

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

COURS DE M1 2007/8, UNIVERSITÉ PARIS VI

Jan Nekovář

<http://www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/ag/>

INTRODUCTION

Dans ce cours on va étudier quelques structures algébriques d'origine géométrique. Selon Felix Klein (1849–1925), une géométrie est caractérisée par l'ensemble \mathcal{T} des transformations géométriques autorisées. En choisissant un système des coordonnées, on peut écrire \mathcal{T} sous une forme matricielle. Du point de vue dual, on peut considérer les quantités géométriques qui sont invariantes par rapport à \mathcal{T} . Voici trois exemples classiques :

Géométrie (en dimension n)	Transformations géométriques	Groupes matriciels	Invariants géométriques
Euclidienne	isométries	$O(n)$ (+ translations)	produit scalaire $(x y)$ (\implies distance, angle, volume)
Affine	$\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ σ_i projection parallèle	$GL(n)$ (+ translations)	rapport $\frac{CA}{CB}$ A, B, C alignés
Projective	$\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$ σ_i projection centrale	$PGL(n+1)$	birapport $\frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA}$ A, B, C, D alignés

On peut aussi associer une géométrie (et un groupe matriciel “classique”) à une forme bilinéaire ou hermitienne. Par exemple, le produit scalaire euclidien

$$B(x, y) = (x | y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

est invariant par rapport au groupe *orthogonal*

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid (\forall x, y \in \mathbf{R}^n) (Ax | Ay) = (x | y)\}.$$

Plus généralement, si K est un corps et V un K -espace vectoriel, un “produit”

$$B : V \times V \longrightarrow K$$

est invariant par rapport au groupe

$$G = \{A \in GL(V) \mid (\forall x, y \in V) B(Ax, Ay) = B(x, y)\} \subset GL(V).$$

Produit	$x, y \in V$	$B(x, y)$	$G \subset GL(V)$
euclidien	$x, y \in \mathbf{R}^n$	$\sum_{j=1}^n x_j y_j$ $B(y, x) = B(x, y)$	$O(n) \subset GL_n(\mathbf{R})$ groupe orthogonal
hermitien	$x, y \in \mathbf{C}^n$	$\sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ $B(y, x) = \overline{B(x, y)}$	$U(n) \subset GL_n(\mathbf{C})$ groupe unitaire
symplectique	$x, y \in K^{2n}$	$\sum_{j=1}^n (x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j)$ $B(y, x) = -B(x, y)$	$Sp(2n, K) \subset GL_{2n}(K)$ groupe symplectique
pseudoeuclidien	$x, y \in \mathbf{R}^{p+q}$	$\sum_{j=1}^p x_j y_j - \sum_{k=1}^q x_{p+k} y_{p+k}$	$O(p, q) \subset GL_{p+q}(\mathbf{R})$

Le groupe symplectique $Sp(2n, \mathbf{R})$ apparaît naturellement dans l'étude des symétries des équations fondamentales d'optique linéaire et de mécanique classique.

La géométrie "hyperbolique" associée au groupe $O(p, 1)$ et à la forme quadratique $B(x, x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2$ est liée à la théorie de la relativité.

Dans la partie géométrique de ce cours on va concentrer sur les fondements de la géométrie affine et projective. Dans la partie algébrique on va étudier les propriétés des produits bilinéaires (ou hermitiens) et des groupes matriciels associés (en particulier, on va approfondir ce qu'on a fait dans le cours LM 223; voir [N]).

La référence principale pour la partie géométrique (resp. algébrique) de ce cours est le livre [L] (resp. [P]). Le livre [B] est plutôt destiné aux amateurs de géométrie avancée.

1. Géométrie affine

Notation : Fixons un corps K (commutatif). On dira souvent "espace vectoriel" au lieu de " K -espace vectoriel". On représente un élément $x \in K^n$ comme un vecteur **colonne**

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t(x_1, \dots, x_n).$$

On note $M_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans K . Toute matrice $A \in M_{m,n}(K)$ définit une application linéaire

$$K^n \longrightarrow K^m, \quad x \mapsto Ax.$$

Si $m = n$, on pose $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

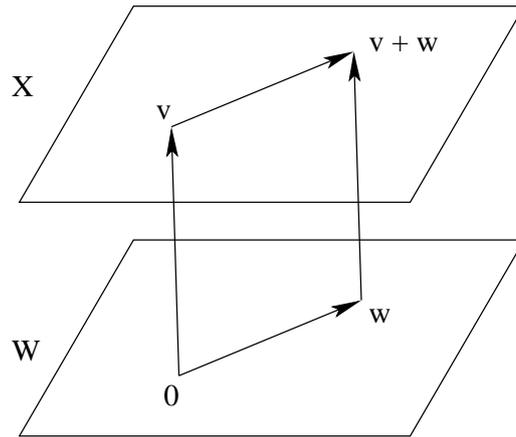
1.1 Espaces affines : exemples et définitions

Quelle est la différence entre un espace affine et un espace vectoriel? Un espace affine est un espace "linéaire" qui n'a aucun point distingué; par contre, l'origine $\vec{0}$ est un point distingué de tout espace vectoriel.

(1.1.1) Définition naïve. Soit V un espace vectoriel. Un **sous-espace affine de V** est un translaté d'un sous-espace vectoriel, i.e. un sous-ensemble

$$X = v + W := \{v + w \mid w \in W\} \subset V,$$

où $v \in V$ et W est un sous-espace vectoriel de V .



Pour tout $x \in X$, on a $x - v \in W$, donc

$$X = v + W = v + (x - v + W) = x + W;$$

en particulier, v n'est pas unique (sauf si $W = \{\vec{0}\}$ et $X = \{v\}$). Par contre, l'espace vectoriel

$$W = \{y - x \mid x, y \in X\}$$

est déterminé par X .

(1.1.2) Exemple. Soient $V = K^n$, $A \in M_{m,n}(K)$ et $b \in K^m$. Si l'ensemble des solutions

$$X = \{x \in K^n \mid Ax = b\} \subset V$$

du système linéaire non-homogène

$$\begin{array}{cccc} A_{11}x_1 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

n'est pas vide (i.e. si $\exists v \in X$), alors

$$X = v + W,$$

où

$$W = \{w \in K^n \mid Aw = 0\} \subset V$$

est l'ensemble des solutions du système homogène associé

$$\begin{array}{cccc} A_{11}x_1 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}x_1 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & 0. \end{array}$$

(1.1.3) En général, si $X = v + W$ est un sous-espace affine de V , alors on a

$$\begin{array}{l} (\forall x \in X) (\forall w \in W) \quad x + w \in X \\ (\forall x, y \in X) (\exists! w \in W) \quad x + w = y. \end{array}$$

Ces propriétés admettent une formulation intrinsèque (= indépendante de V); voir 1.1.5 ci-dessous.

(1.1.4) **Rappel.** Une **action** (ou une **opération**) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$G \times X \longrightarrow X$$

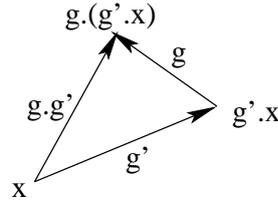
$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

telle que

$$g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x \quad (\forall g, g' \in G) (\forall x \in X)$$

$$e \cdot x = x \quad (\forall x \in X)$$

(où $e \in G$ est l'élément neutre de G).



Exemple : $X = \{1, \dots, n\}$, $G = S_n$ le groupe symétrique (= le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$).

L'**orbite** d'un élément $x \in X$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X.$$

Le **stabilisateur** de $x \in X$ est le groupe

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G.$$

Une formule utile : Si $|G| < \infty$, alors on a $|G| = |\mathcal{O}(x)| \cdot |G_x|$. Par exemple, si $X = \{1, \dots, n\}$, $G = S_n$ et $x = n$, alors on a $\mathcal{O}(x) = X$ et $G_x = S_{n-1}$, d'où $|S_n| = n \cdot |S_{n-1}|$ (donc $|S_n| = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$, par récurrence).

L'action est **transitive** si

$$(\forall x, y \in X) (\exists g \in G) \quad g \cdot x = y$$

$$(\iff (\forall x \in X) \quad \mathcal{O}(x) = X \iff (\exists x \in X) \quad \mathcal{O}(x) = X);$$

elle est **libre** si

$$(\forall x \in X) \quad G_x = \{e\}.$$

En particulier, l'action est **transitive et libre** si

$$(\forall x, y \in X) (\exists! g \in G) \quad g \cdot x = y.$$

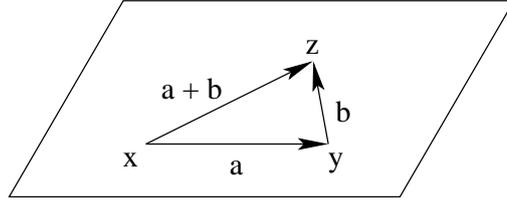
(1.1.5) **Définition abstraite.** Un **espace affine** est un ensemble X muni d'une action transitive et libre d'un espace vectoriel \vec{X} , i.e. on a une application "addition"

$$X \times \vec{X} \longrightarrow X$$

$$(x, \vec{a}) \mapsto x + \vec{a}$$

telle que

$$\begin{aligned}
x + \vec{0} &= x & (\forall x \in X) \\
(x + \vec{a}) + \vec{b} &= x + (\vec{a} + \vec{b}) & (\forall x \in X)(\forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{X}) \\
(\forall x, y \in X)(\exists! \vec{a} \in \vec{X}) \quad x + \vec{a} &= y.
\end{aligned}$$



Un élément de X (resp., de \vec{X}) est un **point** (resp., un **vecteur**).

(1.1.6) Terminologie. On dit que “ X est un espace affine de direction \vec{X} ”. On note \vec{xy} le vecteur \vec{a} tel que $x + \vec{a} = y$ (donc $x + \vec{xy} = y$ and $\vec{xy} + \vec{yz} = \vec{xz}$). Moralement, on a $\vec{xy} = y - x$; cette notation sera justifiée en 1.2.14 ci-dessous. On définit $\dim(X) = \dim(\vec{X})$ et on dit que X est un point (resp. une droite affine, resp. un plan affine) si $\dim(X) = 0$ (resp. $\dim(X) = 1$, resp. $\dim(X) = 2$).

(1.1.7) Exemples : (i) Un espace vectoriel V a une structure naturelle d’un espace affine (avec $\vec{V} = V$).
(ii) Un sous-espace affine $X = v + W$ d’un espace vectoriel est un espace affine (avec $\vec{X} = W$ et la somme $x + \vec{a}$ calculée dans V ; en particulier, on a $(\forall x, y \in X) \quad \vec{xy} = y - x$, où on calcule $y - x$ dans V).
(iii) Si X et Y est un espace affine, alors $X \times Y$ est aussi un espace affine (avec $\vec{X \times Y} = \vec{X} \times \vec{Y}$).

(1.1.8) On verra en 1.2.14 ci-dessous que tout espace affine X s’écrit naturellement comme un sous-espace affine d’un espace vectoriel \widehat{X} de dimension $\dim(\widehat{X}) = \dim(X) + 1$.

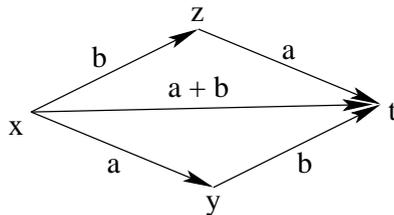
(1.1.9) Choix d’origine. Soit X un espace affine; fixons un point $x \in X$. L’application

$$X \longrightarrow \vec{X}, \quad y \mapsto \vec{xy}$$

est bijective (son inverse étant $\vec{a} \mapsto x + \vec{a}$), donc on peut munir X d’une structure d’espace vectoriel “par transport de structure”. L’espace vectoriel ainsi obtenu (le **vectorialisé** de X en x) sera noté X_x . Par définition, si $y, z, t \in X$, alors on a

$$y + z = t \text{ dans } X_x \iff \vec{xy} + \vec{xz} = \vec{xt}.$$

En particulier, x est l’origine de X_x (comme $\vec{xx} = \vec{0}$).



(1.1.10) Coordonnées cartésiennes (= coordonnées “usuelles”). Fixons une “origine” $x \in X$ et une base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ de \vec{X} (où $n = \dim(X)$); ceci nous permet d’identifier

$$\begin{aligned}
X &\longleftrightarrow \vec{X} & K^n &\longleftrightarrow \vec{X} \\
y &\mapsto \vec{xy} & {}^t(t_1, \dots, t_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n t_i \vec{e}_i.
\end{aligned}$$

En particulier, le vecteur ${}^t(t_1, \dots, t_n)$ correspond au point

$$y = x + \sum_{i=1}^n t_i \vec{e}_i \in X.$$

Les scalaires $t_1, \dots, t_n \in K$ sont les **coordonnées cartésiennes** de y (par rapport au système des coordonnées choisi).

1.2 Sous-espaces affines

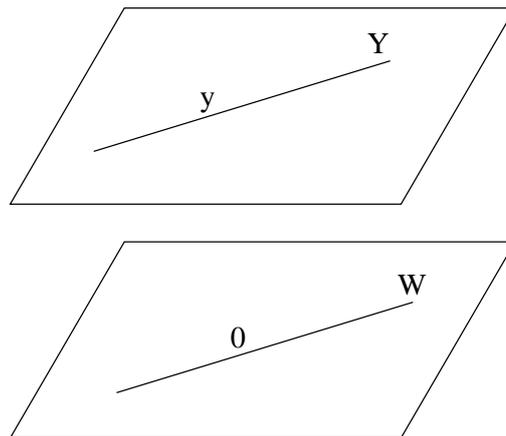
(1.2.1) Définition. Soit X un espace affine. Un **sous-espace affine** $Y \subset X$ est un sous-ensemble qui s'écrit sous la forme

$$Y = y + W = \{y + \vec{a} \mid \vec{a} \in W\},$$

où $y \in Y$ et W est un sous-espace vectoriel de \vec{X} . L'ensemble Y a une structure naturelle d'espace affine de direction $\vec{Y} = W$ et on a, pour tout point $z \in Y$,

$$z + W = (y + \vec{y}z) + W = y + (\vec{y}z + W) = y + W = Y.$$

Si $\dim(Y) = \dim(X) - 1 < \infty$ (resp., $\dim(Y) = 1$), alors on dit que Y est un **hyperplan (affine)** (resp., une **droite (affine)**) dans X .



(1.2.2) Définition. Soient $Y, Z \subset X$ des sous-espaces affines de X . On dit que Y est **faiblement parallèle** à Z si $\vec{Y} \subset \vec{Z}$. On dit que Y et Z sont **parallèles** si $\vec{Y} = \vec{Z}$ (notation : $Y \parallel Z$).

(1.2.3) Équation paramétrisée. Soit $Y \subset X$ un sous-espace affine de dimension $\dim(Y) = m < \infty$. Fixons un point $y \in Y$ et une base $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ de \vec{Y} ; alors on a

$$Y = \{y + t_1 \vec{a}_1 + \dots + t_m \vec{a}_m \mid t_i \in K\}.$$

Par exemple, une droite affine s'écrit comme

$$Y = \{y + t\vec{a} \mid t \in K\}$$

(où $\vec{a} \neq \vec{0}$).

(1.2.4) Rappel. Si $W_1, W_2 \subset V$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V , alors $W_1 \cap W_2$ est

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

sont aussi des sous-espaces vectoriels de V . Si $\dim(W_i) < \infty$ ($i = 1, 2$), alors

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Si $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, alors tout élément $w \in W_1 + W_2$ admet une décomposition **unique** $w = w_1 + w_2$ ($w_i \in W_i$); on écrit $W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2$ dans ce cas. Si, de plus, $W_1 + W_2 = V$, on dit que W_1 et W_2 sont **supplémentaires**.

(1.2.5) Proposition (Intersection des sous-espaces affines). Soient $Y = y + \vec{Y}$, $Z = z + \vec{Z}$ des sous-espaces affines d'un espace affine X .

(i) Si $W := Y \cap Z$ n'est pas vide, alors $(\forall w \in W) W = w + (\vec{Y} \cap \vec{Z})$; en particulier, W est un sous-espace affine de X de direction $\vec{W} = \vec{Y} \cap \vec{Z}$.

(ii) W n'est pas vide $\iff y\vec{z} \in \vec{Y} + \vec{Z}$.

Preuve. (i) Si $w \in W$, alors $Y = w + \vec{Y}$ et $Z = w + \vec{Z}$, donc $Y \cap Z = w + (\vec{Y} \cap \vec{Z})$.

(ii) Un point $w \in X$ est contenu dans $Y \cap Z \iff (\exists \vec{a} \in \vec{Y})(\exists \vec{b} \in \vec{Z}) w = y + \vec{a} = z + \vec{b}$. On a

$$y + \vec{a} = z + \vec{b} \iff y + (\vec{a} - \vec{b}) = z \iff y\vec{z} = \vec{a} - \vec{b},$$

donc w correspond à une décomposition $y\vec{z} = \vec{a} - \vec{b}$ ($\vec{a} \in \vec{Y}, \vec{b} \in \vec{Z}$), ce qui est possible $\iff y\vec{z} \in \vec{Y} + \vec{Z}$.

(1.2.6) Corollaire. (i) Si $\vec{Y} + \vec{Z} = \vec{X}$, alors $Y \cap Z \neq \emptyset$.

(ii) Si $\vec{Y} \oplus \vec{Z} = \vec{X}$, alors $Y \cap Z$ est un point.

(iii) Si Y est faiblement parallèle à Z , alors soit $Y \cap Z = \emptyset$, soit $Y \subset Z$.

(iv) Si Y et Z sont parallèles, alors soit $Y \cap Z = \emptyset$, soit $Y = Z$.

(1.2.7) Corollaire. Soit Y un sous-espace affine d'un espace affine X . Si $\dim(Y) = m$ et $\dim(X) = n < \infty$, alors il existe des hyperplans affines $H_1, \dots, H_{n-m} \subset X$ tels que $Y = H_1 \cap \dots \cap H_{n-m}$.

Preuve. On a $Y = y + \vec{Y}$; comme $\dim(\vec{Y}) = m \leq n = \dim(\vec{X})$, il existe des hyperplans vectoriels $W_1, \dots, W_{n-m} \subset \vec{X}$ tels que $\vec{Y} = W_1 \cap \dots \cap W_{n-m}$; on pose $H_i = y + W_i$ ($i = 1, \dots, n - m$).

(1.2.8) Équations cartésiennes. Sous les hypothèses de 1.2.7, fixons un point $x \in X$ et une base de \vec{X} (ce qui nous permet d'identifier X à \vec{X} et d'introduire les coordonnées cartésiennes t_1, \dots, t_n dans \vec{X} ; voir 1.1.9). Un hyperplan vectoriel $W \subset \vec{X}$ est donné par une équation

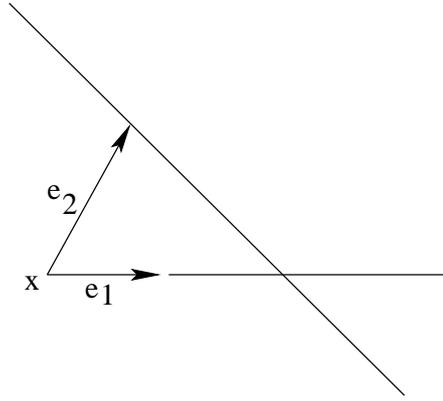
$$\sum_{i=1}^n c_i t_i = 0,$$

où $c_1, \dots, c_n \in K$ et $(\exists i)c_i \neq 0$. Il en résulte que l'hyperplan affine $H = v + W \subset \vec{X}$ est défini par l'équation

$$\sum_{i=1}^n c_i (t_i - t_i(v)) = 0 \iff \sum_{i=1}^n c_i t_i = \sum_{i=1}^n c_i t_i(v)$$

(où $t_1(v), \dots, t_n(v)$ sont les coordonnées du point $v \in \vec{X}$).

Par exemple, l'équation de la droite affine ci-dessous



est égale à

$$t_1/2 + t_2 = 1.$$

(1.2.9) Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace affine X . L'espace affine engendré par S est défini comme l'intersection de tous les sous-espaces affines de X contenant S ; c'est bien un sous-espace affine de X , que l'on note $\text{aff}(S)$. On dit que S est une **partie génératrice** de $\text{aff}(S)$.

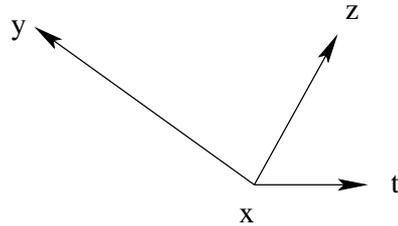
Pour déterminer $\text{aff}(S)$, fixons un point $x \in S$; alors on a

$$\text{aff}(S) = x + \overrightarrow{\text{aff}(S)},$$

où

$$\overrightarrow{\text{aff}(S)} = \text{vect}(\vec{xy} \mid y \in S)$$

est le sous-espace vectoriel de \vec{X} engendré par les vecteurs \vec{xy} ($y \in S$).

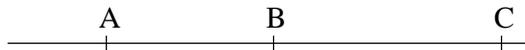


(1.2.10) **Exemple :** Si $A, B \in X$ ($A \neq B$) sont deux points distincts d'un espace affine X , alors

$$Y := \text{aff}(A, B) = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} = B + (1 - \lambda) \overrightarrow{BA} \mid \lambda \in K\}$$

est une droite affine de direction $\vec{Y} = K \cdot \overrightarrow{AB}$.

Soit $C \in Y$ un point de Y , $C \neq B$.



Fixons une base \vec{e} de \vec{Y} ; alors on a

$$\overrightarrow{CA} = s\vec{e}, \quad \overrightarrow{CB} = t\vec{e} \quad (s \in K, t \in K - \{0\}, s \neq t).$$

Définition : On dit que C **divise** AB **dans le rapport**

$$\alpha = \frac{CA}{CB} := \frac{s}{t} \in K - \{1\}$$

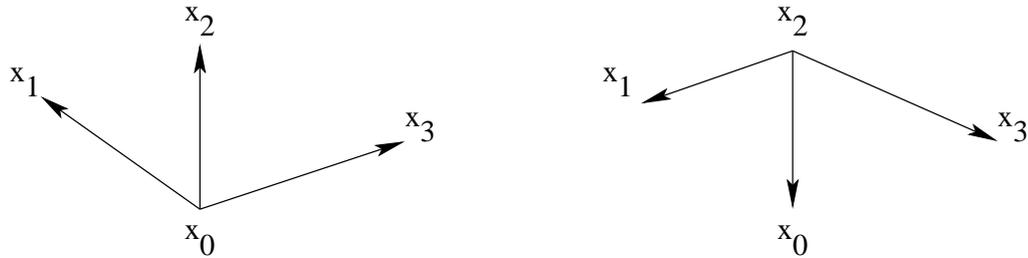
(ce qui ne dépend pas du choix de \vec{e}).

Par exemple, $C = A \iff \alpha = 0$; C est au milieu de $AB \iff \alpha = -1$. En général, si $C = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \neq 1$), alors on a

$$\overrightarrow{CA} = -\lambda \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CB} = (1 - \lambda) \overrightarrow{AB} \implies \alpha = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \implies \lambda = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

(1.2.11) **Exemple** : Si $S = \{x_0, \dots, x_n\} \subset X$ ($n \geq 1$), alors on a, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\text{aff}(x_0, \dots, x_n) = x_i + \text{vect}(\overrightarrow{x_i x_0}, \dots, \overrightarrow{x_i x_{i-1}}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_i x_n}).$$



En particulier, l'espace vectoriel

$$\text{vect}(\overrightarrow{x_i x_0}, \dots, \overrightarrow{x_i x_{i-1}}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_i x_n}) = \overrightarrow{\text{aff}(x_0, \dots, x_n)}$$

ne dépend pas de i .

Un élément de $\text{aff}(x_0, \dots, x_n)$ s'appelle une **combinaison affine** des points x_0, \dots, x_n . Pour $x \in X$, on a

$$x \in \text{aff}(x_0, \dots, x_n) \iff (\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K) \quad x = x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}.$$

Si c'est le cas, alors on a

$$\overrightarrow{x_0 x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i},$$

ce qui entraîne que

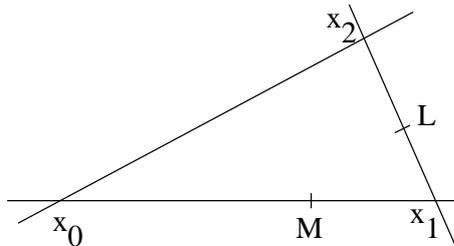
$$(\forall u \in X) \quad \overrightarrow{ux} = \overrightarrow{ux_0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{ux_i} - \overrightarrow{ux_0}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{ux_i},$$

où on a posé $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$, donc

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Si l'on utilise cet écriture, les rôles des points x_i sont symétriques; aucun parmi ces points n'est privilégié. Si les points x_i sont "indépendants", on appelle $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les **coordonnées barycentriques** de x ; voir 1.3.9 ci-dessous.

Voici un exemple pour $n = 2$:



Point	λ_0	λ_1	λ_2
x_0	1	0	0
x_1	0	1	0
x_2	0	0	0
L	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

Notation : On va noter abusivement

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$$

le point

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i}.$$

Cette notation est justifiée par l'énoncé suivant (et 1.2.14 ci-dessous).

