par changement d'échelle que les équations de Navier-Stokes traditionnelles (si v est solution associée à v_0, alors $v_\lambda(t,x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v(\lambda^2 t, \lambda x)$ est solution associée à $v_{0,\lambda}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v_0(\lambda x)$). Il est donc tentant de chercher, malgré l'absence de viscosité verticale, à résoudre (NS_ν) dans un espace invariant par ce changement d'échelle. Avant d'énoncer le résultat, introduisons l'espace de Sobolev anisotrope suivant :

$$
H^{0,s} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \|f\|_{H^{0,s}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\int_{\mathbb{R}^3} \|f(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} dx_h \Big)^{1/2} < +\infty \Big\}.
$$

On a noté $x = (x_h, x_3)$ avec $x_h \in \mathbb{R}^2$, et $H^s(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev usuel sur $\mathbb{R}$, d'ordre s.

Ce type d'espace a été utilisé par D. Iftimie dans [I1] pour étudier les équations de Navier-Stokes. Les équations bidimensionnelles étant globalement bien posées dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ (voir J. Leray [Le]), et les équations tridimensionnelles étant localement (globalement à données petites) bien posées dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ d'après H. Fujita et T. Kato [FK], on peut chercher à résoudre (NS_ν) dans $H^{0,\frac{1}{2}}$.

Théorème 1. *Soit $v_0 \in H^{0,s}$, avec $s > \frac{1}{2}$. Alors il existe un temps T^* maximal et une unique solution v à (NS_ν), telle que*

$$
\forall T < T^*, \quad v \in C^0([0,T], H^{0,s}) \ \text{ et } \ \nabla_h v \in L^2([0,T], H^{0,s}).
$$

En outre, il existe une constante $c > 0$ telle que si $\|v_0\|_{H^{0,s}}$ est inférieur à $c\nu$, alors $v \in C^0_b(\mathbb{R}^+, H^{0,s})$ et $\nabla_h v \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{0,s})$.

Remarques.

1) La partie "existence" est démontrée dans [CDGG1]. Pour l'unicité, on suppose $v_0 \in H^{0,s}$ avec $s > \frac{3}{2}$ dans [CDGG1]. Le résultat d'unicité dans $H^{0,s}$, $s > \frac{1}{2}$, est dû à D. Iftimie [I2].

2) Ce résultat est comparable à ce que l'on peut démontrer pour les équations de Navier-Stokes traditionnelles (voir [I1]). La seule différence est que l'on ne descend pas l'indice de régularité verticale s jusqu'à $\frac{1}{2}$ exactement : on utilise en effet dans la démonstration le fait que $H^s(\mathbb{R})$ est une algèbre pour $s > \frac{1}{2}$.

3) Il n'y a pas de théorie de solutions faibles pour ce système (par manque d'estimations L^2 suffisantes pour passer à la limite dans des suites de solutions approximées).

Les techniques employées pour démontrer le théorème 1, associées à des estimations de type Strichartz pour l'équation

$$\partial_t v + \mathbb{P}(v \times e_3) = 0$$

démontrées dans [CDGG2], permettent en outre de démontrer le théorème suivant. Dans ce théorème, w_L^ε désigne la solution de

$$(FTL^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t w_L^\varepsilon - \nu \Delta_h w_L^\varepsilon - \nu' \partial_3^2 w_L^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(w_L^\varepsilon \times e_3) = 0 \\ \operatorname{div} w_L^\varepsilon = 0 \\ w_L^\varepsilon|_{t=0} = w_0 \ \text{ avec } \ \operatorname{div} w_0 = 0 . \end{cases}$$

Théorème 2. *Soit $v_0 = \overline{u}_0 + w_0$, avec $\overline{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $w_0 \in H^{0,s}$ avec $s > \frac{1}{2}$. On suppose $\operatorname{div} \overline{u}_0 = \operatorname{div} w_0 = 0$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de ν', tel que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe une unique solution globale au système (FT^ε), telle que*

$$v^\varepsilon \ \textit{est bornée dans} \ C^0(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) \ \textit{et} \ \nabla_h v^\varepsilon \ \textit{est bornée dans} \ L^2(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) .$$

En outre, quand ε tend vers zéro on a

$$\begin{aligned} v^\varepsilon - \overline{u} - w_L^\varepsilon &\longrightarrow 0 \ \textit{dans} \ L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) \\ \nabla_h(v^\varepsilon - \overline{u} - w_L^\varepsilon) &\longrightarrow 0 \ \textit{dans} \ L^2(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) , \end{aligned}$$

où $\overline{u}$ est la solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, associée à la donnée initiale $\overline{u}_0$.

Remarques.

1) Ce théorème est démontré dans [CDGG1] (l'unicité dans $H^{0,s}$, $s > \frac{1}{2}$, étant toujours une conséquence de [I2]).

2) L'idée d'utiliser des estimations de type Strichartz pour démontrer des résultats asymptotiques ou d'existence globale en mécanique des fluides trouve son origine dans un travail de S. Ukai ([Uk]) pour les équations d'Euler compressibles (voir aussi [DG] pour les équations de Navier-Stokes compressibles, ainsi que [D]).

I. Démonstration du théorème 1

Nous allons commencer par démontrer le résultat d'existence dans le cas de données petites. Soit $x_h \in \mathbb{R}^2$ fixé, et $s \in \mathbb{R}$. Une estimation d'énergie sur (NS_ν) dans $H^s(\mathbb{R})$ donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})} - \nu\int_{\mathbb{R}} \Lambda_3^{s/2}\Delta_h v(x_h,x_3)\,\Lambda_3^{s/2}v(x_h,x_3)\,dx_3 \\ = -\int_{\mathbb{R}} \Lambda_3^{s/2}\mathbb{P}(v\cdot\nabla v)\,\Lambda_3^{s/2}v(x_h,x_3)\,dx_3\,,\end{aligned}$$

où l'on a noté $\Lambda_3 \stackrel{\text{déf}}{=} (1-\partial_3^2)^{1/2}$ l'opérateur de multiplication par $\langle\xi_3\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} (1+\xi_3^2)^{1/2}$ dans l'espace de Fourier.

Intégrons cette identité sur $\mathbb{R}^2$: après intégration par parties il vient

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h v\|^2_{H^{0,s}} = \Big|\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_3^{s/2}\mathbb{P}(v\cdot\nabla v)\,\Lambda_3^{s/2}v(x_h,x_3)\,dx_h\,dx_3\Big|.$$

Comme v est de divergence nulle, on peut ôter le projecteur $\mathbb{P}$ dans l'égalité (1). Il s'agit donc d'estimer le membre de droite de cette égalité. Commençons par écrire

$$v\cdot\nabla v = v^h\cdot\nabla_h v + v^3\,\partial_3 v\,,$$

où $v^h = (v^1, v^2)$. Comme $H^s(\mathbb{R})$ est une algèbre dès que $s > \frac{1}{2}$, on obtient pour tout $x_h \in \mathbb{R}^2$,

$$\Big|\big((v^h\cdot\nabla_h v)(x_h,\cdot)\mid v(x_h,\cdot)\big)_{H^s(\mathbb{R})}\Big| \lesssim \|v(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\|\nabla_h v(x_h,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\,,$$

ce qui après intégration en $x_h \in \mathbb{R}^2$, conduit à

$$\begin{aligned}(2) \qquad \Big|\int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_3^{s/2}(v^h\cdot\nabla_h v)\,\Lambda_3^{s/2}v(x_h,x_3)\,dx_h\,dx_3\Big| \\ \lesssim \int_{\mathbb{R}^2_{x_h}} \|v(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\|\nabla_h v(x_h,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\,dx_h\,.\end{aligned}$$

Considérons à présent le terme $(v^3\,\partial_3 v \mid v)_{H^s(\mathbb{R})}$: nous allons nous inspirer de la méthode utilisée par D. Iftimie dans [I2], plutôt que de suivre la méthode plus compliquée de [CDGG1] utilisant le découpage dyadique.