(1.2.12) Proposition. *Supposons que $X = v + W \subset V$ est un sous-espace affine d'un espace vectoriel V . Alors on a, si $x_0, \dots, x_n \in X$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$,*

$$x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i,$$

où $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$ et la somme à droite est calculée dans V . En particulier, on a

$$\text{aff}(x_0, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Preuve. Si $x, y \in X$, on a $\overrightarrow{x y} = y - x$ (où la différence est calculée dans V), donc

$$x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0 x_i} = x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0) = (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n) x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

(1.2.13) Résumé : Pour calculer la combinaison affine $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ (où $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$), on peut utiliser au moins deux méthodes :

(i) Calculer dans X : choisissons un point $u \in X$; alors

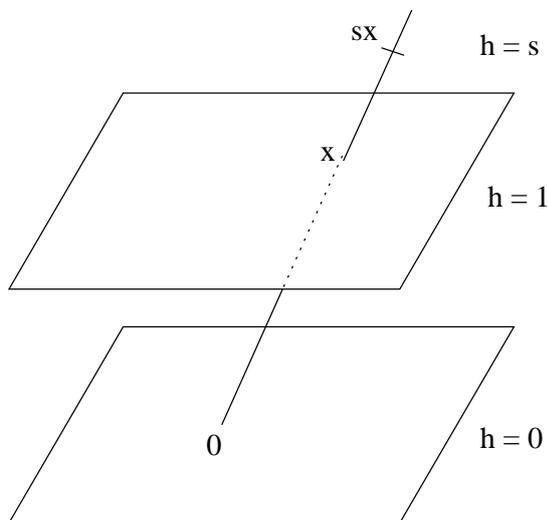
$$x = u + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{u x_i}.$$

(ii) Calculer dans un espace vectoriel V qui contient X comme un sous-espace affine :

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i.$$

(1.2.14) Proposition (Prolongement vectoriel canonique \widehat{X} de X). *Soit X un espace affine. Alors il existe un espace vectoriel \widehat{X} et une forme linéaire $h : \widehat{X} \rightarrow K$ tels que $h^{-1}(0) = \vec{X}$, $h^{-1}(1) = X$ et tels*

que les sommes $\vec{a} + \vec{b}$ dans \vec{X} (resp. $x + \vec{a}$ dans X) coïncident avec les sommes dans \widehat{X} (donc $\widehat{x}\widehat{y} = y - x$ pour tout $x, y \in X$). On a $X = x + \vec{X}$ pour tout $x \in X$; en particulier, X est un hyperplan affine dans \widehat{X} .



Preuve. On suppose d'abord que l'espace \widehat{X} existe et que $\widehat{x} \in X$. On a

$$\begin{aligned} h(\widehat{x}) = 0 &\implies \widehat{x} = \vec{a} \in \vec{X} \\ h(\widehat{x}) = s \in K - \{0\} &\implies \widehat{x} = sx, \quad h(x) = 1 \implies \widehat{x} = sx, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(1) \quad \widehat{X} = \vec{X} \cup \{sx \mid s \in K - \{0\}, x \in X\},$$

où l'on a identifié tout élément $x \in X$ à $1x \in \widehat{X}$, et que

$$(2) \quad h(\widehat{x}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \widehat{x} = \vec{a} \in \vec{X} \\ s, & \text{si } \widehat{x} = sx, s \in K - \{0\}, x \in X. \end{cases}$$

Les opérations dans \widehat{X} vérifient les propriétés suivantes :

- (3) $\widehat{x} + \widehat{y} = \vec{a} + \vec{b}$ et $t\widehat{x} = t\vec{a}$, si $\widehat{x} = \vec{b}$, $\widehat{y} = \vec{b}$, $t \in K$.
- (4) $t(sx) = \vec{0}$ (resp. $= (ts)x$) si $t = 0$ (resp. si $t \in K - \{0\}$).
- (5) $(\forall x \in X) (\forall \vec{a} \in \vec{X}) \quad x + \vec{a}$ dans $\widehat{X} = x + \vec{a}$ dans X .

Les règles (1)-(5) nous permettent de calculer la somme $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{y} + \widehat{x}$ ($\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}$) en n'utilisant que la structure d'espace affine sur X :

- (6) Si $\widehat{x} = sx$ et $\widehat{y} = \vec{a} \in \vec{X}$, alors

$$\widehat{x} + \widehat{y} = sx + \vec{a} = s \left(x + s^{-1}\vec{a} \text{ dans } \widehat{X} \right) = s \left(x + s^{-1}\vec{a} \text{ dans } X \right).$$

- (7) Si $\widehat{x} = (-t)x$, $\widehat{y} = ty$ ($x, y \in X$, $t \in K - \{0\}$), alors

$$\widehat{x} + \widehat{y} = (-t)x + ty = t \left(-x + y \text{ dans } \widehat{X} \right) = t\widehat{xy}.$$

(8) Si $\hat{x} = sx$, $\hat{y} = ty$ ($x, y \in X$, $s, t \in K - \{0\}$, $s + t \neq 0$), alors

$$\hat{x} + \hat{y} = (s + t) \left(x + \frac{t}{s+t}(y - x) \text{ dans } \hat{X} \right) = (s + t) \left(x + \frac{t}{s+t} x\vec{y} \text{ dans } X \right).$$

Maintenant on ne suppose plus que l'espace \hat{X} existe : on utilise (1) (resp. (2)) pour définir \hat{X} (resp. $h : \hat{X} \rightarrow K$). Ensuite on définit les opérations $\hat{x} + \hat{y}$, $t\hat{x}$ ($\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, $t \in K$) en utilisant les formules (3)–(8). On vérifie que \hat{X} est bien un espace vectoriel (et que h est une forme linéaire) : par exemple, l'égalité suivante (qui est valable dans X)

$$x + \frac{t}{s+t} x\vec{y} = y + y\vec{x} - \frac{t}{s+t} y\vec{x} = y + \frac{s}{t+s} y\vec{x}$$

montre que l'on a $\hat{x} + \hat{y} = \hat{y} + \hat{x}$ (au moins si $h(\hat{x}), h(\hat{y}), h(\hat{x} + \hat{y}) \neq 0$).

Les propriétés requises de \hat{X} sont satisfaites, par définition.

(1.2.15) Corollaire. Soient X un espace affine et $x_0, \dots, x_n \in X$. Alors on a

$$\text{aff}(x_0, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in K, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

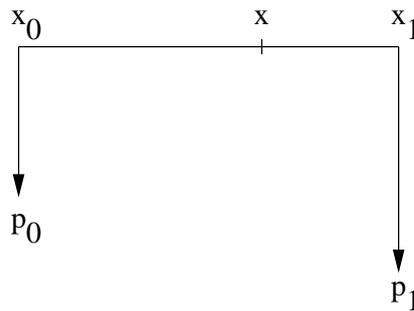
où la somme est calculée dans \hat{X} . [On a $h(\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ est effectivement contenu dans $X = h^{-1}(1) \subset \hat{X}$.]

(1.2.16) Exercice. (i) Soit D l'ensemble des droites (plans, ...) affines d'un espace affine de dimension $n \geq 2$. Quelle est la dimension de D (= le nombre de paramètres qui décrivent une droite (un plan, ...) "générique") ?

(ii) Plus généralement, soient X un espace affine de dimension $n \geq 2$ et Y un sous-espace affine de X de dimension m ($1 \leq m \leq n$). Déterminer la dimension de l'ensemble des droites affines $d \subset X$ qui sont faiblement parallèles à Y (= le nombre de paramètres qui décrivent une droite "générique" dans cet ensemble).

1.3 Barycentres, coordonnées barycentriques

(1.3.1) Barycentres (exemples). (i) Considérons un levier dont chacun bout x_i ($i = 0, 1$) porte un poids p_i . Si l'on néglige le poids du levier, alors le point d'équilibre x (le barycentre)

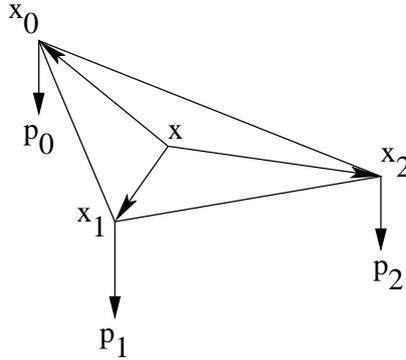


est caractérisé par l'équation d'équilibre (ou l'équation barycentrique)

$$p_0 \overrightarrow{xx_0} + p_1 \overrightarrow{xx_1} = \vec{0}.$$

Par exemple, si $p_0 = p_1$, alors x est le milieu de x_0x_1 ; si $p_1 = 2p_0$, alors $|xx_0| = \frac{2}{3}|x_0x_1|$, $|xx_1| = \frac{1}{3}|x_0x_1|$.

(ii) On peut considérer la même question en dimension supérieure. Par exemple, si chaque sommet x_i ($i = 0, 1, 2$) d'un triangle $x_0x_1x_2$ porte un poids p_i (et si l'on néglige le poids du triangle), alors le point d'équilibre x (le barycentre)



satisfait à l'équation

$$p_0 \overrightarrow{xx_0} + p_1 \overrightarrow{xx_1} + p_2 \overrightarrow{xx_2} = \vec{0}.$$

(1.3.2) Définition. Un **point pondéré** dans un espace affine X est un couple (x, p) , où $x \in X$ et $p \in K$ (on dit que p est le **poids** de x).

(1.3.3) Proposition (Barycentre = combinaison affine). Soient (x_i, p_i) ($i = 0, \dots, n$) des points pondérés dans un espace affine X . On suppose que le poids total $p = \sum_{i=0}^n p_i \neq 0$ est non nul. Alors on a :

(i) L'équation barycentrique $\sum_{i=0}^n p_i \overrightarrow{xx_i} = \vec{0}$ admet une unique solution $x \in X$; on l'appelle le **barycentre** de l'ensemble $\{(x_i, p_i) \mid i = 0, \dots, n\}$.

(ii) Posons $\lambda_i = p_i/p$ ($i = 0, \dots, n$). Alors on a

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad x = x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i},$$

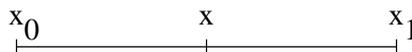
donc x est égal à la combinaison affine $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$. En particulier, on a, pour tout point $u \in X$,

$$\overrightarrow{ux} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{ux_i}.$$

Preuve. L'équation barycentrique équivaut à

$$\vec{0} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{xx_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i (\overrightarrow{x_0x_i} - \overrightarrow{x_0x}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i} - \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{x_0x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{x_0x_i} - \overrightarrow{x_0x}.$$

(1.3.4) Exemple : Si $K = \mathbf{R}$ et $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n+1}$, on appelle x l'**isobarycentre** des points x_0, \dots, x_n . Par exemple, si $n = 1$, alors x est le milieu du segment x_0x_1 .



(1.3.5) Proposition (Associativité des barycentres). Le barycentre x d'un ensemble fini de points pondérés $\{(x_i, p_i) \mid i \in I\}$ (où $\sum_{i \in I} p_i \neq 0$) ne change pas si l'on remplace un sous-ensemble $\{(x_j, p_j) \mid j \in J \subset I\}$ (dont le poids total $p = \sum_{j \in J} p_j \neq 0$ est non nul) par son barycentre y et son poids total p .

Preuve. L'équation barycentrique de l'ensemble original

$$\vec{0} = \sum_{i \in I} p_i \overrightarrow{xx_i}$$

s'écrit comme

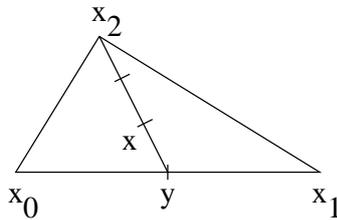
$$\vec{0} = \sum_{j \in J} p_j \overrightarrow{xx_j} + \sum_{i \in I-J} p_i \overrightarrow{xx_i} = p \overrightarrow{xy} + \sum_{i \in I-J} p_i \overrightarrow{xx_i},$$

ce qui entraîne que x coïncide avec le barycentre de l'ensemble $\{(x_i, p_i) \mid i \in I - J\} \cup \{(y, p)\}$.

(1.3.6) Exemple ($K = \mathbf{R}$) : L'isobarycentre de trois points $x_0, x_1, x_2 \in X$ s'écrit (dans \widehat{X} , par exemple) comme

$$x = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 \right) + \frac{1}{3}x_2 = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x_2,$$

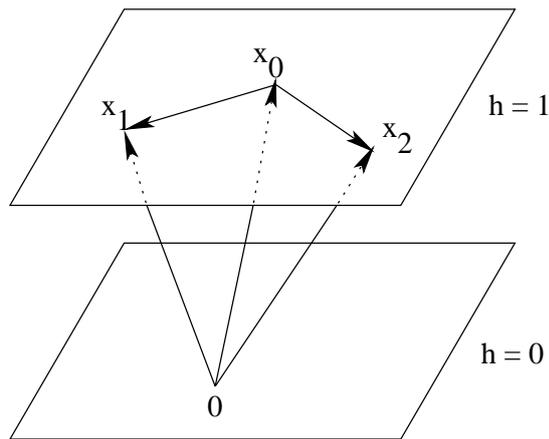
où $y = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1$ est l'isobarycentre de x_0, x_1 .



(1.3.7) Définition. Soient X un espace affine et $x_0, \dots, x_n \in X$. Les points x_0, \dots, x_n sont **affinement indépendants** si $\dim(\text{aff}(x_0, \dots, x_n)) = n$. D'après 1.2.11, ceci équivaut à la condition suivante (pour n'importe quelle valeur $i \in \{0, \dots, n\}$) : les vecteurs $\overrightarrow{x_i x_0}, \dots, \overrightarrow{x_i x_{i-1}}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_i x_n} \in \vec{X}$ sont linéairement indépendants. Si, de plus, $\text{aff}(x_0, \dots, x_n) = X$, on dit que les points x_0, \dots, x_n forment une **base affine** (ou un **repère affine**) de X .

(1.3.8) Proposition. Soient X un espace affine et $x_0, \dots, x_n \in X$.

- (i) x_0, \dots, x_n sont affinement indépendants dans $X \iff x_0, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants dans \widehat{X} .
- (ii) x_0, \dots, x_n forment une base affine de $X \iff x_0, \dots, x_n$ forment une base de \widehat{X} .



Preuve. (i) Comme $\overrightarrow{x_0 x_j} = x_j - x_0$ dans \widehat{X} , l'indépendance affine des points x_0, \dots, x_n équivaut à l'indépendance linéaire des vecteurs $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ dans \widehat{X} . D'autre part, l'indépendance linéaire

des vecteurs x_0, \dots, x_n dans \widehat{X} équivaut à l'indépendance linéaire des vecteurs $x_0, x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$. Il reste à montrer qu'une relation linéaire dans \widehat{X}

$$(*) \quad c_0 x_0 + \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_0) = \vec{0} \quad (c_j \in K)$$

entraîne que $c_0 = 0$; ceci résulte de (*) en appliquant la forme linéaire h , car $h(x_0) = 1, h(x_j - x_0) = 0$.

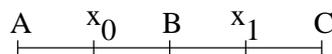
(ii) Ceci est une conséquence de (i), car $\dim(\widehat{X}) = \dim(X) + 1$.

(1.3.9) Corollaire-Définition. Soit x_0, \dots, x_n une base affine d'un espace affine X .

(i) Tout élément $\hat{x} \in \widehat{X}$ s'écrit, de manière unique, comme $\hat{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ ($\lambda_i \in K$). On a $h(\hat{x}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$, donc \hat{x} est contenu dans X (resp. dans \vec{X}) $\iff \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ (resp. $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$).

(ii) Tout élément $x \in X \subset \widehat{X}$ s'écrit, de manière unique, comme $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in K$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Les scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ s'appellent les **coordonnées barycentriques** de x (dans la base affine x_0, \dots, x_n).

(1.3.10) Exemples : (i) ($n = 1$)



Point	A	x_0	B	x_1	C
λ_0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
λ_1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

(ii) ($n = 2$) : Voir 1.2.11.

(1.3.11) Exercice. Pour $K = \mathbf{R}$ and $n = 2$, déterminer les ensembles des points $\{\lambda_i = 0\}$, $\{\lambda_i < 0\}$, $\{\lambda_i > 0\}$ ($i = 0, 1, 2$).

(1.3.12) Exercice. Soient A, B et C trois points sur une droite affine ($C \neq B$). Exprimer le rapport CA/CB en termes des coordonnées barycentriques de A, B et C .

(1.3.13) Coordonnées barycentriques et coordonnées cartésiennes. Soit x_0, \dots, x_n une base affine d'un espace affine X . Fixons $i \in \{0, \dots, n\}$. Considérons le point x_i comme l'origine de X ; les vecteurs $\overrightarrow{x_i x_0}, \dots, \overrightarrow{x_i x_{i-1}}, \overrightarrow{x_i x_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_i x_n}$ alors forment une base de \vec{X} . Soit $x = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j$ ($\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$) une combinaison affine des points x_0, \dots, x_n . L'égalité

$$\overrightarrow{u x} = \sum_{j=0}^n \lambda_j \overrightarrow{u x_j}$$

montre pour $u = x_i$ que

$$\overrightarrow{x_i x} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \overrightarrow{x_i x_j},$$

et donc les coordonnées cartésiennes de x sont égales à

$$\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n.$$

1.4 Géométrie (enfin!)

(1.4.1) Proposition. Soit X un espace affine de dimension $\dim(X) = n$ ($1 \leq n < \infty$). Fixons une base affine x_0, \dots, x_n de X ; soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les coordonnées barycentriques correspondantes. Si $y_0, \dots, y_n \in X$, alors on a

$$y_0, \dots, y_n \text{ sont affinement indépendants} \iff y_0, \dots, y_n \text{ forment une base affine de } X \iff$$

$$\text{la matrice } A = (\lambda_j(y_i))_{0 \leq i, j \leq n} \text{ est inversible.}$$

Preuve. Les lignes de A sont les coordonnées des vecteurs $y_0, \dots, y_n \in \widehat{X}$ dans la base x_0, \dots, x_n de \widehat{X} ; on applique 1.3.8.

(1.4.2) Corollaire (Condition d'alignement). Sous les hypothèses de 1.4.1, les points y_0, \dots, y_n sont contenus dans un hyperplan affine de $X \iff$ le déterminant

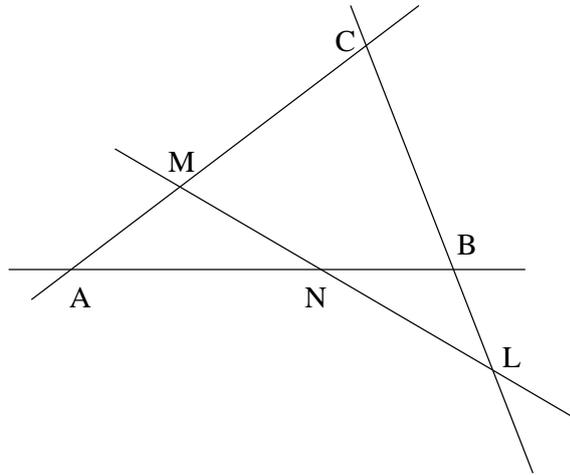
$$\begin{vmatrix} \lambda_0(y_0) & \cdots & \lambda_n(y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_0(y_n) & \cdots & \lambda_n(y_n) \end{vmatrix} = 0$$

s'annule.

(1.4.3) Théorème de Ménélaüs. Soient A, B et C trois points affinement indépendants dans un plan affine et L, M et N trois points différents de A, B, C sur les droites respectives (BC) , (CA) , (AB) . Notons

$$\alpha = \frac{LB}{LC}, \quad \beta = \frac{MC}{MA}, \quad \gamma = \frac{NA}{NB}$$

leurs rapports respectifs. Alors les points L, M et N sont alignés $\iff \alpha\beta\gamma = 1$.



Preuve. D'après 1.2.10, les coordonnées barycentriques des points L, M et N sont égales respectivement à

$$\left(0, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha-1}\right), \quad \left(\frac{\beta}{\beta-1}, 0, \frac{1}{1-\beta}\right), \quad \left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{\gamma}{\gamma-1}, 0\right).$$

En appliquant 1.4.2, on voit que les points L, M et N sont alignés \iff

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1-\alpha} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ \frac{\beta}{1-\beta} & 0 & \frac{\beta}{\beta-1} \\ \frac{1}{1-\gamma} & \frac{\gamma}{\gamma-1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & 0 & 1 \\ 1 & -\gamma & 0 \end{vmatrix} = \frac{1 - \alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)},$$

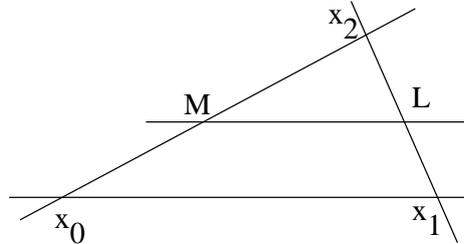
ce qui équivaut à $\alpha\beta\gamma = 1$ (comme $\alpha, \beta, \gamma \neq 1$).

(1.4.4) **Exercice.** Généraliser 1.4.3 aux dimensions supérieures.

(1.4.5) **Équations des droites affines (exemples) :** Soit x_0, x_1, x_2 une base affine d'un plan affine; alors la droite (x_0x_1) est définie par l'équation

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Soit L (resp. M) le milieu de x_1x_2 (resp. de x_0x_2); leurs coordonnées barycentriques sont égales à $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (resp. $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$).



L'équation de la droite (LM)

$$(LM) : \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

s'écrit aussi comme

$$\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

ce qui équivaut à

$$(LM) : \quad \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Les droites (x_0x_1) et (LM) sont parallèles; on peut le voir directement en remarquant que les équations

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

entraînent

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

(1.4.6) **Proposition.** Sous les hypothèses de 1.4.1, les hyperplans affines de X sont définis par des équations

$$(*) \quad \sum_{i=0}^n c_i \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1,$$

où $c_0, \dots, c_n \in K$ et $(\exists i, j) \ c_i \neq c_j$.

Preuve. Considérons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme les coordonnées cartésiennes dans X (voir 1.3.13). L'équation d'un hyperplan affine s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i - a = 0 \quad (a, a_i \in K, (\exists i) a_i \neq 0).$$

Pour traduire cette équation aux coordonnées barycentriques, il faut remplacer a par $a(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)$; on obtient alors une équation sous la forme (*). Réciproquement, (*) équivaut à

$$\sum_{i=1}^n (c_i - c_0) \lambda_i + c_0 = 0,$$

ce qui est une équation cartésienne d'un hyperplan affine dans X .

(1.4.7) Équation d'une droite affine dans un plan affine : Sous les hypothèses de 1.4.5, soient P et Q des points distincts du plan. Il résulte de 1.4.2 que la droite affine (PQ) est définie par l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_0(P) & \lambda_1(P) & \lambda_2(P) \\ \lambda_0(Q) & \lambda_1(Q) & \lambda_2(Q) \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

(1.4.8) Sous les hypothèses de 1.4.1, considérons un ensemble de $n + 1$ hyperplans affines

$$H_i : c_{i0}\lambda_0 + \cdots + c_{in}\lambda_n = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

($i = 0, \dots, n$); on a alors

$$\begin{vmatrix} c_{00} & \cdots & c_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n0} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \implies H_0 \cap \cdots \cap H_n = \emptyset.$$

La réciproque est fautive; voici un résultat qui est valable en dimension deux :

(1.4.9) Proposition (Condition de concours). Soit x_0, x_1, x_2 une base affine d'un plan affine X . Considérons trois droites affines

$$D_i : c_{i0}\lambda_0 + c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

($i = 0, 1, 2$). Alors on a

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \iff (D_0 \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \text{ ou } D_0 \parallel D_1 \parallel D_2).$$

Preuve. Si $i = 0, 1, 2$, l'équation

$$c_{i0}\lambda_0 + c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 = 0$$

définit un hyperplan vectoriel $W_i \subset \widehat{X}$, $W_i \not\subset \vec{X}$ ($\dim(\widehat{X}) = 3$) tel que $D_i = W_i \cap X$. Notons $W := W_0 \cap W_1 \cap W_2$; W est un sous-espace vectoriel de \widehat{X} de dimension $\dim(W) \leq 2$. L'annulation du déterminant de la matrice (c_{ij}) équivaut au fait que $\dim(W) > 0$. Si $W \not\subset \vec{X} = \{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0\}$, alors il existe un élément $w \in W \cap X$, donc $w \in D_0 \cap D_1 \cap D_2$. Si $W \subset \vec{X}$, alors $\dim(W) = 1$ et $\vec{D}_i = W$ pour tout i , donc $D_0 \parallel D_1 \parallel D_2$.

(1.4.10) Exercice. Sous les hypothèses de 1.4.1, les hyperplans affines

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i \lambda_i = 0, & \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=0}^n d_i \lambda_i = 0, & \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \end{aligned}$$

de X sont parallèles \iff le rang de la matrice

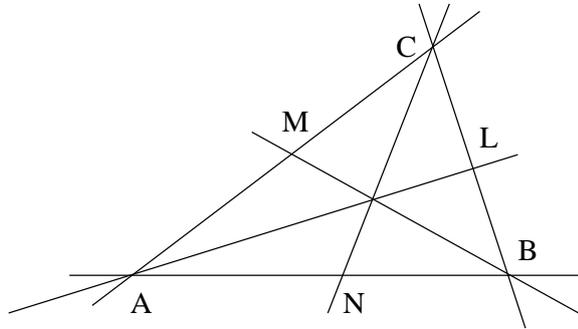
$$\begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_n \\ d_0 & \cdots & d_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2.

(1.4.11) Théorème de Ceva. Soient A, B et C trois points affinement indépendants et L, M et N trois points différents de A, B, C sur les droites respectives $(BC), (CA), (AB)$. Notons

$$\alpha = \frac{LB}{LC}, \quad \beta = \frac{MC}{MA}, \quad \gamma = \frac{NA}{NB}$$

leurs rapports respectifs. Alors les droites $(AL), (BM)$ et (CN) sont concourantes ou parallèles $\iff \alpha\beta\gamma = -1$.



Preuve. On sait que les coordonnées barycentriques des points L, M et N sont égales respectivement à

$$\left(0, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha-1}\right), \quad \left(\frac{\beta}{\beta-1}, 0, \frac{1}{1-\beta}\right), \quad \left(\frac{1}{1-\gamma}, \frac{\gamma}{\gamma-1}, 0\right).$$

En appliquant 1.4.7, on en déduit les équations respectives des droites $(AL), (BM)$ et (CN) :

$$\begin{aligned} (AL) : & \quad 0 + \alpha\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (BM) : & \quad \lambda_0 + 0 + \beta\lambda_2 = 0 \\ (CN) : & \quad \gamma\lambda_0 + \lambda_1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

D'après 1.4.9, ces droites sont concourantes ou parallèles \iff

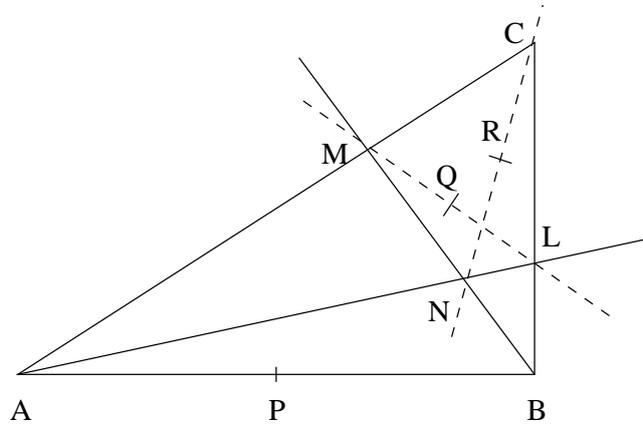
$$0 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ \gamma & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 1.$$

(1.4.12) Exercice. Soit X un espace affine. Alors les formules $H \mapsto W = \widehat{H}, W \mapsto H = X \cap W$ définissent des bijections, inverses l'une de l'autre, entre

$$\{\text{sous-espaces affines } H \subset X\} \longleftrightarrow \{\text{sous-espaces vectoriels } W \subset \widehat{X}, W \not\subset \vec{X}\}.$$

(1.4.13) Exercice. Y a-t-il un lien entre 1.4.12 et la discussion en 1.4.6?

(1.4.14) Exercice. Considérons les coordonnées barycentriques par rapport à une base affine A, B, C d'un plan affine réel.

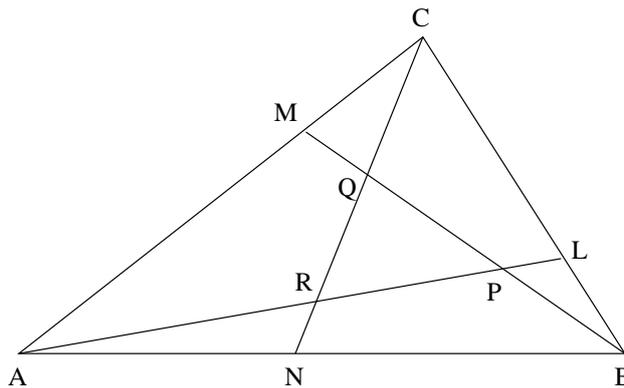


- (i) Quelles sont les coordonnées barycentriques d'un point général L (resp. M) de la droite affine (BC) (resp. (CA))?
- (ii) Déterminer les équations des droites (AL) et (BM) et les coordonnées barycentriques du point $N = (AL) \cap (BM)$ en termes des coordonnées barycentriques de L et M .
- (iii) Soient P, Q et R les milieux respectifs de AB, LM et CN ; déterminer leurs coordonnées barycentriques.
- (iv) Démontrer analytiquement que les points P, Q et R sont alignés.

(1.4.15) Exercice. Considérons les coordonnées barycentriques par rapport à une base affine A, B, C d'un plan affine réel. Soient A', B', C' les milieux respectifs de BC, CA et AB et soit D un point qui n'appartient à aucune des droites $(AB), (BC), (CA)$.

- (i) Déterminer les équations des droites $(DA'), (DB')$ et (DC') en termes des coordonnées barycentriques de D .
- (ii) Déterminer les équations de la droite d_A (resp. d_B , resp. d_C) qui passe par A (resp. par B , resp. par C) et qui est parallèle à (DA') (resp. à (DB') , resp. à (DC')).
- (iii) Démontrer analytiquement que les droites d_A, d_B et d_C sont concourantes. Déterminer les coordonnées barycentriques de leur point d'intersection.

(1.4.16) Exercice. On considère les coordonnées barycentriques par rapport à une base affine A, B, C d'un plan affine réel.



- (i) Soient $L \in (BC), M \in (CA)$ et $N \in (AB)$ trois points, distincts de A, B et C . Déterminer les coordonnées barycentriques de L, M et N en termes des rapports

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{LC}}, \quad \beta = \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MA}}, \quad \gamma = \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}}.$$

- (ii) Déterminer les équations des droites (AL) , (BM) et (CN) en termes de α , β et γ .
- (iii) Déterminer les équations barycentriques des points $P = (AL) \cap (BM)$, $Q = (BM) \cap (CN)$ et $R = (CN) \cap (AL)$ en termes de α , β et γ .
- (iv) Déterminer la valeur du déterminant

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \lambda_0(P) & \lambda_1(P) & \lambda_2(P) \\ \lambda_0(Q) & \lambda_1(Q) & \lambda_2(Q) \\ \lambda_0(R) & \lambda_1(R) & \lambda_2(R) \end{vmatrix}$$

en termes de α , β et γ .

- (v) En déduire un théorème bien connu (lequel ?) du cours.
- (vi) $\Delta(P, Q, R)$ admet une interprétation géométrique; deviner la.

(1.4.17) Exercice. Soient P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 des points distincts d'un plan affine réel X .

- (i) Existe-t-il des points $Q_1 = Q_6, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 \in X$ tels que P_i soit le milieu de $Q_i Q_{i+1}$, pour tous $i = 1, \dots, 5$? Sont-ils uniques? Peut-on les construire géométriquement?
- (ii) Que se passe-t-il si l'on remplace 5 par 6?

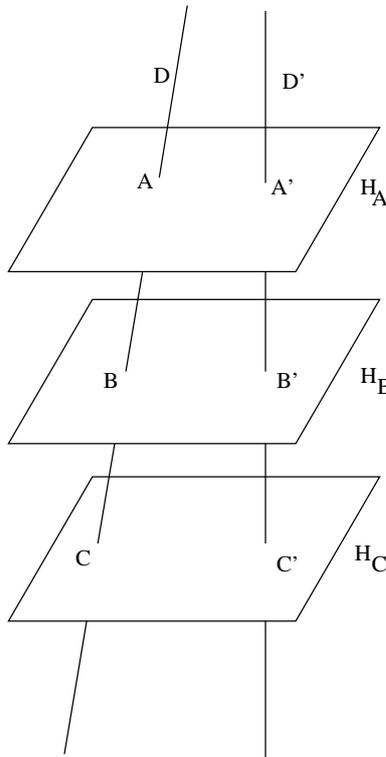
1.5 Trois théorèmes classiques

(1.5.1) Théorème de Thalès. Soient X un espace affine et $H_A \parallel H_B \parallel H_C$ trois hyperplans affines parallèles (distincts) dans X . Si D et D' sont des droites affines dans X qui ne sont pas faiblement parallèles à H_A , alors on a

$$D \cap H_A = \{A\}, \quad D \cap H_B = \{B\}, \quad D \cap H_C = \{C\}, \quad D' \cap H_A = \{A'\}, \quad D' \cap H_B = \{B'\}, \quad D' \cap H_C = \{C'\}$$

et

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'}$$

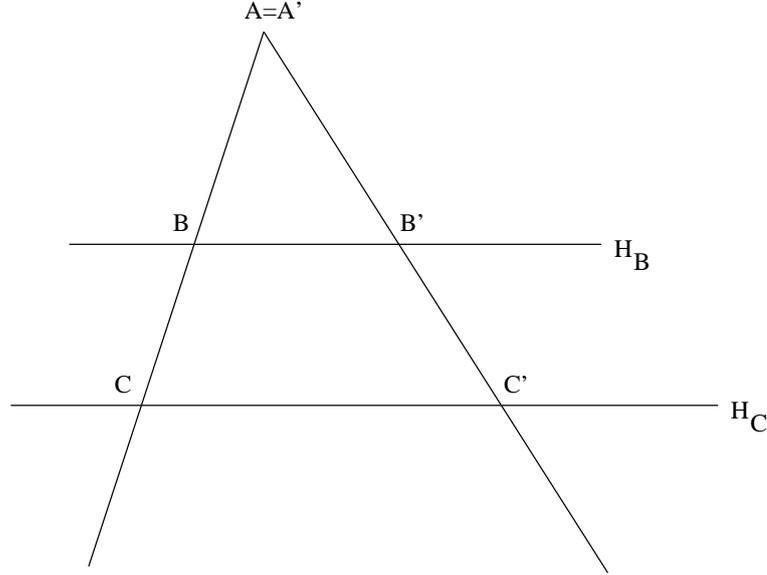


Preuve. Puisque l'hyperplan vectoriel $\vec{H}_A = \vec{H}_B = \vec{H}_C \subset \vec{X}$ ne contient pas la droite vectorielle \vec{D} (resp. \vec{D}'), chaque intersection $D \cap H_*$ (resp. $D' \cap H_*$) est un point, d'après 1.2.6(ii).

On peut remplacer D par le translaté $D + \overrightarrow{AA'}$; dans ce cas on a $A = A'$ et les droites D et D' sont contenues dans le sous-espace affine $Y = A + \text{vect}(\vec{u}, \vec{u}')$, où \vec{u} (resp. \vec{u}') est une base de \vec{D} (resp. de \vec{D}').

Si $D \parallel D'$, alors $D = D'$, d'après 1.2.6(iv), donc $B = B'$ et $C = C'$.

On peut donc supposer que les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont linéairement indépendants. Dans ce cas Y est un plan affine et on peut remplacer X par le plan Y et tout H_* par la droite affine $H_* \cap Y$.



Il existe des scalaires $r, s, r', s' \in K - \{0\}$ tels que

$$\overrightarrow{AB} = r\vec{u}, \quad \overrightarrow{AC} = s\vec{u}, \quad \overrightarrow{AB'} = r'\vec{u}', \quad \overrightarrow{AC'} = s'\vec{u}'.$$

(1.5.2) Lemme. Les droites H_B et H_C sont parallèles $\iff rs^{-1} = r'(s')^{-1}$.

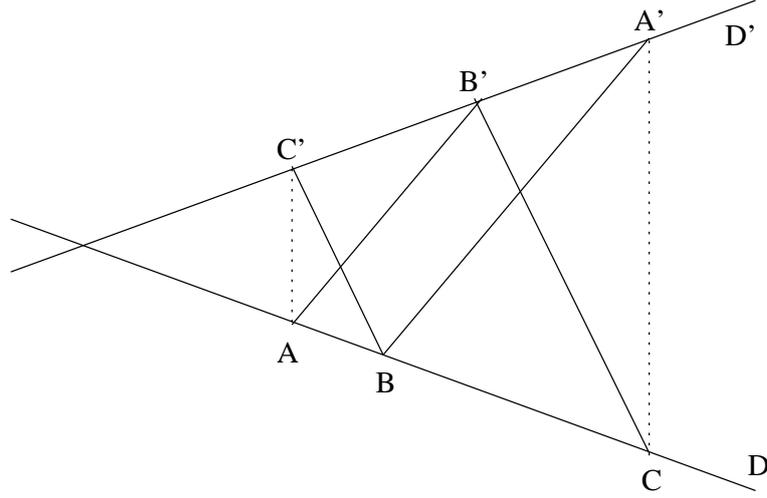
Preuve. On a

$$\begin{aligned} H_B \parallel H_C &\iff (\exists t \in K) \overrightarrow{BB'} = t\overrightarrow{CC'} \iff (\exists t \in K) r'\vec{u}' - r\vec{u} = t(s'\vec{u}' - s\vec{u}) \iff \\ &\iff (\exists t \in K) (r' - ts')\vec{u}' = (r - ts)\vec{u} \iff (\exists t \in K) r' = ts', r = ts \iff rs^{-1} = r'(s')^{-1}. \end{aligned}$$

Preuve de 1.5.1 (fin). Il résulte de 1.5.2 qu'on a

$$\frac{CA}{CB} = \frac{s}{s-r} = \frac{s/r}{s/r-1} = \frac{s'/r'}{s'/r'-1} = \frac{s'}{s'-r'} = \frac{C'A'}{C'B'}.$$

(1.5.3) Théorème de Pappus (forme affine). Soient D et D' deux droites affines (distinctes) dans un plan affine. Soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts de D (resp. de D'), tous distincts de $D \cap D'$. Si $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$, alors $(CA') \parallel (AC')$.



Preuve. On laisse le cas $D \parallel D'$ au lecteur. Si D n'est pas parallèle à D' , alors $D \cap D' = \{O\}$ est un point. Soit \vec{u} (resp. \vec{u}') une base de \vec{D} (resp. de \vec{D}'). Il existe des scalaires $a, b, c, a', b', c' \in K - \{0\}$ tels que

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u}, \quad \overrightarrow{OB} = b\vec{u}, \quad \overrightarrow{OC} = c\vec{u}, \quad \overrightarrow{OA'} = a'\vec{u}', \quad \overrightarrow{OB'} = b'\vec{u}', \quad \overrightarrow{OC'} = c'\vec{u}'.$$

D'après 1.5.2, on a

$$\left. \begin{array}{l} (AB') \parallel (BA') \iff ab^{-1} = b'(a')^{-1} \\ (BC') \parallel (CB') \iff bc^{-1} = c'(b')^{-1} \end{array} \right\} \implies c'(a')^{-1} = c'(b')^{-1}b'(a')^{-1} = bc^{-1}ab^{-1}.$$

Le corps K étant commutatif, on a $bc^{-1}ab^{-1} = ac^{-1}$, donc $c'(a')^{-1} = ac^{-1}$, ce qui entraîne $(CA') \parallel (AC')$, d'après 1.5.2.

(1.5.4) On peut définir un espace vectoriel (et un espace affine) sur un **corps non-commutatif** \mathcal{K} . L'énoncé et la preuve du Lemme 1.5.2 sont toujours valables sur \mathcal{K} . Par contre, la preuve de 1.5.3 montre que si le Théorème de Pappus est vrai sur \mathcal{K} , alors on a

$$(\forall a, b, c \in \mathcal{K} - \{0\}) \quad bc^{-1}ab^{-1} = ac^{-1}.$$

En particulier, pour $c = 1$, on obtient

$$(\forall a, b \in \mathcal{K} - \{0\}) \quad bab^{-1} = a,$$

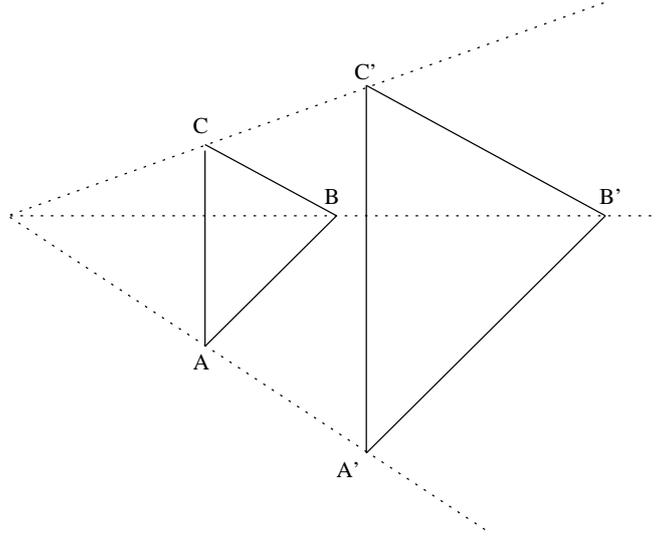
donc

$$(\forall a, b \in \mathcal{K} - \{0\}) \quad ba = ab.$$

En résumé,

$$\text{Théorème de Pappus} \iff \mathcal{K} \text{ est un corps commutatif.}$$

(1.5.5) Théorème de Desargues(forme affine). Soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points affinement indépendants dans un espace affine X . On suppose que $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Si $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ et $(CA) \parallel (C'A')$, alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.



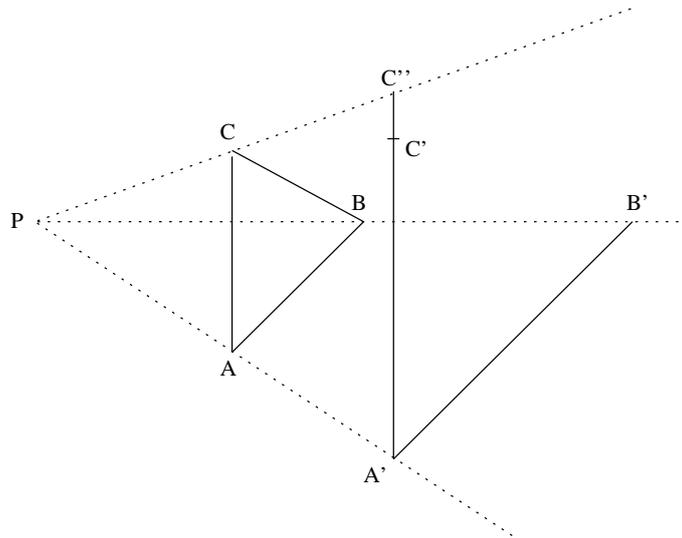
Preuve. Il résulte des hypothèses du théorème que $H := \text{aff}(A, B, C)$ et $H' := \text{aff}(A', B', C')$ sont des plans affines parallèles. Si $H \neq H'$, alors

$$H_1 := \text{aff}(B, C, B', C'), \quad H_2 := \text{aff}(C, A, C', A'), \quad H_3 := \text{aff}(A, B, A', B')$$

sont trois plans affines dans X (qui ne sont pas parallèles à H) vérifiant

$$H_1 \cap H_2 = (CC'), \quad H_2 \cap H_3 = (AA'), \quad H_3 \cap H_1 = (BB').$$

Les droites (AA') et (BB') sont contenues dans le plan H_3 . Si elles sont parallèles, alors $\vec{H}_2 \cap \vec{H}_3 = \vec{H}_3 \cap \vec{H}_1 = D$ est une droite vectorielle dans \vec{X} ; il en résulte que $D = \vec{H}_1 \cap \vec{H}_2 \cap \vec{H}_3 \subset \vec{H}_1 \cap \vec{H}_2$, donc $D = \vec{H}_1 \cap \vec{H}_2$, ce qui montre que les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles. Si (AA') n'est pas parallèle à (BB') , alors $(AA') \cap (BB') = \{P\}$ est un point. On en déduit que $\{P\} = H_1 \cap H_2 \cap H_3 = (AA') \cap (BB') \cap (CC')$. Si $H = H'$, alors les points A, B, C, A', B', C' sont tous contenus dans le plan affine H . Si les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, soit P leur point d'intersection.



Les droites $(A'C')$ et (PC) ne sont pas parallèles; soit C'' leur point d'intersection. Il existe des scalaires $r, s, t \in K - \{0\}$ tels que

$$\overrightarrow{PA'} = r \overrightarrow{PA}, \quad \overrightarrow{PB'} = s \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{PC''} = t \overrightarrow{PC}.$$

D'après 1.5.2, l'hypothèse $(AB) \parallel (A'B')$ (resp. $(CA) \parallel (C'A')$) entraîne $r = s$ (resp. $r = t$), donc $s = t$; il en résulte que $(BC) \parallel (B'C'')$ (toujours d'après 1.5.2), donc $C'' \in (B'C') \cap (A'C') = \{C'\}$, ce qui montre que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

On laisse le cas $(AA') \parallel (BB')$ au lecteur.

(1.5.6) Exercice. Soit \mathcal{K} un corps qui n'est pas commutatif.

- (i) Définir le rapport de trois points distincts sur une droite affine sur \mathcal{K} .
- (ii) Le Théorème de Thalès 1.5.1, est-il vrai dans un espace affine sur \mathcal{K} ?

1.6 Applications affines

Sous une forme matricielle, une application **linéaire** (resp., **affine**), s'écrit $f(x) = Ax$ (resp., $f(x) = Ax + a$).

(1.6.1) Définition. Soient X et Y des espaces affines. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite **affine** s'il existe une application linéaire $\vec{f} : \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ telle que l'on ait, pour tout $x \in X$,

$$(*) \quad (\forall \vec{c} \in \vec{X}) \quad f(x + \vec{c}) = f(x) + \vec{f}(\vec{c})$$

(si c'est le cas, alors \vec{f} est unique; on l'appelle la **partie linéaire** de f). On note

$$A(X, Y) = \{\text{applications affines } f : X \rightarrow Y\}.$$

(1.6.2) Exercice. (i) Si la condition (*) est satisfaite pour un point $x \in X$, elle est satisfaite pour tout $x \in X$.

(ii) Soit $f \in A(X, Y)$. Si trois points $x_0, x_1, x_2 \in X$ sont alignés, leurs images $f(x_0), f(x_1), f(x_2) \in Y$ sont aussi alignées.

(1.6.3) Exemples : (i) Si $\vec{a} \in \vec{X}$, alors la **translation**

$$t(\vec{a}) : X \rightarrow X, \quad x \mapsto x + \vec{a}$$

est une application affine; on a $t(\vec{a}) \circ t(\vec{b}) = t(\vec{a} + \vec{b})$. La partie linéaire d'une translation $f = t(\vec{a})$ est égale à $\vec{f} = \text{id}$.

(ii) Si $X = \vec{X}$ et $Y = \vec{Y}$, alors toute application linéaire $f : X \rightarrow Y$ est affine (avec $\vec{f} = f$).

(iii) Si $f \in A(X, Y)$, alors f est combinaison d'une translation et d'une application linéaire : fixons l'origine $x_0 \in X$ (resp. $y_0 \in Y$). En utilisant les identifications

$$\begin{array}{ccc} \vec{X} & \xrightarrow{\sim} & X \\ \vec{t} & \mapsto & x_0 + \vec{t} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\sim} & \vec{Y} \\ y & \mapsto & \overline{y_0 y} \end{array}$$

(voir 1.1.9 ci-dessus), on identifie f à l'application

$$\begin{array}{ccc} \vec{X} & \xrightarrow{\sim} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\sim} & \vec{Y} \\ \vec{t} & \mapsto & x_0 + \vec{t} & \mapsto & f(x_0) + \vec{f}(\vec{t}) & \mapsto & \vec{f}(\vec{t}) + \vec{a}, \end{array} \quad \vec{a} = \overline{y_0 f(x_0)} \in \vec{Y}.$$

(1.6.4) Applications affines dans les coordonnées cartésiennes. (0) Soit x_0, \dots, x_m (resp. y_0, \dots, y_n) une base affine d'un espace affine X (resp. Y). On identifie $K^m \xrightarrow{\sim} X$ et $K^n \xrightarrow{\sim} Y$ comme en 1.3.13 (pour $i = 0$) :

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \mapsto x_0 + \sum_{i=1}^m t_i \overline{x_0 x_i}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mapsto y_0 + \sum_{j=1}^n u_j \overline{y_0 y_j}.$$

(1) En utilisant ces identifications, il résulte de 1.6.3(iii) qu'une application affine $f : X \rightarrow Y$ correspond à l'application (abusivement aussi notée f)

$$f : K^m \rightarrow K^n, \quad t \mapsto At + a,$$

où $A \in M_{n,m}(K)$ est la matrice qui représente \vec{f} dans les bases respectives $\overrightarrow{x_0x_i}$ et $\overrightarrow{y_0y_j}$ de \vec{X} et \vec{Y} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) et $a \in K^n$ représente le vecteur $\overrightarrow{y_0f(x_0)}$ dans la base $\overrightarrow{y_0y_j}$.