En écrivant ce terme en variables de Fourier, on est plus généralement amené à estimer la quantité

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \langle\xi_3\rangle^{2s}\,\eta_3\,\hat{a}^3(\xi-\eta)\,\hat{b}(\eta)\,\hat{b}(-\xi)\,d\xi\,d\eta\,, \tag{3}$$

où a et b sont deux champs de vecteurs, avec a de divergence nulle. Par symétrie dans les variables d'intégration, on a aussi

$$A = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \big(\eta_3\langle\xi_3\rangle^{2s} - \xi_3\langle\eta_3\rangle^{2s}\big)\,\hat{a}^3(\xi-\eta)\,\hat{b}(\eta)\,\hat{b}(-\xi)\,d\xi\,d\eta\,.$$

Mais il n'est pas difficile de voir que

$$\big|\eta_3\langle\xi_3\rangle^{2s} - \xi_3\langle\eta_3\rangle^{2s}\big| \lesssim |\eta_3-\xi_3|\big(\langle\xi_3\rangle^{2s} + \langle\eta_3\rangle^{2s}\big)\,, \tag{4}$$

ce qui encore par symétrie implique que

$$|A| \lesssim \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |\xi_3-\eta_3|\,|\hat{a}^3(\xi-\eta)|\langle\xi_3\rangle^{2s}\,|\hat{b}(\eta)|\,|\hat{b}(-\xi)|\,d\xi\,d\eta\,.$$

La divergence nulle de a implique que

$$|\xi_3-\eta_3|\,|\hat{a}^3(\xi-\eta)| \le |\xi_1-\eta_1|\,|\hat{a}^1(\xi-\eta)| + |\xi_2-\eta_2|\,|\hat{a}^2(\xi-\eta)|\,,$$

ce qui donne finalement

$$\big|(a^3\,\partial_3 b \mid b)_{H^s(\mathbb{R})}\big| \lesssim \|\nabla_h\, a^h\|_{H^s(\mathbb{R})}\|b\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\,, \tag{5}$$

en utilisant encore une fois le fait que $H^s(\mathbb{R})$ est une algèbre dès que $s > \frac{1}{2}$.

Retournons à présent à l'estimation d'énergie (1). En utilisant (2) et (5), il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h v\|^2_{H^{0,s}} \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla_h v(x_h,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\|v(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\,dx_h\,. \tag{6}$$

Soit maintenant $f(x_h) \stackrel{\text{déf}}{=} \|v(x_h,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R})}$. Alors les injections de Sobolev impliquent que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla_h f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\,. \end{aligned}$$

Mais
$$\nabla_h f = 2\big(\nabla_h v(x_h,\cdot) \mid v(x_h,\cdot)\big)_{H^s(\mathbb{R})},$$
donc
$$\|\nabla_h f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla_h v(x_h,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})} \|v(x_h,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}\, dx_h\,.$$
Finalement, on a
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|v\|^2_{H^{0,s}} + \|v\|_{H^{0,s}} \|\nabla_h v\|_{H^{0,s}}\,,$$
ce qui en retournant à (6) permet d'écrire que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h v\|^2_{H^{0,s}} \lesssim \|\nabla_h v\|_{H^{0,s}}\big(\|v\|^2_{H^{0,s}} + \|v\|_{H^{0,s}}\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}}\big)\,,$$
ou encore
$$\frac{d}{dt}\|v\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h v\|^2_{H^{0,s}} \lesssim \|v\|^4_{H^{0,s}} + \|v\|_{H^{0,s}}\|\nabla_h v\|^2_{H^{0,s}}\,.$$
On conclut aisément, dans le cas de données initiales assez petites devant la viscosité ν.

Passons maintenant au cas de données générales. On écrit dans ce cas la solution v comme
$$v(t) = e^{\nu t\,\Delta_h}\, v_{0,N} + w_N(t)\,,$$
où l'on a noté $v_{0,N} = \chi\big(\frac{|D|}{N}\big)\, v_0$, $\chi \equiv 1$ près de 0, $\chi \in C^\infty_c([0,1])$. Alors $u_N(t) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{\nu t\,\Delta_h}\, v_{0,N}$ vérifie évidemment $u_N \in C^0_b(\mathbb{R}^+, H^{0,s})$ et $\nabla_h u_N \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{0,s})$, uniformément en N, et comme u_N est à fréquences dans une boule fixe, elle est en outre dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ $\forall s$, quitte à payer par des puissances suffisamment grandes de N.