(2) Réciproquement, si $A \in M_{n,m}(K)$ et $a \in K^n$, alors l'application

$$f : K^m \rightarrow K^n, \quad t \mapsto At + a$$

est affine (avec $\vec{f} = A$), car

$$(\forall t, c \in K^m) \quad f(t + c) = A(t + c) + a = At + a + Ac = f(t) + Ac.$$

(3) Soit Z un autre espace affine. Soit z_0, \dots, z_p une base affine de Z ; on identifie $Z \xrightarrow{\sim} K^p$ comme en (0). Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : K^n \rightarrow K^p$ sont des applications affines, on les écrit sous la forme (1) :

$$\begin{aligned} f : K^m &\rightarrow K^n, & f(t) &= At + a, & (A \in M_{n,m}(K), a \in K^n) \\ g : K^n &\rightarrow K^p, & g(u) &= Bu + b, & (B \in M_{p,n}(K), b \in K^p). \end{aligned}$$

(1.6.5) Formulaire. Sous les hypothèses de 1.6.4, on a

$$(1.6.5.1) \quad (g \circ f)(t) = B(At + a) + b = (BA)t + (Ba + b),$$

donc l'application $g \circ f$ est aussi affine (et BA représente la partie linéaire de $g \circ f$).

$$(1.6.5.2) \quad g \circ f = \text{id} \iff (BA = I, Ba + b = \vec{0}) \iff (B = A^{-1}, b = -A^{-1}a).$$

(1.6.5.3) **Représentation matricielle :** si l'on identifie un vecteur $t \in K^m$ (resp. $u \in K^n$) à

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1},$$

alors $f(t)$ s'identifie à

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a noté

$$\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1,m+1}(K).$$

Si l'on associe à f (resp. g) la matrice

$$\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1,m+1}(K) \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{p+1,n+1}(K),$$

alors la matrice associée à $g \circ f$ est égale à

$$\begin{pmatrix} BA & Ba + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{p+1,m+1}(K).$$

(1.6.6) Reformulation abstraite. Soient X, Y et Z trois espace affines et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des applications.

(1.6.6.1) Si $f \in A(X, Y)$ et $g \in A(Y, Z)$, alors $g \circ f \in A(X, Z)$ et $\overline{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

(1.6.6.2) Si $f \in A(X, Y)$, alors (f est bijectif $\iff \vec{f}$ l'est; on dit que f est un **isomorphisme affine**). Si c'est le cas, on a $f^{-1} \in A(Y, X)$ et $\overline{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$.

(1.6.6.3) Toute application affine $f : X \rightarrow Y$ induit une application linéaire

$$\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}, \quad \widehat{f}(\widehat{x}) = \begin{cases} \vec{f}(\vec{t}), & \text{si } \widehat{x} = \vec{t} \in \vec{X} \\ sf(x), & \text{si } \widehat{x} = sx, s \in K - \{0\}, x \in X, \end{cases}$$

dont la matrice dans les bases respectives x_1, \dots, x_m, x_0 et y_1, \dots, y_n, y_0 de \widehat{X} et \widehat{Y} est égale à

$$\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

(1.6.7) Définition. Le **groupe affine** d'un espace affine X est

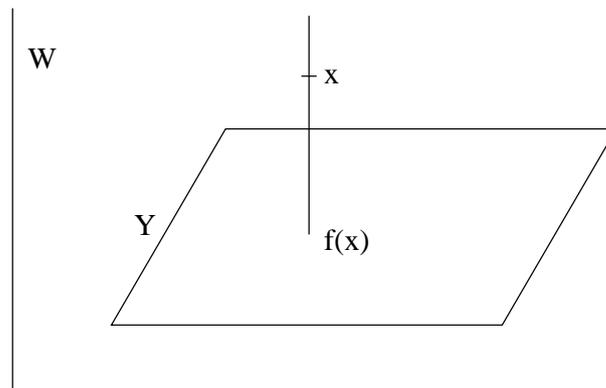
$$GA(X) := \{f \in A(X, X) \mid f \text{ bijectif}\}$$

(ceci est bien un groupe, d'après (1.6.6.1-2)). Pour tout entier $n \geq 1$ on note $GA_n(K) = GA(K^n)$; on a, d'après 1.6.5,

$$GA_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(K), a \in K^n \right\}.$$

[Un choix d'une base affine de X induit un isomorphisme de groupes $GA(X) \xrightarrow{\sim} GA_n(K)$, où $n = \dim(X)$.]

(1.6.8) Projection parallèle. Soient X un espace affine, $Y \subset X$ un sous-espace affine et $W \subset \vec{X}$ un sous-espace vectoriel tel que $W \oplus \vec{Y} = \vec{X}$.



Pour tout $x \in X$, le translaté $x + W \subset X$ est un sous-espace affine, dont l'intersection $(x + W) \cap Y$ avec Y est un point (d'après 1.2.6); on le note $f(x)$. L'application ainsi définie

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

est affine (exercice!). On l'appelle la **projection affine (ou parallèle) sur Y de direction W** . La projection f vérifie $f(f(x)) = f(x)$ (pour tout $x \in X$), donc $f \circ f = f$.

(1.6.9) Théorème de Thalès (bis). Sous les hypothèses de 1.5.1, soit $W = \vec{H}_A = \vec{H}_B = \vec{H}_C$. La projection $f : X \rightarrow D'$ de direction W alors induit un isomorphisme affine $g = f \circ i : D \hookrightarrow X \rightarrow D'$ (où l'on a noté $i : D \hookrightarrow X$ l'inclusion de D dans X).

En choisissant des bases affines (donc des coordonnées cartésiennes) de D et D' , on écrit $g : D \xrightarrow{\sim} D'$ sous la forme

$$g(t) = \lambda t + a, \quad (\lambda \in K - \{0\}, a \in K).$$

Le rapport des points $A, B, C \in D$ est égal à

$$\frac{CA}{CB} = \frac{t(C) - t(A)}{t(C) - t(B)},$$

où $t(A)$ est la coordonnée de A (et de même pour B et C). Comme

$$A' = g(A), \quad B' = g(B), \quad C' = g(C),$$

on a

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{(\lambda t(C) + a) - (\lambda t(A) + a)}{(\lambda t(C) + a) - (\lambda t(B) + a)} = \frac{t(C) - t(A)}{t(C) - t(B)} = \frac{CA}{CB}$$

(“le rapport de trois points alignés est un invariant affine”).

(1.6.10) Proposition. Soit X un espace affine. L'ensemble des translations $T(X) := \{t(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \vec{X}\}$ est un sous-groupe distingué de $GA(X)$. Le groupe $T(X)$ est canoniquement isomorphe à \vec{X} .

Preuve. Comme

$$(\forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{X}) \quad t(\vec{a}) \circ t(\vec{b}) = t(\vec{a} + \vec{b}); \quad t(\vec{a}) = \text{id} \iff \vec{a} = \vec{0},$$

$T(X)$ est un sous-groupe de $GA(X)$ et l'application

$$\vec{X} \longrightarrow T(X), \quad \vec{a} \mapsto t(\vec{a})$$

est un isomorphisme de groupes. Si $f \in GA(X)$ et $\vec{a} \in \vec{X}$, il faut démontrer que $f \circ t(\vec{a}) \circ f^{-1} \in T(X)$; mais on a

$$(\forall x \in X) \quad f \circ t(\vec{a}) \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x) + \vec{a}) = x + \vec{f}(\vec{a}),$$

donc $f \circ t(\vec{a}) \circ f^{-1} = t(\vec{f}(\vec{a})) \in T(X)$.

(1.6.11) On peut aussi remarquer que l'application

$$\alpha : GA(X) \longrightarrow GL(\vec{X}), \quad f \mapsto \vec{f}$$

est un homomorphisme de groupes, dont le noyau est égal à

$$\text{Ker}(\alpha) = T(X).$$

Si l'on utilise la représentation matricielle (1.6.5.3), α s'écrit comme

$$\alpha : GA_n(K) \longrightarrow GL_n(K), \quad \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A,$$

donc

$$\text{Ker}(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^n \right\}.$$

Bien sûr, la translation $t(a)$ ($a \in K^n$) correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.6.12) Proposition-Définition. Soit X un espace affine. Une **homothétie** $f : X \rightarrow X$ est un élément $f \in GA(X)$ tel que $\vec{f} = \lambda \cdot \text{id}$, où $\lambda \in K - \{0, 1\}$. On dit que λ est le **rappport** de f .

(i) Une homothétie $f : X \rightarrow X$ a un unique point fixe $x_f \in X$ (le **centre** de f). On a

$$(\forall x \in X) \quad \overrightarrow{x_f f(x)} = \lambda \overrightarrow{x_f x}.$$

(ii) L'ensemble $T(X) \cup \{\text{homothéties } f : X \rightarrow X\}$ est un sous-groupe de $GA(X)$, qui est isomorphe à

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K - \{0\}, a \in K^n \right\} \quad (n = \dim(X)).$$

Preuve. (i) Fixons $x_0 \in X$. Si $\vec{c} \in \vec{X}$, alors le point $x_0 + \vec{c}$ est fixé par $f \iff$ on a

$$x_0 + \vec{c} = f(x_0 + \vec{c}) = f(x_0) + \lambda \vec{c}.$$

Comme $\lambda \neq 1$, cette équation a une unique solution $\vec{c} = (1 - \lambda)^{-1} \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$, donc

$$x_f := x_0 + (1 - \lambda)^{-1} \overrightarrow{x_0 f(x_0)}$$

est l'unique point fixe de f . Pour tout $x \in X$ on a

$$f(x) = f(x_f + \overrightarrow{x_f x}) = x_f + \lambda \overrightarrow{x_f x} \implies \overrightarrow{x_f f(x)} = \lambda \overrightarrow{x_f x}.$$

(ii) Ceci résulte de 1.6.7.

(1.6.13) Exercice. Décrire géométriquement le produit de deux homothéties $f_1 \circ f_2$. [Indication : choisir l'origine $x_0 \in X$ et écrire f_i sous la forme $f_i : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$, $f_i(\vec{t}) = \lambda_i \vec{t} + \vec{a}_i$.]

(1.6.14) Exercice. (i) Soient X et Y des espaces affines. Si x_0, \dots, x_m est une base affine de X , montrer que pour tout ensemble de $m + 1$ points $y_0, \dots, y_m \in Y$ il existe une unique application affine $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x_i) = y_i$ ($i = 0, \dots, m$). Si $X = K^m$, $Y = K^n$ et $f(x) = Ax + a$ (où $A \in M_{n,m}(K)$ et $a \in K^n$), déterminer A et a en termes des coordonnées de x_0, \dots, x_m et y_0, \dots, y_m .

(ii) Soit X un espace affine. Si $f \in A(X, X)$ vérifie $f \circ f = f$, alors f est une projection parallèle sur un sous-espace affine de X .

(iii) Soient X et Y des espaces affines. Alors une application $f : X \rightarrow Y$ est affine \iff f conserve le barycentre des ensembles de points pondérés.

(iv) Soit D une droite affine. Si une bijection $f : D \rightarrow D$ conserve le rapport des triplets de points $A, B, C \in D$, alors f est un isomorphisme affine.

(1.6.15) Exercice. Soit X un plan affine, soient A, B, A', B' quatre points distincts d'une droite affine $d \subset X$. On sait, d'après 1.6.14(i), qu'il existe une unique application affine $f : d \rightarrow d$ (resp., $g : d \rightarrow d$) telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ (resp., $g(A) = B'$, $g(B) = A'$).

(i) Si $C \in d$, construire géométriquement $f(C)$, $g(C)$.

(ii) Construire géométriquement tous les points $D \in d$ (resp., $E \in d$) tels que $f(D) = D$ (resp., $g(E) = E$).

(iii) Si $f(D) = D$ et $g(E) = E$, montrer que l'on a $[D, E, A, B'] = [D, E, A', B]$ (voir 2.5 ci-dessous pour la définition du birapport).

(1.6.16) Exercice. Considérons les coordonnées barycentriques $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ par rapport à une base affine A, B, C d'un plan affine réel X . On note $f : X \rightarrow X$ l'unique application affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$.

(i) Écrire f dans les coordonnées barycentriques.

- (ii) Déterminer tous les points fixes de f (= tous les points $P \in X$ tels que $f(P) = P$).
- (iii) En utilisant les coordonnées barycentriques, écrire l'équation d'une droite générale d qui passe par A . Déterminer les coordonnées barycentriques du point d'intersection $d \cap f(d)$.
- (iv) En utilisant les coordonnées cartésiennes $x = \lambda_1$ et $y = \lambda_2$, déterminer l'équation du lieu des points $d \cap f(d)$, lorsque d parcourt toutes les droites qui passent par A .
- (v) Interpréter géométriquement le résultat de (iv).
- (vi) Construire à la règle l'image $f(Q)$ d'un point $Q \in X$ donné.

(1.6.17) Exercice. Soit X un espace affine de dimension $n \geq 1$ sur un corps fini $K = \mathbf{F}_q$ à q éléments; soit $x \in X$ un point de X .

- (i) Déterminer le nombre de droites affines $d \subset X$ qui passent par x .
- (ii) Déterminer le nombre de droites affines $d \subset X$.
- (iii) Déterminer le nombre de sous-espaces affines $Y \subset X$ de dimension k ($1 \leq k \leq n$) qui passent par x .
- (iv) Déterminer le nombre de sous-espaces affines $Y \subset X$ de dimension k ($1 \leq k \leq n$).
- (v) Pourquoi a-t-on mis cet exercice dans le paragraphe 1.6 ?

(1.6.18) Exercice. (i) Soit X un espace affine; soient $f, g, h : X \rightarrow X$ des homothéties vérifiant $f \circ g \circ h = \text{id}$ (c'est à dire que $f(g(h(x))) = x$ pour tout $x \in X$). Que peut-on dire des rapports respectifs et des points fixes respectifs de f, g et h ?

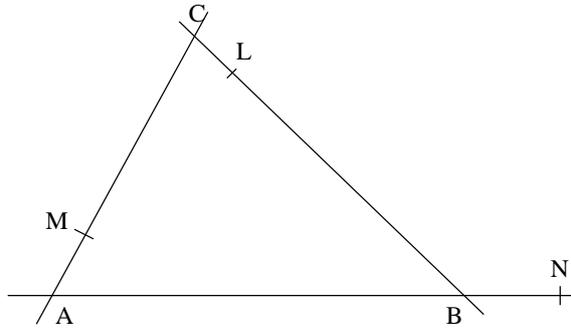
(ii) Soient L, M et N trois points d'un plan affine X qui ne sont pas alignés. Montrer qu'un triplet de points $A, B, C \in X$ (disjoint de L, M, N) vérifiant $L \in (BC)$, $M \in (CA)$ et $N \in (AB)$ est déterminé par les rapports

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{LC}}, \quad \beta = \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MA}}, \quad \gamma = \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{NB}},$$

c'est-à-dire que si l'on a $L \in (B'C')$, $M \in (C'A')$, $N \in (A'B')$ et

$$\frac{\overrightarrow{LB'}}{\overrightarrow{LC'}} = \alpha, \quad \frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{MA'}} = \beta, \quad \frac{\overrightarrow{NA'}}{\overrightarrow{NB'}} = \gamma,$$

alors on a $A' = A$, $B' = B$ et $C' = C$.



1.7 Produit semi-direct

(1.7.1) Exemple : le groupe $G = GA_n(K)$ a deux sous-groupes importants :

$$T = T(X) = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K^n \right\} \xrightarrow{\sim} K^n, \quad \begin{pmatrix} I_n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$$

(les translations $x \mapsto x + a$) et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(K) \right\} \xrightarrow{\sim} GL_n(K), \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A,$$

(les application linéaires $x \mapsto Ax$) qui vérifient les propriétés suivantes :

(1.7.1.1) $T \cap H = \{e\}$ ($e =$ l'élément neutre de G).

(1.7.1.2) $T \triangleleft G$, i.e. T est un sous-groupe distingué de G ($gTg^{-1} \subset T$ pour tout $g \in G$).

(1.7.1.3) Tout élément $g \in G$ se décompose comme $g = th$, $t \in T$, $h \in H$.

Quant à la dernière propriété, on a

$$\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.7.2) Produit semi-direct de deux sous-groupes. En général, soient G un groupe et T, H deux sous-groupes de G vérifiant (1.7.1.1-3).

Il résulte de (1.7.1.1) que la décomposition $g = th$ ($t \in T$, $h \in H$) d'un élément $g \in G$ est **unique**.

Grâce à (1.7.1.2), le groupe H agit sur T par conjugaison : pour tout $h \in H$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi(h) : T &\longrightarrow T \\ t &\mapsto {}^h t = hth^{-1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes et les applications $\varphi(h)$ définissent une action de H sur T , i.e. on a

$$e_t = t, \quad h({}^{h'}t) = {}^{hh'}t \quad (h, h' \in H; t \in T).$$

En 1.7.1 ci-dessus, on a

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & Aa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Aa \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond à l'action naturelle de $GL_n(K)$ sur K^n .

On dit que G est le **produit semi-direct** de ses sous-groupes T et H ; on note

$$G = T \rtimes H \quad \text{ou} \quad T \rtimes_{\varphi} H.$$

Le produit dans G se calcule en termes du produit dans T et H et de l'action φ : si $g_1, g_2 \in G$, on décompose $g_1 = t_1 h_1$, $g_2 = t_2 h_2$ ($t_1, t_2 \in T$, $h_1, h_2 \in H$) et on calcule

$$g_1 g_2 = t_1 h_1 t_2 h_2 = t_1 h_1 t_2 h_1^{-1} h_1 h_2 = t_1 ({}^{h_1} t_2) h_1 h_2.$$

L'application

$$\alpha : G \longrightarrow H, \quad g = th \mapsto h$$

est un homomorphisme de groupes dont le noyau est égal à T (cf. 1.6.11).

(1.7.3) Produit semi-direct de deux groupes. Plus généralement, soient T, H des groupes et φ une action de H sur T telle que $\varphi(h) : T \longrightarrow T$ ($t \mapsto {}^h t$) soit un homomorphisme de groupes, pour tout $h \in H$.

On définit le produit semi-direct

$$G = T \rtimes H = T \rtimes_{\varphi} H = \{(t, h) \mid t \in T, h \in H\}$$

comme l'ensemble $T \times H$ muni du produit

$$(t_1, h_1)(t_2, h_2) = (t_1({}^{h_1}t_2), h_1 h_2).$$

On vérifie que G est bien un groupe. Si l'on identifie T (resp. H) au sous-groupe $T \times \{e_H\} \subset G$ (resp. $\{e_T\} \times H \subset G$), où l'on a noté e_H (resp. e_T) l'élément neutre de H (resp. de T), alors G deviendra un produit semi-direct de T et H au sens de 1.7.2.

(1.7.4) En résumé, le groupe affine $GA_n(K)$ est isomorphe au produit semi-direct

$$GA_n(K) \xrightarrow{\sim} K^n \rtimes GL_n(K) \quad (1.7.4.1)$$

par rapport à l'action naturelle de $GL_n(K)$ sur K^n .

Plus généralement, les formules matricielles gardent leur sens sur n'importe quel anneau commutatif (unitaire) R : si l'on pose

$$R^* = \{a \in R \mid (\exists b \in R) \quad ab = 1\}$$

et

$$\begin{aligned} GL_n(R) &= \{g \in M_n(R) \mid (\exists h \in M_n(R)) \quad gh = I\} \\ &= \{g \in M_n(R) \mid \det(g) \in R^*\}, \end{aligned}$$

alors le groupe

$$GA_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(R), a \in R^n \right\} \subset GL_{n+1}(R)$$

est isomorphe au produit semi-direct $R^n \rtimes GL_n(R)$.

En particulier, on a

$$GA_1(R) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in R^*, a \in R \right\} \xrightarrow{\sim} R \rtimes R^*,$$

où R^* agit sur R par multiplication. Si $-1 \neq 1$ dans R , alors $GA_1(R)$ contient le sous-groupe suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\} \xrightarrow{\sim} R \rtimes \{\pm 1\}.$$

Bien sûr, la matrice

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

correspond à l'application "affine" $x \mapsto a \pm x$ ($x \in R$).

(1.7.5) Exercice. Pour $n \geq 3$, exprimer le groupe symétrique S_n et le groupe diédral D_n (le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés) comme un produit semi-direct $T \rtimes \{\pm 1\}$.

(1.7.6) Exercice. Y a-t-il un lien entre 1.7.4 et 1.7.5?

(1.7.7) Exercice (version abstraite de (1.7.4.1)). Soient X un espace affine et $x \in X$.

(i) Le stabilisateur $GA(X)_x$ s'identifie naturellement à $GL(\vec{X})$; plus précisément, l'application

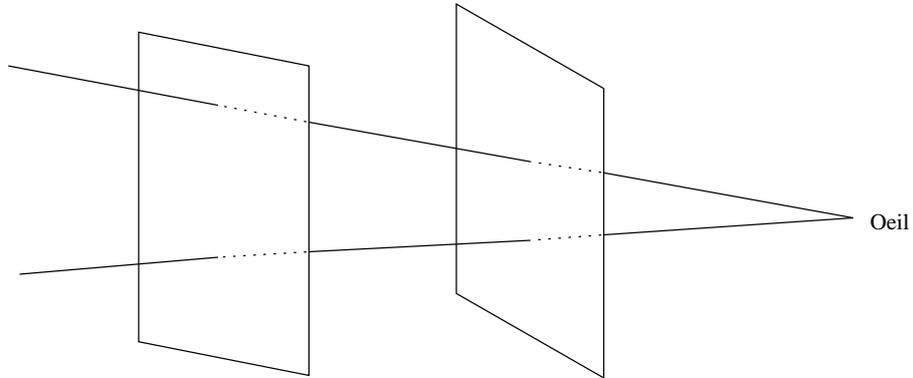
$$GA(X)_x \longrightarrow GL(\vec{X}), \quad f \mapsto \vec{f}$$

est un isomorphisme de groupes.

(ii) Le groupe affine $GA(X)$ est le produit semi-direct de ses sous-groupes $T(X) \rtimes GA(X)_x$, donc $GA(X)$ est isomorphe au produit semi-direct $\vec{X} \rtimes GL(\vec{X})$ (pour l'action naturelle de $GL(\vec{X})$ sur \vec{X}).

2. Géométrie projective

À l'origine du sujet était l'étude de la **perspective**, i.e. de la correspondance entre deux plans induite par une projection 'conique' (ou 'centrale'). Une perspective ne conserve pas le parallélisme; elle mélange les points 'usuels' et les points 'à l'infini'.



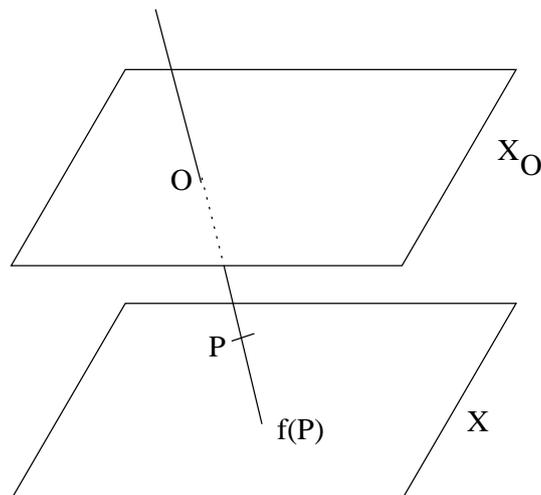
2.1 Introduction : points à l'infini

*“Unlike parallel lines,
it was inconceivable
that their views should ever meet,
even at infinity.”*

E. Crispin, *Holy disorders*

(2.1.1) Projection conique. Soit X un hyperplan dans un espace affine Z ; soit $O \in Z$, $O \notin X$. Notons X_O l'hyperplan parallèle à X qui contient le point O . La projection conique de centre O sur X est l'application suivante :

$$f : Z - X_O \longrightarrow X, \quad \{f(P)\} = X \cap (OP).$$



Si $P, Q \in Z - X_O$, alors on a

$$f(P) = f(Q) \iff (OP) = (OQ).$$

Il en résulte qu'on peut définir f en utilisant la bijection naturelle

$$F : \{D \subset Z \text{ droite affine} \mid O \in D, D \not\subset X_O\} \xrightarrow{\sim} X \quad (2.1.1.1)$$

$$D \mapsto D \cap X;$$

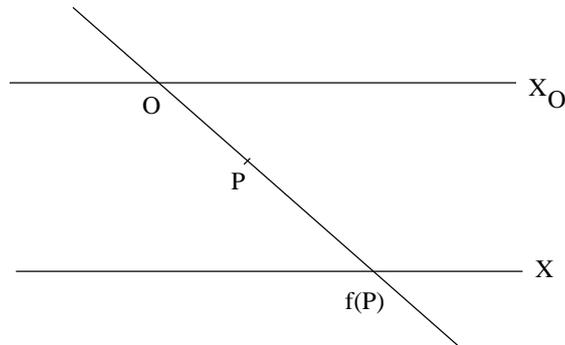
On a

$$(\forall P \in Z - X_O) \quad f(P) = F((OP)).$$

(2.1.2) Que faire avec les points $P \in X_O$? On aimerait ajouter à X un ensemble X_∞ des “points à l’infini” et définir un prolongement naturel de l’application f

$$\tilde{f} : Z - \{O\} \longrightarrow \tilde{X} = X \cup X_\infty.$$

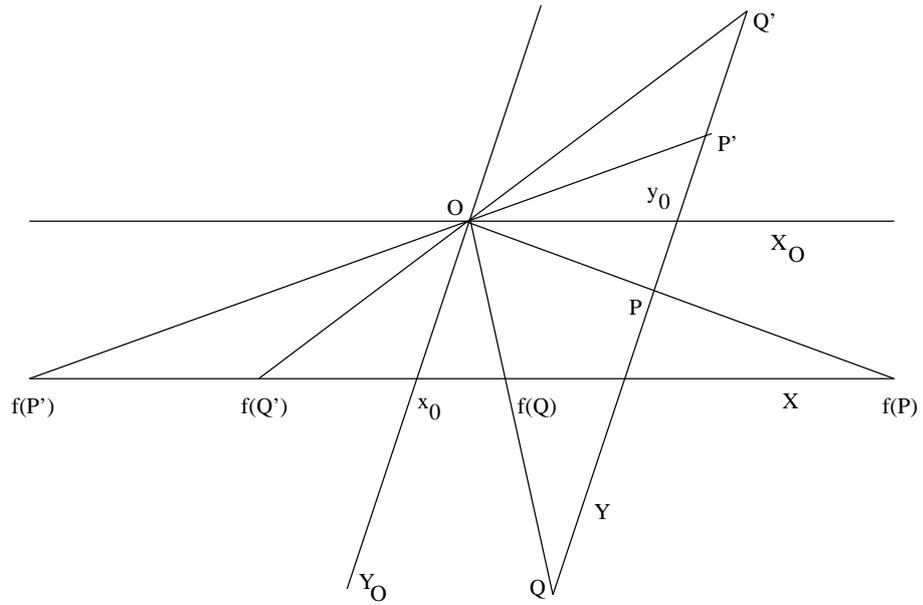
(2.1.3) Exemple : (i) Sous les hypothèses de 2.1.1, on suppose que $\dim(X) = 1$.



On ajoute à la droite X un unique point à l’infini $\infty = \infty_X$. On pose $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ et on définit l’application $\tilde{f} : Z - \{O\} \longrightarrow \tilde{X}$ comme

$$\tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \notin X_O \\ \infty, & P \in X_O - \{O\}. \end{cases}$$

(ii) On peut aussi étudier une perspective induite par f : soit $Y \subset Z$ une droite qui n’est pas parallèle à X et telle que $O \notin Y$. On note y_0 (resp. x_0) le point d’intersection $Y \cap X_O$ (resp. $X \cap Y_O$).



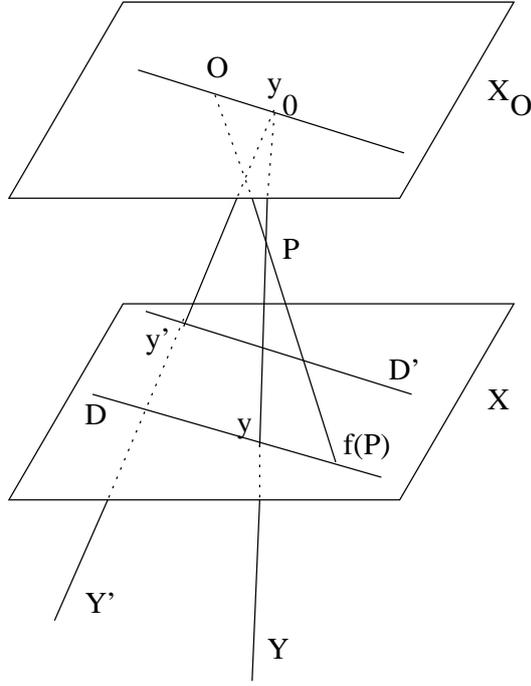
Si $P \in Y - \{y_0\}$ approche y_0 , alors $f(P)$ tend vers le point à l'infini ∞_X .

Si $Q \in Y - \{y_0\}$ tend vers le point à l'infini ∞_Y , alors $f(Q)$ approche x_0 .

Il est donc vraisemblable qu'on devrait définir un prolongement $g : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ 'naturel' de l'application $f|_{Y - \{y_0\}} : Y - \{y_0\} \longrightarrow X$ comme

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & P \neq y_0, \infty_Y \\ \infty_X = \tilde{f}(y_0), & P = y_0 \\ x_0, & P = \infty_Y. \end{cases} \quad (2.1.3.1)$$

(2.1.4) Le cas général. (i) Sous les hypothèses de 2.1.1, soit Y une droite qui n'est pas faiblement parallèle à X et telle que $O \notin Y$.



On a $Y \cap X = \{y\}$, $Y \cap X_O = \{y_0\}$, $y_0 \neq O$. La projection de $Y - \{y_0\}$ est égale à

$$f(Y - \{y_0\}) = \text{aff}(O, y_0, y) \cap X = D,$$

où D est la droite parallèle à (Oy_0) qui contient y . Si un point $P \in Y - \{y_0\}$ approche y_0 , alors $f(P)$ tend vers $\infty_D \in \tilde{D}$ (le point à l'infini de la droite D); on devrait donc avoir $\tilde{D} \subset \tilde{X}$ et

$$\tilde{f}(y_0) = \infty_D.$$

Le même argument s'applique à n'importe quelle droite $Y' \subset Z$ telle que $Y' \cap X_O = \{y_0\}$: dans ce cas $D' = f(Y' - \{y_0\})$ est la droite parallèle à (Oy_0) (donc à D) contenant y' , où $\{y'\} = Y' \cap X$; on obtient

$$\tilde{f}(y_0) = \infty_{D'},$$

donc

$$\infty_D = \infty_{D'},$$

Ceci suggère qu'on devrait avoir

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty_D \mid D \subset X \text{ droite affine}\}, \quad \infty_D = \infty_{D'} \iff D \parallel D'. \quad (2.1.4.1)$$

et

$$\tilde{f} : Z - \{O\}, \quad \tilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \notin X_O \\ \infty_D, & P \in X_O - \{O\}, D \subset X, D \parallel (OP). \end{cases}$$

On peut également prolonger la bijection F ; on obtient une bijection

$$\tilde{F} : \{D \subset Z \text{ droite affine} \mid O \in D\} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}, \quad \tilde{F}(D) = \begin{cases} F(D), & D \not\subset X_O \\ \infty_{D'}, & D \subset X_O, D' \subset X, D' \parallel D \end{cases} \quad (2.1.4.2)$$

vérifiant

$$(\forall P \in Z - \{O\}) \quad \tilde{f}(P) = \tilde{F}((OP)).$$

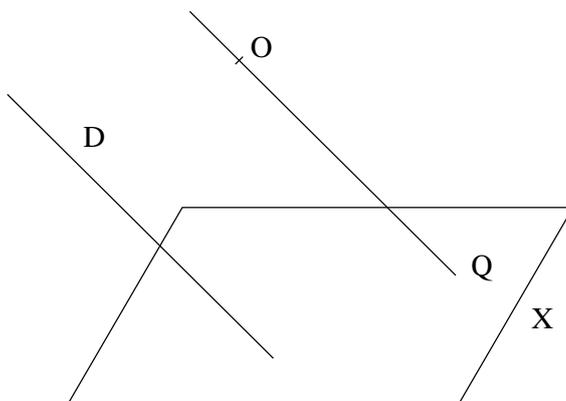
(ii) Si $Y \subset Z$ est un hyperplan qui ne contient pas O , alors on aimerait définir un prolongement naturel

$$g : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$$

de l'application

$$Y \hookrightarrow Z - \{O\} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}.$$

Il faut trouver l'image $g(\infty_D)$, pour toute droite affine $D \subset Y$. On peut remplacer Z par le plan affine engendré par O et la droite D ; la formule (2.1.3.1) alors montre que $g(\infty_D) = Q$ est l'unique point $Q \in X$ tel que $(OQ) \parallel D$, si l'on suppose que D n'est pas faiblement parallèle à X .



Si D est faiblement parallèle à X , alors il existe une droite $D' \parallel D$, $D' \subset X \cap Y$. Comme $\infty_D = \infty_{D'} \in \tilde{Y}$ et $f(P) = P$ pour tout $P \in D'$, on devrait définir

$$g(\infty_D) = g(\infty_{D'}) = \infty_{D'}.$$

(iii) Plus généralement, on peut prolonger f à une application $\tilde{f} : \tilde{Z} - \{O\} \longrightarrow \tilde{X}$, où l'on définit \tilde{Z} par la règle (2.1.4.1) : on pose

$$(\forall p \in Z - \{O\}) \quad \tilde{f}(P) = \tilde{f}(P)$$

et, pour toute droite affine $D \subset X$,

$$\tilde{f}(\infty_D) = \begin{cases} Q, & Q \in X, (OQ) \parallel D, \text{ si } D \text{ n'est pas faiblement parallèle à } X \\ \infty_D, & \text{ si } D \text{ est faiblement parallèle à } X. \end{cases}$$

(2.1.5) Coordonnées homogènes (exemple). On fixe des coordonnées cartésiennes x, y dans un plan affine H . Soient

$$D : y - ax - b = 0, \quad D' : y - ax - b' = 0$$

deux droites parallèles distinctes ($a, b, b' \in K$, $b \neq b'$). Où peut-on trouver le point $\infty_D = \infty_{D'}$?

Si $P = (x, y) \in H$, on écrit $x = X/Z$, $y = Y/Z$ et on considère le triplet (X, Y, Z) ($X, Y, Z \in K$, $Z \neq 0$) comme des coordonnées (homogènes) du point P . Pour tout $t \in K - \{0\}$, le triplet (tX, tY, tZ) représente aussi P .

On peut exprimer l'équation de la droite D en termes de coordonnées homogènes :

$$D = \frac{Y - aX - bZ}{Z} = 0.$$

On définit

$$\tilde{D} : Y - aX - bZ = 0, \quad \tilde{D}' : Y - aX - b'Z = 0$$

et on considère aussi les triplets (X, Y, Z) où $Z = 0$, qui correspondent aux points à l'infini H_∞ . En particulier, pour trouver l'intersection $\tilde{D} \cap \tilde{D}'$ il faut résoudre les équations

$$\begin{aligned} Y - aX - bZ = Y - aX - b'Z = 0 &\iff Y - aX - bZ = 0, \quad (b - b')Z = 0 \iff Z = 0, \quad Y = aX \iff \\ &\iff (X, Y, Z) = (X, aX, 0) = X(1, a, 0). \end{aligned}$$

Le point $\infty_D = \infty_{D'}$ est donc représenté par le triplet $(1, a, 0)$.

2.2 Espaces projectifs

Pour définir formellement $\tilde{X} = X \cup X_\infty$ (où X est un espace affine), on utilise la bijection (2.1.4.2) : on plonge X comme un hyperplan dans l'espace vectoriel \hat{X} et on identifie \tilde{X} à l'ensemble des droites $D \subset \hat{X}$ contenant $O = \vec{0}$ (i.e. à l'ensemble des droites vectorielles dans \hat{X}).

(2.2.1) Définition. L'espace projectif associé à un espace vectoriel V est l'ensemble des droites vectorielles de V :

$$\mathbf{P}(V) = \{D \subset V \mid D \text{ sous-espace vectoriel, } \dim(D) = 1\}.$$

En particulier, $\mathbf{P}(V)$ est vide (resp. un point) si $\dim(V) = 0$ (resp. si $\dim(V) = 1$). On pose

$$\dim(\mathbf{P}(V)) = \dim(V) - 1$$

(donc $\dim(\emptyset) = -1$). En particulier, la dimension de l'espace

$$\mathbf{P}^n(K) := \mathbf{P}(K^{n+1}) \quad (n \geq 0)$$

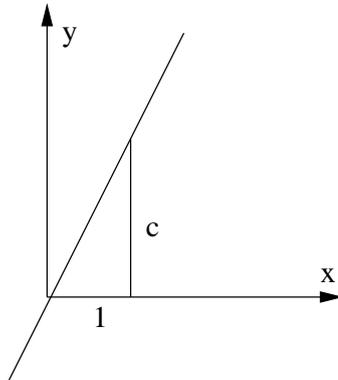
est égale à n . Si $\dim(\mathbf{P}(V)) = 1$ (resp. $\dim(\mathbf{P}(V)) = 2$), on dit que $\mathbf{P}(V)$ est une droite projective (resp. un plan projectif).

(2.2.2) Exemple : L'ensemble $\mathbf{P}^1(K)$ contient :

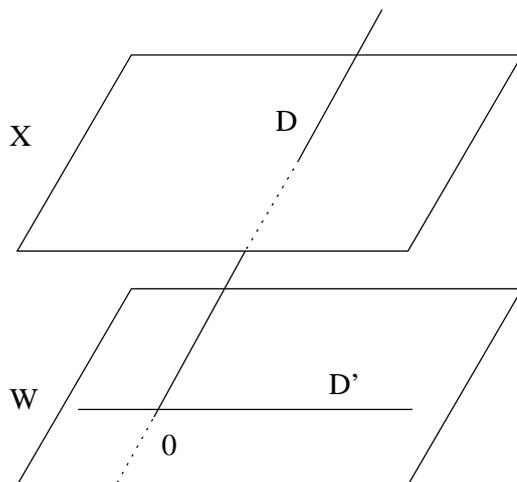
- la droite verticale ("de pente ∞ ") : $x = 0$;
- pour tout $c \in K$, la droite de pente c : $y - cx = 0$,

d'où une bijection naturelle

$$\text{pente} : \mathbf{P}^1(K) \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}. \quad (2.2.2.1)$$



(2.2.3) (Reformulation de 2.1.4(i)). Soient V un espace vectoriel, $W \subset V$ un hyperplan vectoriel et $v \in V, v \notin W$. Alors $X = v + W \subset V$ est un hyperplan affine de direction $\vec{X} = W, \vec{0} \notin X$.



L'ensemble $\mathbf{P}(V)$ se décompose naturellement

$$\mathbf{P}(V) = \{D \subset V \mid D \text{ droite vectorielle, } D \not\subset W\} \cup \{D' \subset W \mid D \text{ droite vectorielle}\}.$$

La bijection naturelle (2.1.1.1)

$$\begin{aligned} \{D \subset V \mid D \text{ droite vectorielle, } D \not\subset W\} &\xrightarrow{\sim} X \\ D &\mapsto D \cap X \end{aligned}$$

nous permet d'identifier $\mathbf{P}(V)$ à la réunion $X \cup \mathbf{P}(W)$. En particulier, $\mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(W)$ s'identifie ⁽¹⁾ à un espace affine de dimension $\dim(X) = \dim(W) = \dim(\mathbf{P}(V))$.

Par récurrence, on obtient une décomposition

$$\mathbf{P}(V) = X_n \cup X_{n-1} \cup \dots \cup X_0,$$

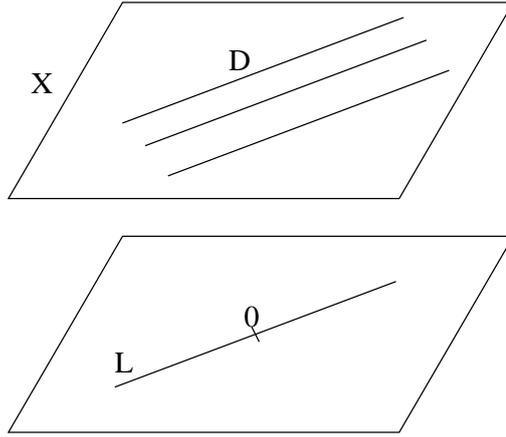
où chaque ensemble X_i est un espace affine de dimension i ($0 \leq i \leq n = \dim(\mathbf{P}(V))$). Si $K = \mathbf{F}_q$ est un corps fini à q éléments, on en déduit que

$$|\mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)| = q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1.$$

(2.2.4) Définition. Soit X un espace affine. Le **projectivisé de X** est l'espace $\tilde{X} = \mathbf{P}(\widehat{X})$. Comme X est un hyperplan affine dans \widehat{X} de direction \vec{X} , on peut identifier \tilde{X} à $X \cup \mathbf{P}(\vec{X})$. On dit que $X_\infty := \mathbf{P}(\vec{X})$ est l'**hyperplan à l'infini** de \tilde{X} .

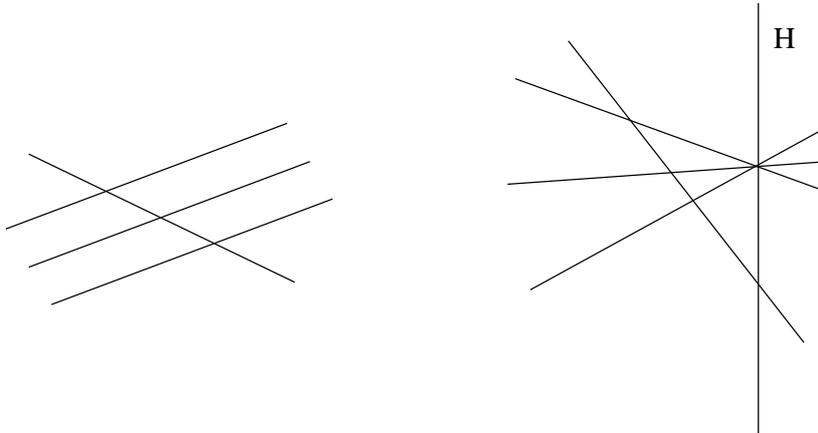
(2.2.5) La définition 2.2.4 équivaut à (2.1.4.1) : un élément $L \in X_\infty$ est une droite vectorielle $L \subset \vec{X}$; elle correspond à l'ensemble de toutes les droites affines $D \subset X$ de direction $\vec{D} = L$, qui ont le même point à l'infini $\infty_D = L \in \tilde{X} - X$.

⁽¹⁾ Plus canoniquement, $\mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(W)$ a une structure d'un espace affine de direction $\text{Hom}_K(V/W, W)$ (exercice!).



(2.2.6) Définition. Soit V un espace vectoriel. Un **sous-espace projectif** de $\mathbf{P}(V)$ est un sous-ensemble $\mathbf{P}(W) \subset \mathbf{P}(V)$, où W est un sous-espace vectoriel de V . Si $\dim(W) = \dim(V) - 1$, on dit que W est un **hyperplan projectif** dans $\mathbf{P}(V)$.

(2.2.7) Passage affine \implies projectif. Si Y est un sous-espace affine d'un espace affine X , alors \widehat{Y} est un sous-espace vectoriel de \widehat{X} , donc $\widetilde{Y} = \mathbf{P}(\widehat{Y}) = Y \cup Y_\infty$ est un sous-espace projectif de $\widetilde{X} = \mathbf{P}(\widehat{X}) = X \cup X_\infty$. Il en résulte que toute configuration "affine" $\{Y_i\}$ de sous-espaces affines de X donne lieu à une configuration "projective" $\{\widetilde{Y}_i\}$ de sous-espaces projectifs de \widetilde{X} . Voici un exemple, où X est un plan et $H = X_\infty$ la droite à l'infini.



(2.2.8) Passage projectif \implies affine. Réciproquement, si $\mathbf{P}(W)$ est un hyperplan projectif dans $\mathbf{P}(V)$ et $\{Z_i\}$ une configuration de sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(V)$ telle que $Z_i \not\subset \mathbf{P}(W)$, alors $X := \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(W)$ est un espace affine et $\{Y_i = Z_i \cap X\}$ est une configuration de sous-espaces affines de X .

(2.2.9) Proposition. Si $W_1, W_2 \subset V$ sont des sous-espaces vectoriels de V , alors $\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2) = \mathbf{P}(W_1 \cap W_2) \subset \mathbf{P}(V)$ est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(V)$ de dimension

$$\dim(W_1 \cap W_2) - 1 = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) - 1 = \dim(\mathbf{P}(W_1)) + \dim(\mathbf{P}(W_2)) - \dim(\mathbf{P}(W_1 + W_2)).$$

Preuve. On a $\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2) = \mathbf{P}(W_1 \cap W_2)$, par définition. La dimension de $\mathbf{P}(W_1 \cap W_2)$ se calcule à l'aide de la formule

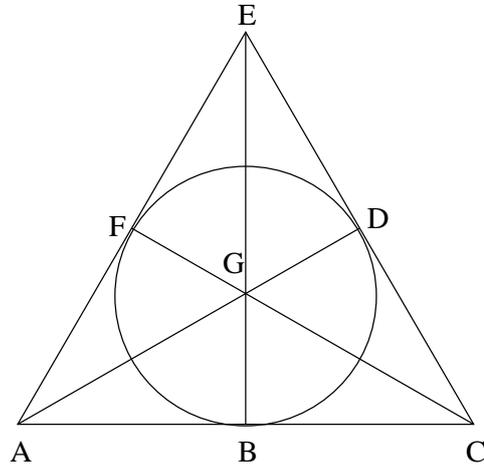
$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

(2.2.10) **Corollaire.** Si $\dim(\mathbf{P}(W_1)) + \dim(\mathbf{P}(W_2)) \geq \dim(\mathbf{P}(V))$, alors $\mathbf{P}(W_1) \cap \mathbf{P}(W_2) \neq \emptyset$.

(2.2.11) Si $m, n \geq 1$, alors on a $K^m \times K^n = K^{m+n}$, mais $\mathbf{P}^m(K) \times \mathbf{P}^n(K) \neq \mathbf{P}^{m+n}(K)$. Par exemple,

$$|\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_2)| = 2 + 1 = 3, \quad |\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_2)| = 2^2 + 2 + 1 = 7 \neq 3 \cdot 3.$$

Voici le plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_2)$ sur le corps \mathbf{F}_2 :



2.3 Coordonnées homogènes

(2.3.1) **Notation.** Soit V un espace vectoriel. On note

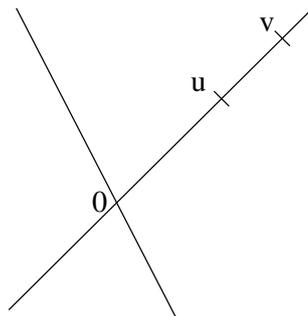
$$\pi : V - \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbf{P}(V)$$

l'application canonique (surjective)

$$\pi(v) = K \cdot v = (\vec{0}v).$$

On a

$$\pi(u) = \pi(v) \iff (\exists t \in K^*) \quad u = tv. \tag{2.3.1.1}$$



(2.3.2) **Coordonnées homogènes.** Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$ ($n \geq 0$). En choisissant une base de V , on identifie V à K^{n+1} , donc $\mathbf{P}(V)$ à $\mathbf{P}(K^{n+1}) = \mathbf{P}^n(K)$.

Soit

$$\pi : K^{n+1} - \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(K), \quad P \mapsto (\vec{0}P)$$

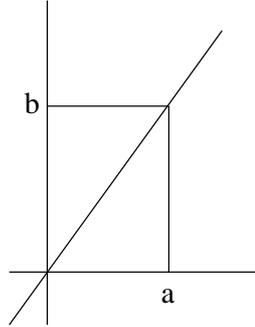
l'application définie en 2.3.1. ci-dessus. Pour tout vecteur non nul ${}^t(X_0, \dots, X_n) \in K^{n+1} - \{\vec{0}\}$ on note

$$(X_0 : \dots : X_n) := \pi({}^t(X_0, \dots, X_n)) \in \mathbf{P}^n(K).$$

On dit que (X_0, \dots, X_n) sont des **coordonnées homogènes** du point $P = (X_0 : \dots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K)$. D'après (2.3.1.1), on a

$$(X_0 : \dots : X_n) = (Y_0 : \dots : Y_n) \iff (\exists t \in K^*) \quad Y_0 = tX_0, \dots, Y_n = tX_n.$$

(2.3.3) Exemple ($n = 1$) : Si ${}^t(a, b) \in K^2 - \{\vec{0}\}$, alors $(a : b) \in \mathbf{P}^1(K)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur ${}^t(a, b)$.



Si $a \neq 0$, alors $(a : b) = (1 : \frac{b}{a})$ est la droite de pente $\frac{b}{a}$.

Si $a = 0$, alors $(a : b) = (0 : b) = (0 : 1)$ est la droite verticale.

Il en résulte que la bijection (2.2.2.1) s'écrit

$$\text{pente} : \mathbf{P}^1(K) \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}, \quad (a : b) \mapsto \frac{b}{a},$$

où on pose $\frac{b}{0} = \infty$ pour tout $b \in K^* = K - \{0\}$.

(2.3.4) Coordonnées homogènes et coordonnées affines. (i) Soit $n \geq 1$. L'ensemble

$$W = \{X_0 = 0\} = \{{}^t(0, X_1, \dots, X_n) \mid X_i \in K\} \subset K^{n+1}$$

resp.

$$Y = {}^t(1, 0, \dots, 0) + W = \{X_0 = 1\} = \{{}^t(1, X_1, \dots, X_n) \mid X_i \in K\} \subset K^{n+1}$$

est un hyperplan vectoriel (resp. un hyperplan affine) de K^{n+1} . On considère X_1, \dots, X_n comme des coordonnées cartésiennes dans Y , i.e. on identifie

$$Y \xrightarrow{\sim} K^n, \quad {}^t(1, t_1, \dots, t_n) \mapsto {}^t(t_1, \dots, t_n).$$

On a, comme en 2.2.3 ci-dessus, une bijection naturelle

$$F : \mathbf{P}^n(K) - \mathbf{P}(W) \xrightarrow{\sim} Y, \quad D \mapsto D \cap Y.$$

En utilisant les coordonnées homogènes, on a

$$H_0 := \mathbf{P}(W) = \{(0 : X_1 : \dots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K)\}$$

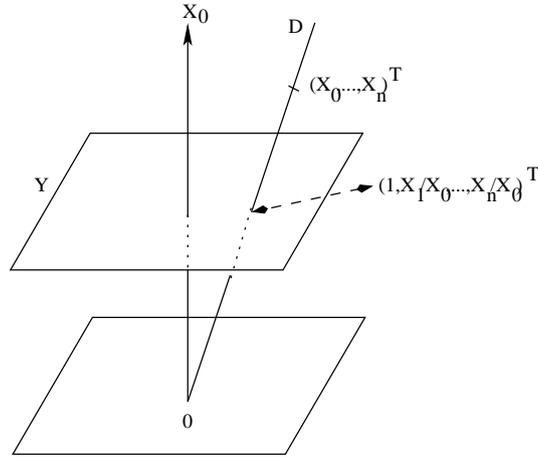
et l'application F s'écrit

$$F : (X_0 : \dots : X_n) \mapsto {}^t\left(1, \frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right), \\ (X_0 \neq 0)$$

donc

$$t_1 = \frac{X_1}{X_0}, \quad t_2 = \frac{X_2}{X_0} \quad \dots \quad t_n = \frac{X_n}{X_0} \quad (2.3.4.1)$$

sont des coordonnées cartésiennes (affines) dans l'espace affine $\mathbf{P}(V) - H_0$ (dont "l'hyperplan à l'infini" est égal à H_0).