L'intérêt d'un tel découpage est que w_N vérifie l'équation
$$\partial_t w_N - \nu\,\Delta_h w_N + \mathbb{P}(w_N\,\nabla w_N) = -\mathbb{P}(w_N\cdot\nabla u_N + u_N\cdot\nabla w_N)$$
avec une donnée initiale $(\mathrm{Id} - \chi_N)\, v_0$, arbitrairement petite dans $H^{0,s}$ pourvu que N soit assez grand. Les calculs précédents permettent alors d'écrire que
$$\begin{aligned}(7)\qquad \frac{d}{dt}\|w_N\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h w_N\|^2_{H^{0,s}} &\leq \|w_N\|_{H^{0,s}}\big(\|w_N\|^3_{H^{0,s}} + \|\nabla_h w_N\|_{H^{0,s}}\big)\\ &+\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\Lambda_3^{s/2}(w_N\cdot\nabla u_N + u_N\cdot\nabla w_N)\,\Lambda_3^{s/2}\, w_N(x_h,x_3)\,dx_h\,dx_3\Big|.\end{aligned}$$
La fonction u_N étant arbitrairement régulière, le deuxième terme du membre de droite de (5) s'estime par
$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\Lambda_3^{s/2}(w_N\cdot\nabla u_N + u_N\cdot\nabla w_N)\,\Lambda_3^{s/2}\, w_N(x_h,x_3)\,dx_h\,dx_3\Big|&\\ \leq C(N)\,\|w_N\|^2_{H^{0,s}}\,\|v_0\|_{H^{0,s}}\,,&\end{aligned}$$

où $C(N)$ est une constante dépendant de N.

Le lemme de Gronwall permet de conclure : on obtient une solution w_N sur un temps dépendant de $C(N)$. Nous laissons les détails au lecteur.

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à montrer l'unicité des solutions de(NS_ν). Si v_1 et v_2 sont deux solutions de (NS_ν), et si $w \stackrel{\text{déf}}{=} v_1 - v_2$, la méthode de D. Iftimie [I2] pour montrer que w est nulle consiste à évaluer sa norme dans $H^{0,-\frac{1}{2}}$ (dans [CDGG1], on évalue sa norme dans $H^{0,\frac{1}{2}}$, ce qui nécessite de prendre une donnée initiale dans $H^{0,s}$ avec $s > \frac{3}{2}$).

Nous n'allons pas donner tous les détails des calculs ici. En multipliant l'équation vérifiée par w par la quantité $\Lambda_3^{-1} w$ et en intégrant sur $[0,t] \times \mathbb{R}^3$, il vient

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad \|w(t)\|^2_{H^{0,-\frac{1}{2}}} &+ 2\nu \int_0^t \|\nabla_h w(s)\|^2_{H^{0,-\frac{1}{2}}}\, ds \\
&= -\, 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} v_1(t',x) \cdot \nabla w(t',x) \cdot \Lambda_3^{-1} w(t',x)\, dt'\, dx \\
&\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} w(t',x) \cdot \nabla v_2(t',x) \cdot \Lambda_3^{-1} w(t',x)\, dt'\, dx .
\end{aligned}
$$

Le premier terme du membre de droite se majore de manière analogue au cas précédent : le terme

$$
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} v_1^h \cdot \nabla_h w\, \Lambda_3^{-1} w(s,x)\, ds\, dx
$$

se majore aisément, en utilisant le fait que (voir [I2])

$$
\|v_1^h \cdot \nabla_h w\|_{H^{0,-\frac{1}{2}}} \lesssim \|\nabla_h v_1\|_{H^{0,s}} \|\nabla_h w\|_{H^{0,-\frac{1}{2}}}
$$

dès que $s > \frac{1}{2}$. Pour le terme contenant $v_1^3 \partial_3 w$, on utilise le même type de calcul que pour estimer (3), en remplaçant (4) par

$$
\Big| \frac{\eta_3}{\langle \xi_3 \rangle} - \frac{\xi_3}{\langle \eta_3 \rangle} \Big| \leq |\eta_3 - \xi_3| \Big(\frac{1}{\langle \eta_3 \rangle} + \frac{1}{\langle \xi_3 \rangle} \Big).
$$