(ii) Réciproquement, si l'on identifie $\widehat{K^n}$ à K^{n+1} et h à X_0 , alors le plongement $K^n \hookrightarrow \widehat{K^n} = \mathbf{P}^n(K)$ s'écrit

$${}^t(t_1, \dots, t_n) \mapsto (1 : t_1 : \dots : t_n).$$

L'hyperplan à l'infini $\mathbf{P}^n(K) - K^n$ est égal à H_0 dans ce cas.

(iii) Plus généralement, si $i \in \{0, \dots, n\}$, alors

$$H_i := \{(X_0 : \dots : X_{i-1} : 0 : X_{i+1} : \dots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K)\}$$

est un hyperplan projectif dans $\mathbf{P}^n(K)$ et les fonctions

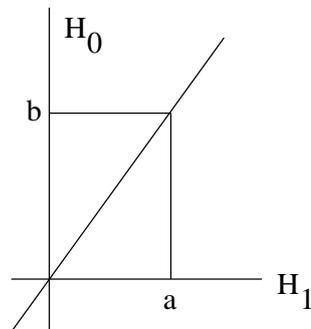
$$\frac{X_0}{X_i} \quad \dots \quad \frac{X_{i-1}}{X_i}, \quad \frac{X_{i+1}}{X_i} \quad \dots \quad \frac{X_n}{X_i} \quad (2.3.4.2)$$

sont des coordonnées cartésiennes dans l'espace affine $\mathbf{P}^n(K) - H_i$ (de dimension n). On a $H_0 \cap \dots \cap H_n = \emptyset$, donc

$$\mathbf{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n (\mathbf{P}^n(K) - H_i).$$

En résumé, l'espace projectif $\mathbf{P}^n(K)$ admet un recouvrement canonique par $n+1$ espaces affines $\mathbf{P}^n(K) - H_i$ ($i = 0, \dots, n$), dans lesquels on a des coordonnées affines (2.3.4.2).

(2.3.5) Exemple ($n = 1$) : On a $H_0 = \{(0 : 1)\} \subset \mathbf{P}^1(K) \supset \{(1 : 0)\} = H_1$.



La coordonnée affine z (resp. w) dans $\mathbf{P}^1(K) - H_0$ (resp. dans $\mathbf{P}^1(K) - H_1$) est égale à

$$\begin{aligned} z : \mathbf{P}^1(K) - H_0 &\xrightarrow{\sim} K & w : \mathbf{P}^1(K) - H_1 &\xrightarrow{\sim} K \\ (a : b), a \neq 0 &\mapsto \frac{b}{a} & (a : b), b \neq 0 &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Dans $\mathbf{P}^1(K) - (H_0 \cup H_1)$, on a $w = 1/z$.

(2.3.6) Exemple ($n = 2$) : Si l'on enlève du plan projectif $\mathbf{P}^2(K)$ la droite projective

$$H_0 = \{(0 : X_1 : X_2)\} \subset \mathbf{P}^2(K) \quad \text{resp.} \quad H_1 = \{(X_0 : 0 : X_2)\} \subset \mathbf{P}^2(K),$$

on obtient un plan affine avec des coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2(K) - H_0 &\xrightarrow{\sim} K^2 \\ (X_0 : X_1 : X_2), X_0 \neq 0 &\mapsto (x, y) = \left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right) \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2(K) - H_1 &\xrightarrow{\sim} K^2 \\ (X_0 : X_1 : X_2), X_1 \neq 0 &\mapsto (u, v) = \left(\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}\right) \end{aligned}$$

Dans $\mathbf{P}^2(K) - (H_0 \cup H_1)$, on a

$$(u, v) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right), \quad (x, y) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right).$$

(2.3.7) Sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}^n(K)$. Un hyperplan vectoriel $W \subset K^{n+1}$ s'écrit

$$W : a_0X_0 + \cdots + a_nX_n = 0 \quad (a_i \in K, \exists j \ a_j \neq 0).$$

La forme linéaire $f(X_0, \dots, X_n) = a_0X_0 + \cdots + a_nX_n$ **ne définit pas** une fonction du point $(X_0 : \cdots : X_n)$, mais l'égalité $f(X_0, \dots, X_n) = 0$ ne dépend que de $(X_0 : \cdots : X_n)$, puisque

$$f(tX_0, \dots, tX_n) = t f(X_0, \dots, X_n)$$

pour tout $t \in K^*$. L'hyperplan projectif $\mathbf{P}(W)$ est donc égal à

$$\mathbf{P}(W) = \{(X_0 : \cdots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K) \mid a_0X_0 + \cdots + a_nX_n = 0\}.$$

Si $W \subset K^{n+1}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $d \leq n$, alors il existe des hyperplans vectoriels $W_i \subset K^{n+1}$

$$W_i : a_{i0}X_0 + \cdots + a_{in}X_n = 0 \quad (i = 0, \dots, r = n - d)$$

tels que $W = W_0 \cap \cdots \cap W_r$, donc

$$\mathbf{P}(W) = \{(X_0 : \cdots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K) \mid (\forall i = 0, \dots, r) \ a_{i0}X_0 + \cdots + a_{in}X_n = 0\}.$$

(2.3.8) Passage affine \implies projectif. Soient t_1, \dots, t_n les coordonnées canoniques dans K^n et

$$Y : c_1t_1 + \cdots + c_nt_n + c = 0 \quad (c, c_i \in K, \exists j \ c_j \neq 0)$$

un hyperplan affine dans K^n . Si l'on identifie K^n à $\mathbf{P}^n(K) - H_0 = \widetilde{K^n} - H_0$ comme en 2.3.4(i)-(ii), alors l'équation de l'hyperplan projectif $\widetilde{Y} \subset \widetilde{K^n} = \mathbf{P}^n(K)$ est égal à

$$\widetilde{Y} : X_0 \left(c_1 \frac{X_1}{X_0} + \cdots + c_n \frac{X_n}{X_0} + c \right) = cX_0 + c_1X_1 + \cdots + c_nX_n = 0.$$

(cf. 2.1.5 ci-dessus).

(2.3.9) Passage projectif \implies affine. Réciproquement, soit

$$H : a_0X_0 + \cdots + a_nX_n = 0$$

un hyperplan projectif dans $\mathbf{P}^n(K)$. S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_i \neq 0$, alors $H \neq H_0$ et l'intersection $H \cap (\mathbf{P}^n(K) - H_0)$ est un hyperplan affine dans $\mathbf{P}^n(K) - H_0 \xrightarrow{\sim} K^n$, dont l'équation s'écrit, dans les coordonnées affines $t_i = X_i/X_0$ ($i = 1, \dots, n$) de $\mathbf{P}^n(K) - H_0$,

$$a_0 + a_1t_1 + \cdots + a_nt_n = 0.$$

(2.3.10) Plus généralement, soient

$$\ell_i = a_{i0}X_0 + \cdots + a_{in}X_n \quad (a_{ij} \in K, i = 0, \dots, n)$$

$n + 1$ formes linéaires linéairement indépendantes. Dans ce cas

$$\{\ell_0 = 0\} = \{(X_0 : \cdots : X_n) \in \mathbf{P}^n(K) \mid \ell_0(X_0, \dots, X_n) = 0\}$$

est un hyperplan projectif de $\mathbf{P}^n(K)$ et les fonctions

$$\frac{\ell_1}{\ell_0}, \quad \frac{\ell_2}{\ell_0}, \quad \dots, \quad \frac{\ell_n}{\ell_0}$$

sont des coordonnées cartésiennes dans l'espace affine $\mathbf{P}^n(K) - \{\ell_0 = 0\}$.

(2.3.11) Projectivée d'une courbe affine plane. (i) Comme en 2.3.4(ii) ci-dessus, on plonge

$$K^2 \hookrightarrow \widetilde{K^2} = \mathbf{P}^2(K), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (1 : x : y).$$

La droite à l'infini est égale à $H_0 = \{(0 : X_1 : X_2)\}$ et on a $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ pour $(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbf{P}^2(K) - H_0$.

Soit $f(x, y) \in K[x, y]$ un polynôme de degré $d \geq 1$; l'équation $f(x, y) = 0$ définit une courbe affine plane C . Le polynôme

$$F(X_0, X_1, X_2) := X_0^d f(X_1/X_0, X_2/X_0) \in K[X_0, X_1, X_2]$$

est **homogène de degré d** :

$$F(tX_0, tX_1, tX_2) = t^d F(X_0, X_1, X_2).$$

L'équation $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ définit une courbe projective plane $\widetilde{C} \subset \mathbf{P}^2$ qui "prolonge" C (car $\widetilde{C} \cap (\mathbf{P}^2 - H_0) = C$); on l'appelle la **projectivée de C** . Comme en 2.3.7, $F(X_0, X_1, X_2)$ **n'est pas** une fonction du point $(X_0 : X_1 : X_2)$, mais la condition $F(X_0, X_1, X_2) \stackrel{?}{=} 0$ ne dépend que de $(X_0 : X_1 : X_2)$.

(ii) Par exemple, la projectivée du cercle $C : x^2 + y^2 - 1 = 0$ est égale à

$$\widetilde{C} : X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0.$$

Quels sont les points à l'infini de la courbe \widetilde{C} ? On a

$$(X_0 : X_1 : X_2) \in \widetilde{C}(K) - C(K) \iff X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0, \quad X_0 = 0 \iff X_1^2 + X_2^2 = 0, \quad X_0 = 0.$$

En particulier, si $K = \mathbf{C}$, il y a deux points à l'infini :

$$\widetilde{C}(\mathbf{C}) - C(\mathbf{C}) = \{(0 : 1 : \pm i)\}.$$

(iii) Plus généralement, si

$$C' : (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad (a, b, r \in \mathbf{R}, r > 0)$$

est un cercle quelconque, alors on a

$$\tilde{C}' : (X_1 - aX_0)^2 + (X_2 - bX_0)^2 - r^2 X_0^2 = X_1^2 + X_2^2 - 2aX_0X_1 - 2bX_0X_2 + (a^2 + b^2 - r^2)X_0^2 = 0.$$

Le même calcul montre que

$$\tilde{C}'(\mathbf{C}) - C'(\mathbf{C}) = \{(0 : 1 : \pm i)\},$$

donc tous les cercles ont les mêmes deux points complexes (les “points cycliques”) à l’infini!

(2.3.12) Coniques projectives (exemple). Soit $K = \mathbf{R}$ et $C = C_0 : y - x^2 = 0$; on a $\tilde{C} : X_0X_2 - X_1^2 = 0$. On sait que l’on peut considérer **n’importe quelle droite projective** $D \subset \mathbf{P}^2(K)$ comme la droite à l’infini; en l’enlevant, on obtient une courbe affine $\tilde{C} - (\tilde{C} \cap D)$ dans l’espace affine $\mathbf{P}^2(K) - D$.

(i) Si $D = H_0 = \{(0 : X_1 : X_2)\}$, alors on a $\tilde{C} - (\tilde{C} \cap D) = C_0$.

(ii) Si $D = H_1 = \{(X_0 : 0 : X_2)\}$, on utilise les coordonnées affines $(u, v) = (X_0/X_1, X_2/X_1)$ dans $\mathbf{P}^2(K) - H_1$. L’équation de la courbe affine $C_1 = \tilde{C} - (\tilde{C} \cap H_1)$ s’écrit alors

$$C_1 : \frac{X_0X_2 - X_1^2}{X_1^2} = uv - 1 = 0.$$

(iii) Si $D = \{(X_0 : X_1 : X_2) \mid X_0 + X_2 = 0\}$, on utilise les coordonnées affines

$$(a, b) = \left(\frac{X_0 - X_2}{X_0 + X_2}, \frac{2X_1}{X_0 + X_2} \right)$$

dans $\mathbf{P}^2(K) - D$; la courbe affine $C_2 = \tilde{C} - (\tilde{C} \cap D)$ s’écrit

$$C_2 : \frac{(X_0 + X_2)^2 - (X_0 - X_2)^2 - (2X_1)^2}{(X_0 + X_2)^2} = 1 - a^2 - b^2 = 0.$$

En résumé, la parabole C_0 , l’hyperbole C_1 et le cercle C_2 ont la même projectivisée $\tilde{C}_i = \tilde{C}$ (voir aussi 3.8.8 ci-dessous)!

(2.3.13) Sous-espace projectif engendré. Soient $v_0, \dots, v_k \in K^{n+1} - \{\vec{0}\}$ et $P_i = \pi(v_i) = K \cdot v_i \in \mathbf{P}^n(K)$, i.e.

$$v_i = \begin{pmatrix} X_{i0} \\ \vdots \\ X_{in} \end{pmatrix}, \quad P_i = (X_{i0} : \dots : X_{in}) \quad (i = 0, \dots, k).$$

On appelle le plus petit sous-espace projectif de $\mathbf{P}^n(K)$ contenant les points P_0, \dots, P_k le **sous-espace projectif engendré** par ces points; il est égal à

$$\pi(\text{vect}(v_0, \dots, v_k)) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i X_{i0} : \dots : \sum_{i=0}^k \lambda_i X_{in} \right) \mid (\lambda_0 : \dots : \lambda_k) \in \mathbf{P}^k(K) \right\}.$$

Si les vecteurs v_0, \dots, v_k sont linéairement indépendants, on dit que les points P_0, \dots, P_k sont **projectivement indépendants**.

Par exemple, deux points $P = (X_0 : \dots : X_n)$ et $Q = (Y_0 : \dots : Y_n)$ de $\mathbf{P}^n(K)$ sont projectivement indépendants $\iff P \neq Q$. Si c’est le cas, alors la droite projective engendrée par P et Q est égale à

$$\{(\lambda X_0 + \mu Y_0 : \dots : \lambda X_n + \mu Y_n) \mid (\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1(K)\}.$$

(2.3.14) **Dualité projective.** Soient

$$\begin{aligned} H : a_0X_0 + \cdots + a_nX_n &= 0 & (\exists i \ a_i \neq 0) \\ H' : b_0X_0 + \cdots + b_nX_n &= 0 & (\exists j \ b_j \neq 0) \end{aligned}$$

deux hyperplans projectifs dans $\mathbf{P}^n(K)$. On a

$$H = H' \iff (\exists t \in K^*) \quad b_0 = ta_0, \dots, b_n = ta_n,$$

d'où une bijection

$$\begin{aligned} \{\text{hyperplans projectifs } H \subset \mathbf{P}^n(K)\} &\xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(K) \\ a_0X_0 + \cdots + a_nX_n = 0 &\mapsto (a_0 : \cdots : a_n). \end{aligned}$$

On peut donc associer à tout hyperplan (projectif) dans $\mathbf{P}^n(K)$ un point de l'espace projectif "dual". Si $H \neq H'$, alors les points $P = (a_0 : \cdots : a_n), P' = (b_0 : \cdots : b_n) \in \mathbf{P}^n(K)$ sont distincts. Un point

$$Q = (\lambda a_0 + \mu b_0 : \cdots : \lambda a_n + \mu b_n)$$

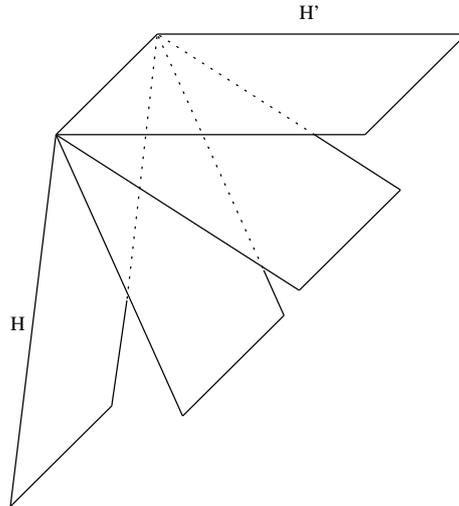
de la droite (projective) engendrée par P et P' est associé à l'hyperplan (projectif)

$$H_Q = (\lambda a_0 + \mu b_0)X_0 + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)X_n = 0.$$

On appelle l'ensemble d'hyperplans

$$\{H_Q \mid (PP')\} = \{L \subset \mathbf{P}^n(K) \mid L \text{ hyperplan (projectif), } L \supset H \cap H'\}$$

le faisceau d'hyperplans engendré par H et H' .



Par exemple, si $n = 2$, alors les droites (projectives)

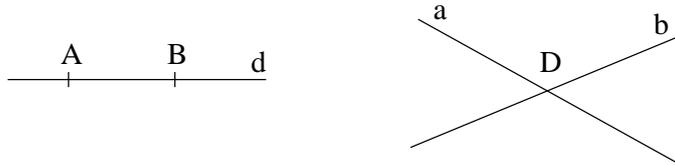
$$a : a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0, \quad d : d_0X_0 + d_1X_1 + d_2X_2 = 0$$

dans $\mathbf{P}^2(K)$ correspondent aux points $A = (a_0 : a_1 : a_2), D = (d_0 : d_1 : d_2) \in \mathbf{P}^2(K)$. L'équation d'incidence $a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 = 0$ étant symétrique, on a

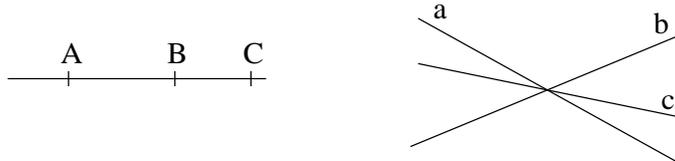
$$A \in d \iff d_0a_0 + d_1a_1 + d_2a_2 = 0 \iff a_0d_0 + a_1d_1 + a_2d_2 = 0 \iff D \in a.$$

En utilisant la même notation, on en déduit que

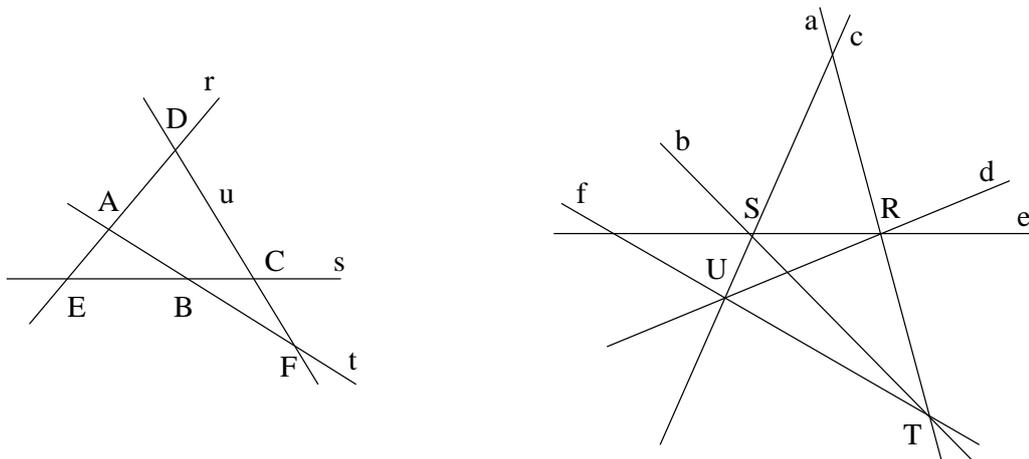
$$A, B \in d \iff D \in a \cap b$$



$C \in$ la droite engendrée par A et $B \iff c \in$ le faisceau de droites engendré par a et b .



Il en résulte que toute configuration de points $\{A_i\}$ et de droites $\{d_j\}$ dans $\mathbf{P}^2(K)$ donne lieu à la **configuration duale** des points $\{D_j\}$ et des droites $\{a_i\}$ telle que $D_j \in a_i \iff A_i \in d_j$:



(2.3.15) Dualité projective – version abstraite. Soit V un espace vectoriel; on note

$$V^* = \{\ell : V \longrightarrow K \mid \ell \text{ linéaire}\}$$

l'espace dual. Si $\ell \in V^* - \{\vec{0}\}$ est une forme linéaire non nulle, alors son ensemble des zéros $\text{Ker}(\ell) \subset V$ est un hyperplan vectoriel de V et on a

$$\text{Ker}(\ell) = \text{Ker}(\ell') \iff (\exists t \in K - \{0\}) \quad \ell' = t\ell;$$

l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V^*) &\xrightarrow{\sim} \{\text{hyperplans projectifs } H \subset \mathbf{P}(V)\} \\ \pi(\ell) &\mapsto \mathbf{P}(\text{Ker}(\ell)) = \{\ell = 0\} \end{aligned}$$

est donc bijective. Le **dual projectif** d'un sous-espace projectif $\mathbf{P}(W) \subset \mathbf{P}(V)$ est le sous-espace projectif $\mathbf{P}(W^\perp) \subset \mathbf{P}(V^*)$ (de dimension $\dim(\mathbf{P}(W^\perp)) = \dim(\mathbf{P}(V)) - \dim(\mathbf{P}(W)) - 1$), où l'on a noté $W^\perp = \{\ell \in V^* \mid \ell(W) = 0\}$.

(2.3.16) Exercice. Soit X un espace projectif réel de dimension $\dim(X) = 3$. Soient $d_0, d_1, d_2 \subset X$ trois droites projectives telles que $d_0 \cap d_1 = d_1 \cap d_2 = d_2 \cap d_0 = \emptyset$.

(i) Montrer qu'il n'y a aucun plan projectif $Y \subset X$ contenant deux droites d_i, d_j ($0 \leq i < j \leq 2$).

(ii) Montrer que pour tout point $P_0 \in d_0$ il existe une unique droite projective $d(P_0) \subset X$ qui passe par P_0 et qui intersecte d_1 et d_2 .

(iii) On suppose que $X = \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ et que l'on a

$$(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 1 : 0 : 0) \in d_0, \quad (0 : 0 : 1 : 0), (0 : 0 : 0 : 1) \in d_1, \\ (1 : 0 : 1 : 0), (0 : 1 : 0 : 1) \in d_2.$$

Déterminer les coordonnées homogènes d'un point général $P_i \in d_i$ ($i = 0, 1, 2$). Étant donné $P_0 \in d_0$, déterminer les coordonnées homogènes des points $d(P_0) \cap d_1, d(P_0) \cap d_2$ et d'un point général $P \in d(P_0)$.

(iv) Déterminer l'ensemble

$$\{P = (X_0 : X_1 : X_2 : X_3) \in \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \mid \exists \text{ droite } d \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{R}), P \in d, d \text{ intersecte } d_0, d_1, d_2\}.$$

2.4 Applications projectives

(2.4.1) Définition. Soient V et V' des espaces vectoriels et $f : V \rightarrow V'$ une application linéaire. Si $D \subset V$ est une droite vectorielle, alors on a

$$f(D) = \begin{cases} \text{droite vectorielle dans } V', & \text{si } D \not\subset \text{Ker}(f) \\ \{\vec{0}\}, & \text{si } D \subset \text{Ker}(f). \end{cases}$$

Il en résulte que f induit une **application projective**

$$\mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\text{Ker}(f)) \rightarrow \mathbf{P}(V') \\ D \mapsto f(D).$$

En particulier, si f est injectif, alors $\mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(V) \rightarrow \mathbf{P}(V')$ est défini partout.

Si f est bijectif, $\mathbf{P}(f)$ l'est aussi; on dit que $\mathbf{P}(f)$ est une **homographie (projective)**.

En général, si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim(V) = \dim(W)$ tel que $W \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, alors f induit un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} V'$, donc une homographie $\mathbf{P}(W) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(V')$.

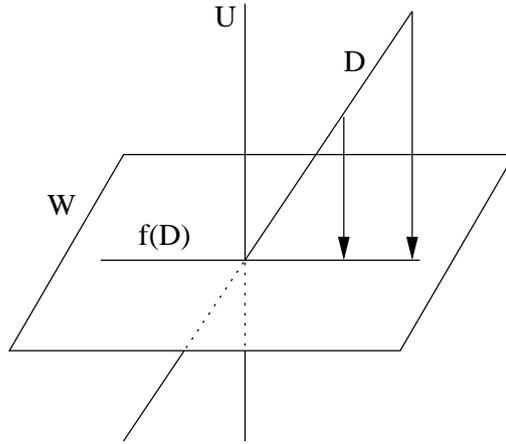
(2.4.2) Exemples. (i) **Projection conique et perspective.** Supposons que $\dim(V) \geq 3$. Soit $W \subset V$ un hyperplan vectoriel et $U \subset V, U \not\subset W$ une droite vectoriel; alors on a $V = W \oplus U$. La projection sur W de direction U

$$f : V \rightarrow W, \quad f(w + u) = w \quad (w \in W, u \in U)$$

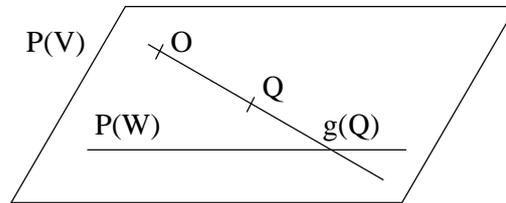
induit l'application projective

$$g = \mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(V) - \{O\} \rightarrow \mathbf{P}(W) \quad (O = \mathbf{P}(U)).$$

Pour toute droite vectoriel $D \subset \mathbf{P}(V), D \neq U$, les droites U, D et $f(D)$ sont coplanaires :



Il en résulte que les points $O = \pi(U)$, $Q = \pi(D)$ et $g(Q) = \pi(f(D))$ de $\mathbf{P}(W)$ sont alignés, donc g n'est rien d'autre que la projection conique sur $\mathbf{P}(W)$ de centre O :



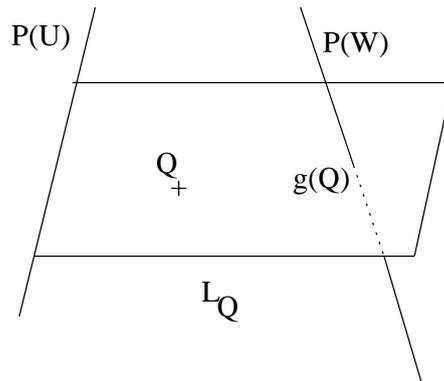
pour tout $Q \in \mathbf{P}(V) - \{O\}$, on a $\{g(Q)\} = (OQ) \cap \mathbf{P}(W)$.

Si $W' \subset V$ est un hyperplan tel que $U \not\subset W'$, alors la restriction de f à W' définit une bijection $W' \xrightarrow{\sim} W$, donc une homographie $\mathbf{P}(W') \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(W)$ (la "perspective conique" induite par f).

(ii) Plus généralement, si $V = W \oplus U$, où $\dim(W), \dim(U) \geq 1$, alors la projection sur W de direction U induit l'application projective ("projection de centre $\mathbf{P}(U)$ sur $\mathbf{P}(W)$ ")

$$g : \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(U) \longrightarrow \mathbf{P}(W), \quad \{g(Q)\} = \mathbf{P}(W) \cap L_Q,$$

où on l'a noté L_Q le sous-espace projectif de $\mathbf{P}(V)$ engendré par $\mathbf{P}(U)$ et $Q \in \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(U)$.



(iii) Formulaire : si

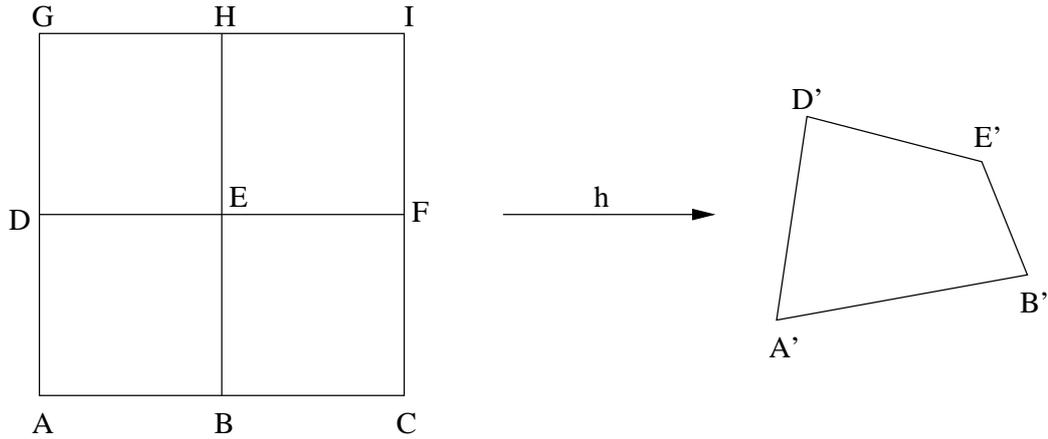
$$W = \{^t(x_0, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \mid x_i \in K\}, \quad U = \{^t(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) \mid x_i \in K\},$$

alors on a

$$g : (X_0 : \dots : X_n) \mapsto (X_0 : \dots : X_m) \quad (\exists i = 0, \dots, m; X_i \neq 0).$$

(iv) En général, une application projective $g = \mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\text{Ker}(f)) \longrightarrow \mathbf{P}(V')$ **conserve alignement** : soient $P, Q, R \in \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\text{Ker}(f))$ trois points distincts qui appartiennent à une droite projective $\mathbf{P}(W) \subset \mathbf{P}(V)$ ($W \subset V$, $\dim(W) = 2$). Si $W \cap \text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$, alors $\dim(f(W)) = 1$, $g(\mathbf{P}(W)) = \{g(P)\} = \{g(Q)\} = \{g(R)\}$. Si $W \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, alors $\dim(f(W)) = 2$ et les points $g(P), g(Q), g(R)$ appartiennent à la droite projective $g(\mathbf{P}(W)) = \mathbf{P}(f(W))$.

(2.4.3) Exercice. Soient $ABED, BCFE, DEHG$ et $EFIH$ quatre carrés dans $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Étant donné les images $A' = h(A), B' = h(B), E' = h(E)$ et $D' = h(D)$ par une homographie $h : \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, construire à la règle les points $C' = h(C), F' = h(F), G' = h(G), H' = h(H)$ et $I' = h(I)$.



(2.4.4) Définition. Soit V un espace vectoriel. Le **groupe projectif** de $\mathbf{P}(V)$ est

$$GP(\mathbf{P}(V)) = \{g : \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V) \mid g \text{ homographie}\}.$$

(2.4.5) Proposition. L'application

$$GL(V) \longrightarrow GP(\mathbf{P}(V)), \quad f \mapsto \mathbf{P}(f)$$

induit un isomorphisme de groupes

$$PGL(V) := GL(V)/K^* \cdot \text{id} \xrightarrow{\sim} GP(\mathbf{P}(V)).$$

Preuve. Le morphisme $f \mapsto \mathbf{P}(f)$ est surjectif; f est contenu dans son noyau $\iff f(D) = D$ pour toute droite vectorielle de $V \iff$ tout vecteur non nul de V est un vecteur propre de $f \iff f = \lambda \cdot \text{id}$ ($\lambda \in K - \{0\}$).

(2.4.6) Corollaire. En choisissant un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} K^{n+1}$ ($n = \dim(\mathbf{P}(V))$), on obtient un isomorphisme de groupes

$$PGL_{n+1}(K) := GL_{n+1}(K)/K^* \cdot I \xrightarrow{\sim} GP(\mathbf{P}(V)),$$

c'est-à-dire que toute matrice $f \in GL_{n+1}(K)$ induit l'application projective

$$\mathbf{P}(f) : (X_0 : \dots : X_n) \mapsto (Y_0 : \dots : Y_n), \quad \text{où} \quad f \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

et que l'on a

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{P}(f') \iff (\exists t \in K^*) \quad f' = tf.$$

(2.4.7) Exemples. (i) ($n = 1$) Si l'on utilise l'identification

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1(K) &\xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\} \\ (a : b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

alors $z \in K$ (resp. ∞) correspond à la droite $K \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$). Une matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$$

agit sur $\mathbf{P}^1(K)$ de la manière suivante :

$$g : K \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = \begin{cases} K \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{si } cz + d \neq 0 \\ K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } cz + d = 0, \end{cases}$$

$$g : K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{cases} K \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{si } c \neq 0 \\ K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

d'où l'action induite sur $K \cup \{\infty\}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{si } cz + d \neq 0 \\ \infty, & \text{si } cz + d = 0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{si } c \neq 0 \\ \infty, & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

(ii) ($n = 2$) En utilisant des coordonnées affines

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2(K) - \{X_2 = 0\} &\xrightarrow{\sim} K^2 \\ (X_0 : X_1 : X_2) &\mapsto (x, y) = \left(\frac{X_0}{X_2}, \frac{X_1}{X_2} \right), \end{aligned}$$

l'action naturelle de $GL_3(K)$ sur K^3

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 \\ a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ a_{20}X_0 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

s'écrit, sur $\mathbf{P}^2(K) - \{X_2 = 0\}$, comme

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} (x, y) = \left(\frac{Y_0}{Y_2}, \frac{Y_1}{Y_2} \right) = \left(\frac{a_{00}x + a_{01}y + a_{02}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}}, \frac{a_{10}x + a_{11}y + a_{12}}{a_{20}x + a_{21}y + a_{22}} \right)$$

(si $a_{20}x + a_{21}y + a_{22} \neq 0$).

(2.4.8) Proposition (Géométrie affine \iff géométrie projective avec un hyperplan distingué). Soit X un espace affine, $\tilde{X} = \mathbf{P}(\hat{X}) = X \cup \mathbf{P}(\vec{X})$; on note $H = \mathbf{P}(\vec{X})$ l'hyperplan à l'infini de \tilde{X} . Alors l'application

$$\begin{aligned} GA(X) &\longrightarrow \{g \in GP(\tilde{X}) \mid g(H) = H\} \\ f &\mapsto \tilde{f} = \mathbf{P}(\hat{f}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Preuve. En choisissant des coordonnées cartésiennes dans X , on peut supposer que

$$X = K^n \times \{1\}, \quad \hat{X} = K^{n+1}, \quad \vec{X} = K^n \times \{0\};$$

dans ce cas on a

$$GA(X) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(K), a \in K^n \right\}.$$

Si $g \in GL_{n+1}(K)$, alors on a

$$g(K^n \times \{0\}) = K^n \times \{0\} \iff g = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad B \in GL_n(K), b \in K^n.$$

Il s'agit donc de démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(K), a \in K^n \right\} &\longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid B \in GL_n(K), b \in K^n \right\} / K^* \cdot I \\ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est bijective; on note que son inverse est égal à

$$\begin{pmatrix} B & b \\ 0 & t \end{pmatrix} \mapsto t^{-1} \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1}B & t^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.4.9) Exercice (voir aussi 2.3.16). Soient d_1, \dots, d_n des droites "générales" dans un espace projectif de dimension 3. Y a-t-il une droite qui intersecte toutes les droites d_1, \dots, d_n ?

2.5 Le birapport

(2.5.1) Définition. Soit $\mathbf{P}(V)$ un espace projectif de dimension $\dim(\mathbf{P}(V)) = n \geq 1$. Un **repère projectif** dans $\mathbf{P}(V)$ est un ensemble P_0, \dots, P_{n+1} de $n+2$ points dont $n+1$ quelconques sont projectivement indépendants.

(2.5.2) Proposition. Pour tout repère projectif P_0, \dots, P_{n+1} de $\mathbf{P}(V)$ ($n = \dim(\mathbf{P}(V)) \geq 1$) il existe une unique homographie $g : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(K)$ telle que

$$(\forall i = 0, \dots, n) \quad g(P_i) = \underbrace{(0 : \dots : 1 : \dots : 0)}_{i\text{-ième}}, \quad g(P_{n+1}) = (1 : 1 : \dots : 1).$$

Preuve. Pour tout $i = 0, \dots, n+1$ on choisit $v_i \in V$, $\pi(v_i) = P_i$. On note $f_1 : V \xrightarrow{\sim} K^{n+1}$ l'unique isomorphisme pour lequel les vecteurs $f_1(v_0), \dots, f_1(v_n)$ forment la base canonique e_0, \dots, e_n de K^{n+1} . On a $f_1(v_{n+1}) = c_0 e_0 + \dots + c_n e_n$, où les scalaires c_i sont non nuls; on définit $f = \text{diag}(c_0^{-1}, \dots, c_n^{-1}) \circ f_1$ et $g = \mathbf{P}(f)$.

Si $g' : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n(K)$ est une autre homographie ayant la même propriété, alors la homographie $g' \circ g^{-1} \in PGL_{n+1}(K)$ est représentée par une matrice $h \in GL_{n+1}(K)$ vérifiant

$$h(e_i) = \lambda_i e_i \quad (i = 0, \dots, n), \quad h(e_0 + \dots + e_n) = \lambda(e_0 + \dots + e_n)$$

($\lambda_i, \lambda \in K^*$). La première égalité entraîne $h = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, donc

$$\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda(e_0 + \dots + e_n) \implies h = \lambda I \implies g' = g.$$

(2.5.3) Corollaire. Si P_0, \dots, P_{n+1} (resp. Q_0, \dots, Q_{n+1}) est un repère projectif de $\mathbf{P}(V)$, alors il existe une unique homographie $g \in GP(\mathbf{P}(V))$ telle que l'on ait $(\forall i = 0, \dots, n+1) \quad g(P_i) = Q_i$.

(2.5.4) Corollaire-Définition ($n = 1$). Soient A, B et C trois points distincts d'une droite projective $X = \mathbf{P}(V)$. Il existe une unique homographie $g : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \tilde{K} = K \cup \{\infty\}$ telle que $g(A) = \infty$, $g(B) = 0$, $g(C) = 1$. Si $D \in \mathbf{P}(V)$, le **birapport** des points A, B, C et D est l'élément

$$[A, B, C, D] := g(D) \in K \cup \{\infty\}.$$

L'application $g : \mathbf{P}(V) \longrightarrow K \cup \{\infty\}$, $D \mapsto [A, B, C, D]$ étant bijective, on a $D \neq A, B, C \iff [A, B, C, D] \in K - \{0, 1\}$. Si $\mathbf{P}(V) = K \cup \{\infty\}$, alors on a $[\infty, 0, 1, \lambda] = \lambda$, pour tout $\lambda \in K \cup \{\infty\}$ (puisque $g = \text{id}$ dans ce cas).

(2.5.5) Formule explicite pour le birapport. Fixons un point $\infty_X \in X$ (distinct de A, B et C) de la droite projective X et une coordonnée affine $z : X - \{\infty_X\} \xrightarrow{\sim} K$. On note $z_A, z_B, z_C \in K$ les coordonnées respectives des points A, B, C . On cherche à trouver une homographie $g(z) = (az + b)/(cz + d)$ telle que $g(z_A) = \infty$, $g(z_B) = 0$ et $g(z_C) = 1$. Les deux premières conditions entraînent $g(z) = t(z - z_B)/(z - z_A)$; la troisième détermine le scalaire $t = (z_C - z_A)/(z_C - z_B)$, donc on a

$$g(z) = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \frac{z - z_B}{z - z_A}, \quad [A, B, C, D] = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}$$

si $D \neq \infty_X$. Si $D = \infty_X$, alors le birapport

$$[A, B, C, \infty_X] = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{CA}{CB}$$

coïncide avec le rapport (affine) des points A, B et C sur la droite affine $X - \{\infty_X\}$.

(2.5.6) Proposition. Soient $h : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(V')$ une homographie entre deux droites projectives et $A, B, C \in \mathbf{P}(V)$ trois points distincts. Alors on a, pour tout $D \in \mathbf{P}(V)$,

$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'],$$

où l'on a posé $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ et $D' = h(D)$,

Preuve. Si $g' : \mathbf{P}(V') \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ est une homographie telle que

$$g'(A') = \infty, \quad g'(B') = 0, \quad g'(C') = 1,$$

alors l'homographie $g = g' \circ h : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ satisfait

$$g(A) = \infty, \quad g(B) = 0, \quad g(C) = 1,$$

donc

$$[A, B, C, D] = g(D) = g'(h(D)) = g'(D') = [A', B', C', D'].$$

On pourrait également choisir un point $\infty \in \mathbf{P}(V)$ (resp. $\infty' \in \mathbf{P}(V')$) et une coordonnée affine z (resp. z') dans $\mathbf{P}(V) - \{\infty\}$ (resp. $\mathbf{P}(V') - \{\infty'\}$); l'homographie h s'écrit alors

$$z' = h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

donc

$$\begin{aligned} z'_{D'} - z'_{B'} &= \frac{az_D + b}{cz_D + d} - \frac{az_B + b}{cz_B + d} = \frac{(ad - bc)(z_D - z_B)}{(cz_D + d)(cz_B + d)}, & \frac{z'_{D'} - z'_{B'}}{z'_{D'} - z'_{A'}} &= \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \frac{cz_A + d}{cz_B + d}, \\ \frac{z'_{C'} - z'_{A'}}{z'_{C'} - z'_{B'}} &= \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \frac{cz_B + d}{cz_A + d}, & \frac{z'_{C'} - z'_{A'}}{z'_{C'} - z'_{B'}} \frac{z'_{D'} - z'_{B'}}{z'_{D'} - z'_{A'}} &= \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}. \end{aligned}$$

(2.5.7) Proposition. Si $h : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(V')$ est une bijection entre deux droites projectives qui conserve le birapport des quadruplets de points distincts, alors h est une homographie.

Preuve. Fixons des homographies $f' : \mathbf{P}(V') \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ et $f : K \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(V)$; en remplaçant h par $f' \circ h \circ f$ on peut supposer que $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(V') = K \cup \{\infty\}$. D'après 2.5.3 il existe une homographie $g : K \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ telle que $g(P) = h(P)$ pour $P = \infty, 0, 1$. La bijection $h' : g^{-1} \circ h : K \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ fixe les points $\infty, 0, 1$ et conserve le birapport, donc on a, pour tout $\lambda \in K - \{0, 1\}$,

$$h'(\lambda) = [\infty, 0, 1, h'(\lambda)] = [h'(\infty), h'(0), h'(1), h'(\lambda)] = [\infty, 0, 1, \lambda] = \lambda,$$

i.e. $h' = \text{id}$ et $h = g$.

(2.5.8) Proposition (L'action des permutations). Soient A, B, C et D quatre points distincts d'une droite affine. En utilisant la notation

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = [A, B, C, D],$$

on a :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}.$$

Si $[A, B, C, D] = \lambda$, alors on a

$$\begin{aligned} [A, B, C, D] &= \lambda, & [B, A, C, D] &= 1/\lambda, & [A, C, B, D] &= 1 - \lambda, \\ [C, B, A, D] &= \lambda/(\lambda - 1), & [B, C, A, D] &= (\lambda - 1)/\lambda, & [C, A, B, D] &= 1/(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Preuve. La première relation est une conséquence de la formule 2.5.5. Pour déterminer, par exemple, la valeur $[C, B, A, D]$, soit $g : K \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} K \cup \{\infty\}$ l'unique homographie telle que $g(A) = \infty$, $g(B) = 0$ et $g(C) = 1$; l'image du quadruplet (C, B, A, D) est alors égale à $g(C, B, A, D) = (1, 0, \infty, \lambda)$. L'homographie $f_1(z) = 1/(1 - z)$ envoie 1 vers l'infini, donc $f_1 \circ g(C, B, A, D) = (\infty, 1, 0, 1/(1 - \lambda))$. L'homographie $f_2(z) = 1 - z$ échange 0 et 1 (et fixe ∞), donc on a $f_2 \circ f_1 \circ g(C, B, A, D) = (\infty, 0, 1, 1 - 1/(1 - \lambda))$. Il en résulte que

$$[C, B, A, D] = 1 - 1/(1 - \lambda) = \lambda/(\lambda - 1).$$

(2.5.9) Proposition (Formule de Laguerre). L'angle orienté des droites distinctes D et D' dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 est égal à

$$\frac{1}{2i} \log [P_+, P_-, \infty_D, \infty_{D'}] \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z},$$

où $P_{\pm} = (\pm i : 1 : 0)$ sont deux points "cycliques" à l'infini.

Preuve. Les droites D et D' s'écrivent

$$D : ay - bx - c = 0, \quad D' : a'y - b'x - c' = 0.$$

Pour calculer leurs projectivisées, on pose $x = X_0/X_2, y = X_1/X_2$; on obtient

$$\tilde{D} : aX_1 - bX_0 - cX_2 = 0, \quad \tilde{D}' : a'X_1 - b'X_0 - c'X_2 = 0,$$

donc

$$\infty_D = (a : b : 0), \quad \infty_{D'} = (a' : b' : 0).$$

Pour simplifier, on suppose que les droites D et D' ne sont pas horizontales, i.e. $b, b' \neq 0$. Dans ce cas on a

$$\infty_D = \left(\frac{a}{b} : 1 : 0\right) = (\cotg(\alpha) : 1 : 0), \quad \infty_{D'} = \left(\frac{a'}{b'} : 1 : 0\right) = (\cotg(\alpha') : 1 : 0),$$

donc

$$\begin{aligned} [P_+, P_-, \infty_D, \infty_{D'}] &= [i, -i, \cotg(\alpha), \cotg(\alpha')] = [g(i), g(-i), g(\cotg(\alpha)), g(\cotg(\alpha'))] = \\ &= [\infty, 0, e^{2i\alpha}, e^{2i\alpha'}] = [h(\infty), h(0), h(e^{2i\alpha}), h(e^{2i\alpha'})] = [\infty, 0, 1, e^{2i(\alpha' - \alpha)}] = e^{2i(\alpha' - \alpha)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$g(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad h(z) = e^{-2i\alpha}z.$$

On en déduit que

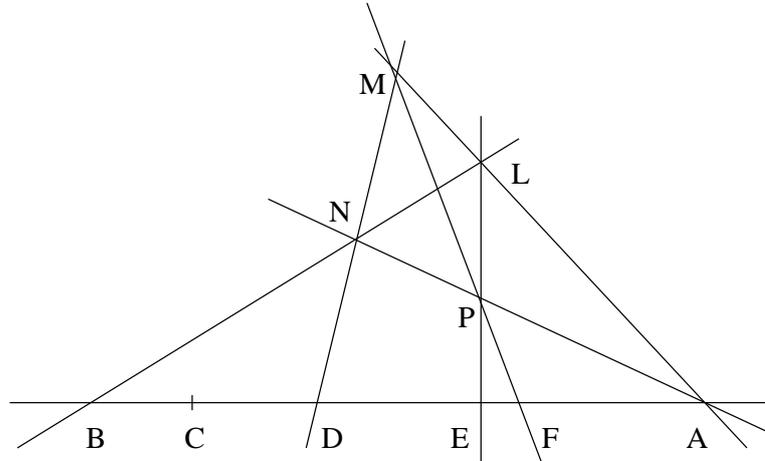
$$\frac{1}{2i} \log [P_+, P_-, \infty_D, \infty_{D'}] = \alpha' - \alpha \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z},$$

d'où le résultat.

(2.5.10) Exercice. Généraliser 2.5.9 aux dimensions supérieures. [Indication: Considérer les points à l'infini de la sphère $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$.]

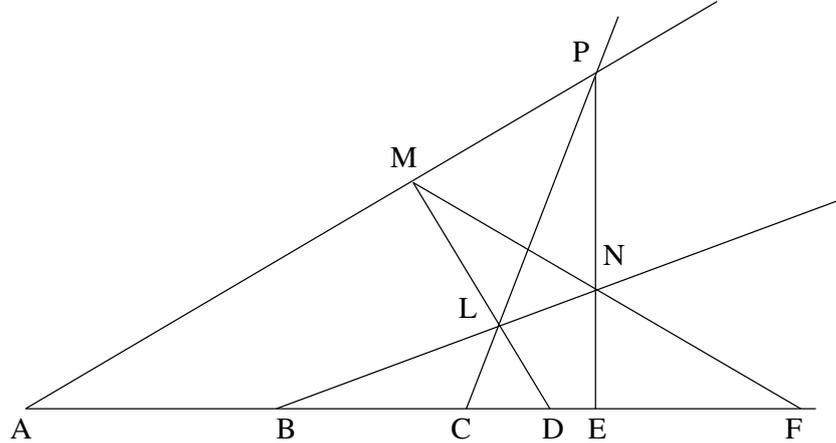
(2.5.11) Exercice. Soient A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 cinq points distincts d'une droite projective. Déterminer les birapports $[A_0, A_1, A_3, A_4]$, $[A_0, A_2, A_3, A_4]$ et $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ en termes des valeurs $x = [A_0, A_1, A_2, A_3]$ et $y = [A_0, A_1, A_2, A_4]$.

(2.5.12) Exercice. Considérons la configuration suivante dans un plan projectif $\mathbf{P}(V)$.



- (i) Dessiner la configuration affine correspondante dans le plan affine $\mathbf{P}(V) - (AM)$.
- (ii) Choisir des coordonnées homogènes telles que l'on ait $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $L = (0 : 0 : 1)$ et $C = (1 : 1 : 0)$. Déterminer les équations des droites projectives (BL) , (DM) , (NA) , (LE) , (MP) et les coordonnées homogènes des points $N = (BL) \cap (DM)$, $P = (NA) \cap (LE)$ et $F = (AB) \cap (MP)$ en termes des coordonnées homogènes des points D, E et M .
- (iii) Exprimer le birapport $[A, B, C, F]$ en termes de $x = [A, B, C, D]$ et $y = [A, B, C, E]$.

(2.5.13) Exercice. Considérons la configuration suivante dans un plan projectif $\mathbf{P}(V)$.



- (i) Dessiner la configuration affine correspondante dans le plan affine $\mathbf{P}(V) - (AP)$.
- (ii) Choisir des coordonnées homogènes telles que l'on ait $A = (0 : 1 : 0)$, $B = (1 : 0 : 0)$, $L = (1 : 1 : 1)$ et $P = (0 : 0 : 1)$. Déterminer les équations des droites projectives (AB) , (AP) , (BL) , (LP) , (DL) , (PE) , (MN) et les coordonnées homogènes des points $C = (AB) \cap (LP)$, $M = (DL) \cap (AP)$ et $F = (AB) \cap (MN)$ en termes des coordonnées homogènes des points D et E .
- (iii) Exprimer le birapport $[A, B, C, F]$ en termes de $x = [A, B, C, D]$ et $y = [A, B, C, E]$.