Enfin, le second terme du membre de droite de (8) s'estime de la manière suivante : la partie contenant $w^h \cdot \nabla_h v_2$ s'estime comme précédemment, et celle contenant $w^3 \partial_3 v_2$ s'estime (voir [I2]) par

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} w^3\, \partial_3 v_2\, \Lambda_3^{-1} w\, dx \\
&\qquad \lesssim \Big(\|w\|^{3/2}_{H^{0,-\frac{1}{2}}} \|\nabla_h w\|^{1/2}_{H^{0,-\frac{1}{2}}} + \|w\|^{1/2}_{H^{0,-\frac{1}{2}}} \|\nabla_h w\|^{3/2}_{H^{0,-\frac{1}{2}}} \Big) \cdot \|v\|^{1/2}_{H^{0,s}} \|\nabla_h v\|^{1/2}_{H^{0,s}} .
\end{aligned}
$$

La fin des calculs est maintenant classique et laissée au lecteur. ■

II. Démonstration du théorème 2

Nous n'allons pas démontrer ce théorème dans son intégralité, mais simplement donner les étapes principales de la démonstration.

1ère étape. Estimations de Strichartz sur w_L^ε.

Rappelons que w_L^ε est la solution du système linéarisé (FTL^ε). On peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit* $\mathcal{C}_R \stackrel{\text{déf}}{=} \big\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid R^{-1} \leq |\xi_3| \leq R \text{ et } R^{-1} \leq |\xi_h| \leq R\big\}$. *Alors si* $\operatorname{supp} \hat{w}_0 \subset \mathcal{C}_R$, *on a*

$$\|w_L^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^+, L^{\infty,2}_{x_h,x_3})} \leq C_R \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad \forall p \in [1,\infty].$$

Remarques.

1) On a noté

$$\|f\|_{L^{p,q}_{x_h,x_3}} \stackrel{\text{déf}}{=} \big\| \|f(x_h,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R})}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

2) Ce résultat est l'analogue (anisotrope) des estimations de Strichartz usuelles pour l'équation des ondes. Le fait qu'il n'y a pas de restriction sur l'indice p d'intégrabilité en temps est dû à la présence de la viscosité horizontale. Nous renvoyons à [CDGG1,2] pour la démonstration de ce type d'estimation.

2ème étape. Réduction à des fréquences fixes.

Nous pouvons remplacer, dans la démonstration du théorème 2, la fonction w_L^ε par

$$\tilde{w}_L^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} \chi\Big(\frac{|D_h|}{R}\Big)\chi\Big(\frac{|D_3|}{R}\Big)\big(\mathrm{Id} - \chi(R|D_h|)\big)\big(\mathrm{Id} - \chi(R|D_3|)\big) w_L^\varepsilon,$$

puisque clairement

$$\|\tilde{w}_L^\varepsilon - w_L^\varepsilon\|_{H^{0,s}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \text{ uniformément en } t,$$

et

$$\|\nabla_h(\tilde{w}_L^\varepsilon - w_L^\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^{0,s})} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

On considère alors

$$w^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} v^\varepsilon - \overline{u} - \tilde{w}_L^\varepsilon,$$

où $\overline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u} - \nu\Delta_h \overline{u} + \mathbb{P}(\overline{u}^h \cdot \nabla_h \overline{u}) = 0 \\ \operatorname{div}_h \overline{u} = 0 \\ \overline{u}|_{t=0} = \overline{u}_0. \end{cases}$$

La fonction w^ε vérifie alors l'équation suivante :

$$\partial_t w^\varepsilon - \nu \Delta_h w^\varepsilon - \nu' \partial_3^2 w^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} w^\varepsilon \times e_3 = -\nabla p^\varepsilon + \sum_{j=1}^{3} F_j^\varepsilon ,$$

où

$$\begin{aligned} F_1^\varepsilon &= -w^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon - \overline{u} \cdot \nabla w^\varepsilon - w^\varepsilon \cdot \nabla \overline{u} - w^\varepsilon \cdot \nabla \tilde{w}_L^\varepsilon - \tilde{w}_L^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon \\ F_2^{\varepsilon,k} &= -\operatorname{div}_h(\tilde{w}_L^{\varepsilon,k} \overline{u}^h) - \operatorname{div}_h(\overline{u}^k \tilde{w}_L^\varepsilon) - \operatorname{div}_h(\tilde{w}_L^{\varepsilon,k} \tilde{w}_L^{\varepsilon,h}) \\ F_3^{\varepsilon,k} &= -\overline{u}^3 \partial_3 \tilde{w}_L^{\varepsilon,k} - \overline{u}^k \partial_3 \tilde{w}_L^{\varepsilon,3} - \partial_3(\tilde{w}_L^{\varepsilon,k} \tilde{w}_L^{\varepsilon,3}) . \end{aligned}$$

La donnée initiale $w^\varepsilon|_{t=0}$ étant arbitrairement petite dans $H^{0,s}$, il suffit à présent d'estimer F_j^ε dans $H^{0,s}$. Nous n'allons pas écrire le détail des estimations (voir [CDGG1]) ; le terme F_1^ε s'estime essentiellement comme le terme convectif de la section précédente. La proposition 1 permet d'estimer F_2^ε, et pour majorer F_3^ε, on utilise le fait que $\tilde{w}_L^\varepsilon$ a un spectre localisé.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}}^2 + \nu \|\nabla_h w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}}^2 &\lesssim \Phi(t) \|w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}}^2 + G(t) \\ &\quad + \|\nabla_h w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}}^2 \big(1 + \|w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}} + \|w^\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}}^2\big) , \end{aligned}$$

où

$$\Phi(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|\nabla_h \overline{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\nabla_h \tilde{w}_L^\varepsilon\|_{H^{0,s}}^2 + \|\tilde{w}_L^\varepsilon\|_{H^{\frac{1}{2},s}}^4 + C_R \|\tilde{w}_L^\varepsilon\|_{L^{\infty,2}_{x_h,x_3}} \in L^1(\mathbb{R}^+) ,$$

et où

$$G(t) \stackrel{\text{déf}}{=} C_R \|\tilde{w}_L^\varepsilon\|_{L^{\infty,2}_{x_h,x_3}} \big(\|\tilde{w}_L^\varepsilon\|_{L^{\infty,2}_{x_h,x_3}} + \|w(t)\|_{H^{0,s}} \big) .$$

On conclut par un lemme de Gronwall. Nous renvoyons à [CDGG1] pour les détails. ■

Bibliographie

[CDGG1] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier : *Fluids with anisotropic viscosity,* Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, **34** (2000), 315–335.

[CDGG2] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier : *Anisotropy and dispersion in rotating fluids,* Actes du Séminaire d'Analyse Non Linéaire, Collège de France et Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **329**, Série 1, (1999), 1055–1058.

[D] R. Danchin : *Zero Mach number limit for compressible Navier-Stokes equations,* à paraître, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

[DG] B. Desjardins and E. Grenier : *Low Mach number limit of compressible flows in the whole space,* Proceedings of the Royal Society of London, **455** (1999), 2271–2279.

[FK] H. Fujita and T. Kato : *On the Navier-Stokes initial value problem I,* Archive for Rational and Mechanical Analysis, **16** (1964), 269–315.

[Gr] H.P. Greenspan : *The theory of rotating fluids,* Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, 1969.

[I1] D. Iftimie : *The resolution of the Navier-Stokes equations in anisotropic spaces,* Revista Matematica Ibero-Americana, **15** (1999), 1–36.

[I2] D. Iftimie : *A uniqueness result for the Navier-Stokes equations with vanishing vertical viscosity,* soumis.

[Le] J. Leray : *Essai pour le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace,* Acta Matematica, **63** (1933), 193–248.

[Pe] J. Pedlosky : *Geophysical fluid dynamics,* Springer, 1979.

[Uk] S. Ukai : *The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equations,* J. Math. Kyoto Univ., **26**, n^{o} 2, (1986), 323–331.

J.-Y. Chemin : Laboratoire d'Analyse Numérique, CNRS UMR 7598, Université Paris VI, 75005 Paris, FRANCE

B. Desjardins : Commissariat à l'Energie Atomique, CEA/DIS, BP 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, FRANCE

I. Gallagher : Département de Mathématiques, CNRS UMR 8628, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, FRANCE

E. Grenier : UMPA, CNRS UMR 5669, ENS Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, FRANCE