(2.5.14) Exercice. Comment a-t-on construit les exercices 2.15.13-14 ?

(2.5.15) Exercice. Soit $h : d \rightarrow d'$ une homographie entre deux droites distinctes dans un plan projectif.

- (i) Montrer qu'il existe une droite e (l'axe de l'homographie) telle que l'on ait $(Ah(B)) \cap (Bh(A)) \in e$, pour tous les couples de points distincts $A, B \in d$.
- (ii) Montrer que l'homographie h est une perspective (= h est induite par une projection conique) \iff les droites d, d', e sont concourantes.
- (iii) Montrer que l'homographie h s'écrit $h = g \circ f$, où $f : d \rightarrow e$, $g : e \rightarrow d'$ sont des perspectives.

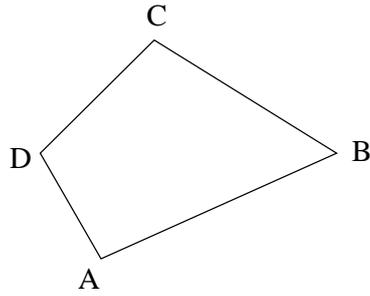
(2.5.16) Exercice. (i) Soient d, d' deux droites distinctes dans un plan projectif. Soient $A, B, C, D \in d$ et $A', B', C' \in d'$ des points distincts. Construire à la règle le point $D' = h(D) \in d'$, où $h : d \rightarrow d'$ est l'unique homographie vérifiant $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

(ii) De même si $d = d'$.

(2.5.17) Exercice. Soit A, B, C, D un repère projectif d'un plan projectif X . On note $f : X \rightarrow X$ l'unique homographie qui vérifie

$$f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = D, \quad f(D) = A.$$

- (i) Construire à la règle un point $E \in X$ tel que $f(E) = E$.
- (ii) Construire à la règle $f(P)$, pour un point $P \in X$ quelconque.
- (iii) Écrire f (= déterminer $f(X_0 : X_1 : X_2)$) dans le système de coordonnées homogènes tel que $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$ et $D = (1 : 1 : 1)$.



(2.5.18) **Exercice.** Soit A, B, C, D un repère projectif d'un plan projectif X . On note $f : X \rightarrow X$ l'unique homographie qui vérifie

$$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad f(C) = D, \quad f(D) = C.$$

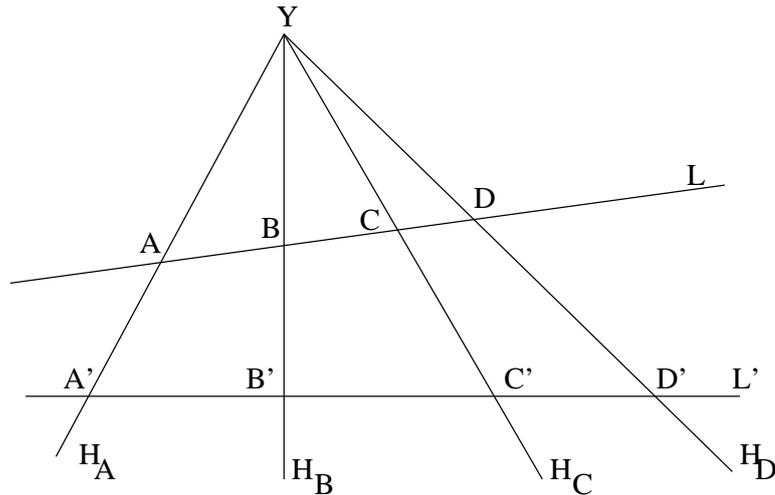
- (i) Construire à la règle un point $E \neq A, B$ tel que $f(E) = E$.
- (ii) Construire à la règle $f(P)$, pour tout $P \in (AB)$.
- (iii) Construire à la règle $f(P)$, pour tout $P \in (CD)$.
- (iv) Construire à la règle $f(P)$, pour tout $P \notin (AB) \cup (CD)$.
- (v) Déterminer $f(X_0 : X_1 : X_2)$ dans le système de coordonnées homogènes tel que $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$ et $D = (1 : 1 : 1)$.
- (vi) Déterminer l'ensemble $\text{Fix}(f) = \{P \in X \mid f(P) = P\}$.
- (vii) Pour tout $P \notin \text{Fix}(f) \cup (AB) \cup (CD)$, déterminer le birapport $[P, P', Q, R]$, où $P' = f(P)$, $Q = (CD) \cap (PP')$ et $R = (AB) \cap (PP')$.

2.6 Théorèmes de Thalès, Pappus et Desargues en géométrie projective

(2.6.1) **Théorème de Thalès (version projective).** Soient H_A, H_B, H_C et H_D quatre hyperplans distincts d'un faisceau d'hyperplans dans un espace projective de dimension $n \geq 2$ ($\iff H_A, H_B, H_C$ et H_D contiennent un sous-espace projectif Y de dimension $n - 2$). Soit L (resp. L') une droite coupant ces hyperplans en quatre points distincts A, B, C et D (resp. A', B', C' et D'). Alors on a

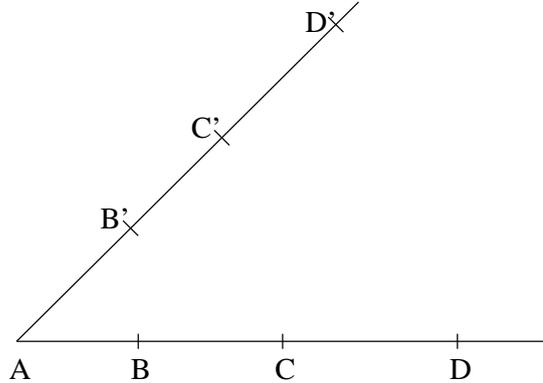
$$[A, B, C, D] = [A', B', C', D'].$$

On dit que $[H_A, H_B, H_C, H_D] := [A, B, C, D]$ est le **birapport des hyperplans** H_A, H_B, H_C, H_D .



Preuve. La projection de centre Y (voir 2.4.2(ii)) sur L' induit une homographie $h : L \rightarrow L'$ telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$; on applique 2.5.6.

(2.6.2) Exercice. Soient L, L' deux droites distinctes dans un plan projectif; on note A leur point d'intersection. Soient B, C, D (resp. B', C', D') trois points distincts de $L - \{A\}$ (resp. de $L' - \{A'\}$). Montrer : les droites (BB') , (CC') et (DD') sont concourantes $\iff [A, B, C, D] = [A, B', C', D']$.



(2.6.3) Exercice. Soient d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 cinq droites projectives en position générale dans un plan projectif, c'est-à-dire que l'on a $d_i \cap d_j \cap d_k = \emptyset$ si $i \neq j \neq k \neq i$. Pour tout $i = 0, \dots, 4$ on note λ_i le birapport des quatre points $d_i \cap d_j$ ($j \neq i$) pris dans un ordre quelconque. Montrer que les valeurs λ_0 et λ_1 déterminent λ_2, λ_3 et λ_4 . [Indication : utiliser 2.5.11.]

(2.6.4) Birapport et dualité. Sous les hypothèses de 2.6.1, soient $H : \ell = 0$ et $H' : \ell' = 0$ deux hyperplans telles que $H \cap H' = Y$; l'équation de tout hyperplan du faisceau engendré par H et H' (i.e. tout hyperplan contenant Y) s'écrit alors

$$H_{(\lambda:\mu)} : \lambda\ell + \mu\ell' = 0, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbf{P}^1(K).$$

On aimerait comparer cette paramétrisation algébrique du faisceau d'hyperplan à la paramétrisation géométrique qui intervient dans 2.6.1 : l'application

$$g : \mathbf{P}^1(K) \longrightarrow L \\ (\lambda : \mu) \mapsto H_{(\lambda:\mu)} \cap L$$

est bijective, car $L \cap Y = \emptyset$. On va vérifier que g est une homographie, en choisissant un système des coordonnées homogènes tel que

$$H : X_0 = 0, \quad H' : X_1 = 0, \quad L : X_2 = \dots = X_n = 0.$$

On a

$$H_{(\lambda:\mu)} : \lambda X_0 + \mu X_1 = 0, \quad H_{(\lambda:\mu)} \cap L = \{(\mu : -\lambda : 0 : \dots : 0)\};$$

comme

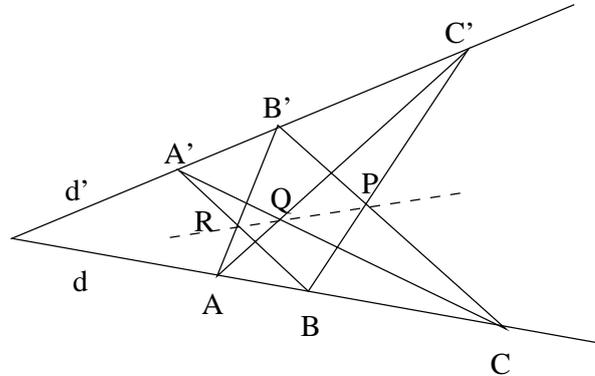
$$\begin{pmatrix} \mu \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

l'application g est, en effet, une homographie. Il en résulte que, si $(\lambda_A : \mu_A), (\lambda_B : \mu_B), (\lambda_C : \mu_C), (\lambda_D : \mu_D) \in \mathbf{P}^1(K)$ correspondent respectivement aux hyperplans H_A, H_B, H_C, H_D , alors on a

$$\begin{aligned} [H_A, H_B, H_C, H_D] &= [A, B, C, D] = [g(\lambda_A : \mu_A), g(\lambda_B : \mu_B), g(\lambda_C : \mu_C), g(\lambda_D : \mu_D)] = \\ &= [\lambda_A : \mu_A], (\lambda_B : \mu_B), (\lambda_C : \mu_C), (\lambda_D : \mu_D)]. \end{aligned}$$

(2.6.5) **Exercice.** Formuler et démontrer l'énoncé dual à 2.6.2.

(2.6.6) **Théorème de Pappus (version projective).** Si d et d' sont deux droites distinctes dans un plan projectif $\mathbf{P}(V)$ et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts de d (resp. de d') et distincts de $L \cap L'$, alors les trois points d'intersection $P = (BC') \cap (B'C)$, $Q = (CA') \cap (C'A)$ et $R = (AB') \cap (A'B)$ sont alignés.

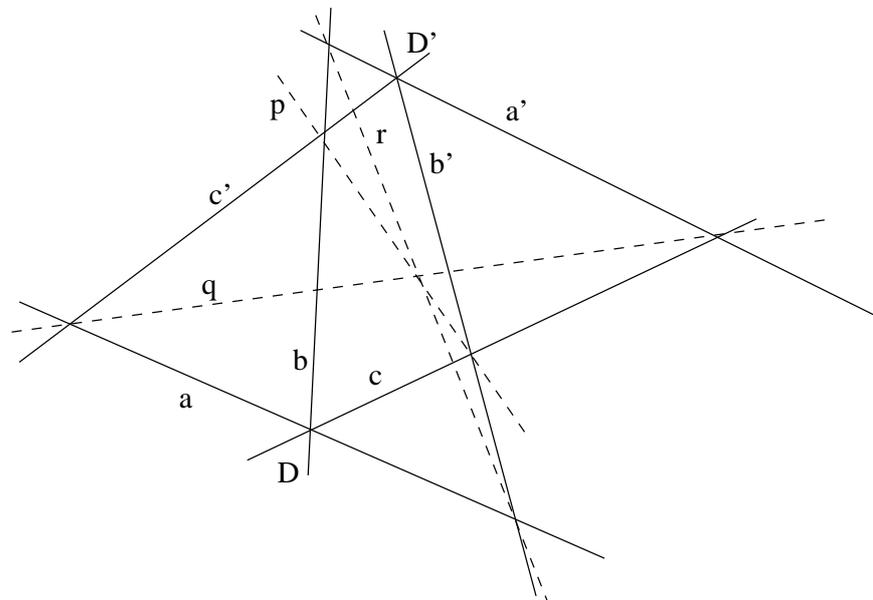


Preuve. On choisit (RP) comme la droite à l'infini. Dans le plan affine $\mathbf{P}(V) - (RP)$, les hypothèses de la version affine du Théorème de Pappus 1.5.3 sont satisfaites ($(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$), donc on a aussi $(CA') \parallel (C'A)$, i.e. $Q \in (RP)$.

(2.6.7) **Théorème de Pappus dual (Théorème de Brianchon).** Soient a, b, c (resp. a', b', c') trois droites concourantes distinctes (et telles que $a \cap b \neq a' \cap b'$). On note

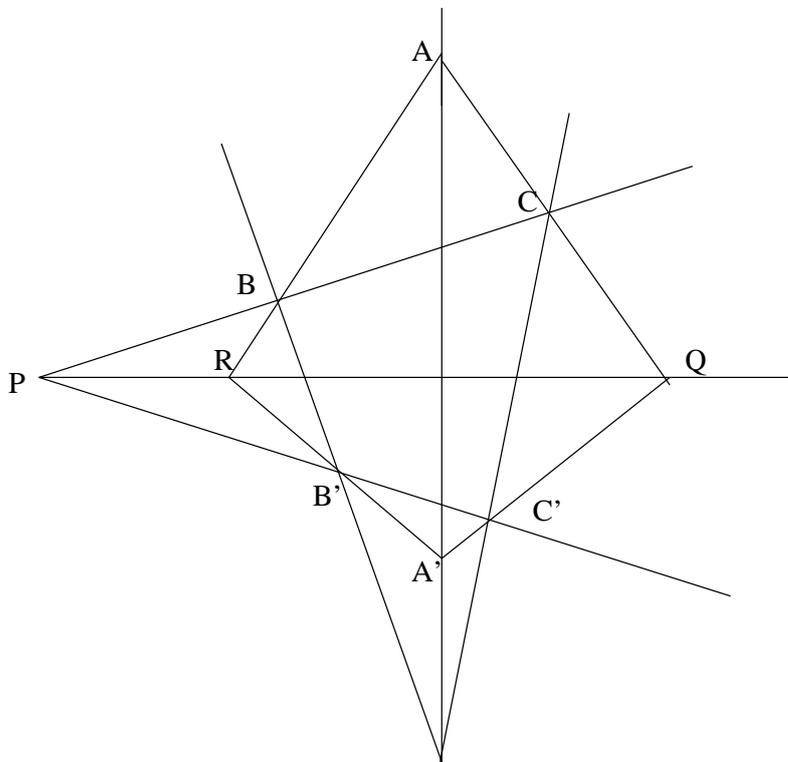
$$\left\{ \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right\} \text{ la droite engendrée par } \left\{ \begin{array}{l} b \cap c' \text{ et } b' \cap c \\ c \cap a' \text{ et } c' \cap a \\ a \cap b' \text{ et } a' \cap b \end{array} \right\}.$$

Alors les droites p, q, r sont concourantes.



Preuve. On applique 2.6.6 à la configuration duale.

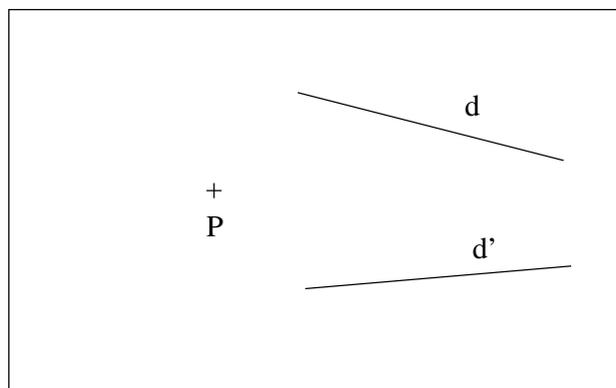
(2.6.8) Théorème de Desargues (version projective planaire). Soient A, B, C (resp. A', B', C') trois points projectivement indépendants d'un plan projectif, où $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. On note $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (CA) \cap (C'A')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$. Alors on a : les points P, Q, R sont alignés \iff les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.



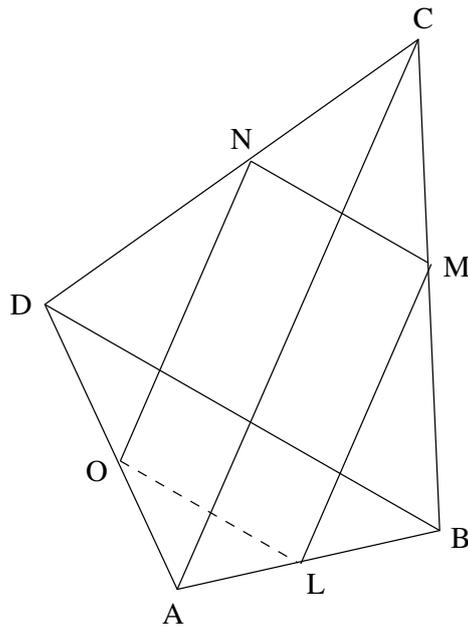
Preuve. “ \implies ” : On choisit $(RP) = (QR) = (PQ)$ comme la droite à l’infini. Dans le plan affine $\mathbf{P}(V) - (RP)$, les hypothèses de la version affine du Théorème de Desargues 1.5.5 sont satisfaites $((AB) \parallel (A'B'), (BC) \parallel (B'C')$ et $(CA) \parallel (C'A')$), donc les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles dans $\mathbf{P}(V) - (RP)$, donc concourantes dans $\mathbf{P}(V)$.

“ \impliedby ” : On applique “ \implies ” à la configuration duale.

(2.6.9) Exercice. Étant donné un point P et deux droites d, d' dont l'intersection $\{Q\} = d \cap d'$ est en dehors de la feuille, construire à la règle la droite (PQ) .



(2.6.10) **Exercice.** *Considérons la configuration suivante dans un plan affine X .*



- (i) *Montrer : si $(LM) \parallel (AC) \parallel (NO)$ et $(MN) \parallel (BD)$, alors $(LO) \parallel (BD)$.*
- (ii) *Dessiner la configuration projective correspondante dans le plan projectif $\tilde{X} = X \cup X_\infty$ et formuler la version projective de l'énoncé (i).*
- (iii) *Expliquer comment (i) et (ii) permettent de démontrer un théorème important (lequel ?) de géométrie projective.*

(2.6.11) **Exercice.** *Soient X un plan projectif réel, $d \subset X$ une droite projective et $O \in X, O \notin d$ un point. Soit $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0, 1$. On suppose que $f : X \rightarrow X$ est une homographie vérifiant*

$$(\star) \quad \forall P \in X, P \notin d \cup \{O\} \quad [P', O, P, f(P)] = \lambda,$$

où $P' = (OP) \cap d$ (en particulier, $f(P) \in (OP)$).

(i) *Montrer : si $P, Q \in X, P, Q \notin d \cup \{O\}$ et $P \neq Q$, alors les droites $(PQ), (f(P)f(Q))$ et d sont concourantes.*

(ii) *Montrer : si $P \in X$, alors on a :*

$$f(P) = P \iff P \in d \cup \{O\}.$$

(iii) *Étant donné $f(P)$ pour un point $P \notin d \cup \{O\}$, construire à la règle $f(Q)$ pour un point $Q \in X$ quelconque.*

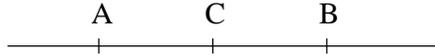
(iv) *Montrer qu'il existe une unique homographie $f : X \rightarrow X$ vérifiant (\star) . [Indication : considérer le plan affine $X - d$.]*

2.7 Division harmonique, polarité et dualité

On suppose que $-1 \neq 1$ dans K (i.e. que la caractéristique du corps K n'est pas égale à 2).

(2.7.1) **Définition.** *Quatre points distincts A, B, C et D d'une droite projective X forment une **division harmonique** si $[A, B, C, D] = -1$; on dit aussi que C et D sont **conjugués harmoniques** par rapport à A et B (comme $[B, A, C, D] = [A, B, C, D]^{-1} = [A, B, D, C]$, l'ordre de A, B (resp. de C, D) n'a aucune importance).*

(2.7.2) **Exemples :** (1) Si $D = \infty_X$, alors on a $[A, B, C, \infty_X] = -1 \iff CA/CB = -1 \iff C$ est le milieu de AB sur la droite affine $X - \{\infty_X\}$.

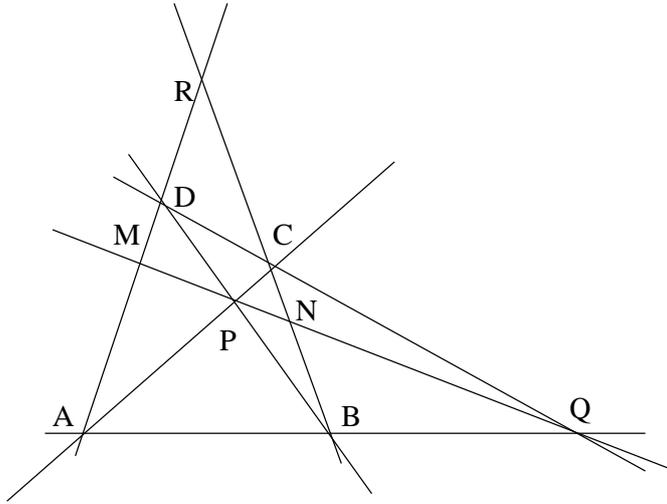


(2) Soient d, d' deux droites dans le plan euclidien \mathbf{R}^2 . D'après la formule de Laguerre 2.5.9, on a

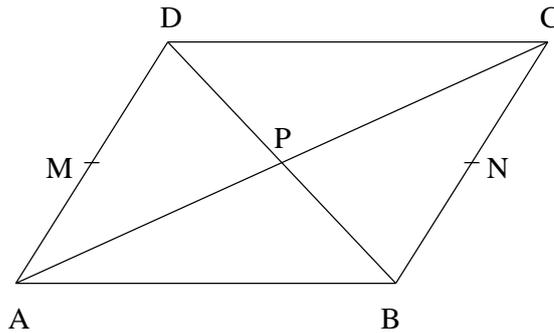
$$d \perp d' \iff [(i : 1 : 0), (-i : 1 : 0), \infty_d, \infty_{d'}] = -1.$$

Autrement dit, les deux droites sont perpendiculaires \iff leurs points à l'infini sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points cycliques.

(2.7.3) Proposition. Soit A, B, C, D un repère projectif d'un plan projectif. Alors les points $P = (AC) \cap (BD)$ et $Q = (AB) \cap (CD)$ sont conjugués harmoniques par rapport à $M = (PQ) \cap (AD)$ et $N = (PQ) \cap (BC)$.

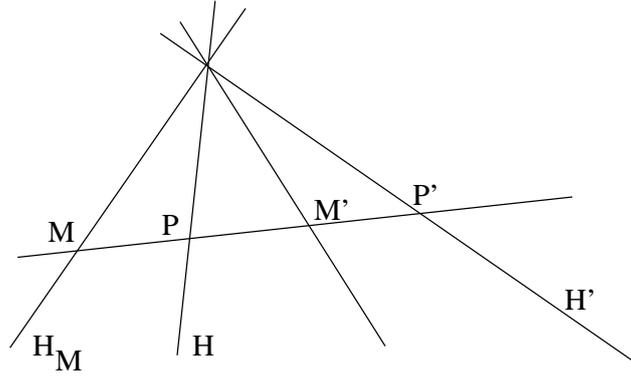


Preuve. On choisit (QR) , où $R = (AD) \cap (BC)$, comme la droite à l'infini. Dans le plan affine correspondant, on a $(AB) \parallel (CD)$, $(AD) \parallel (BC)$, M (resp. N) est le milieu de AD (resp. de BC), P est le milieu de MN et Q est le point à l'infini de la droite (MN) ; on applique 2.7.2.



(2.7.4) Polarité. Soient H et H' deux hyperplans distincts d'un espace projectif de dimension $n \geq 2$. Fixons un point $M \notin H \cup H'$; il existe un unique hyperplan H_M du faisceau engendré par H et H' qui passe par M (H_M est l'hyperplan engendré par M et $H \cap H'$). Si $M' \notin H \cup H' \cup H_M$, on dit que les points M et M' sont **conjugués harmoniques** par rapport à H et H' si

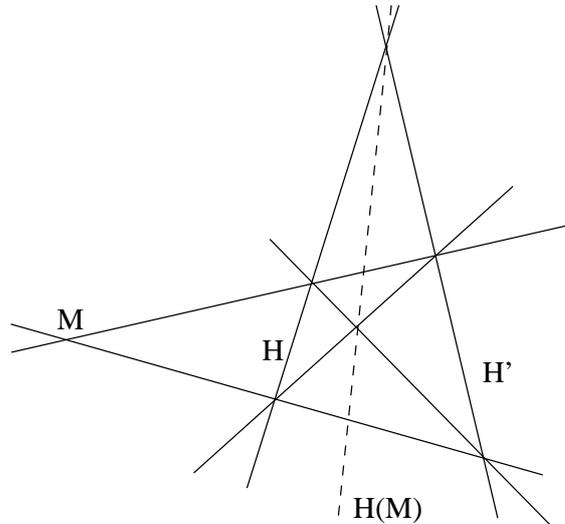
$$[P, P', M, M'] = -1, \quad P = H \cap (MM'), \quad P' = H' \cap (MM')$$



(2.7.5) Proposition-Définition. L'ensemble des conjugués harmoniques du point M par rapport à H et H' est égal à $H(M) - (H \cap H')$, où $H(M)$ est l'unique hyperplan du faisceau engendré par H et H' telle que $[H, H', H_M, H(M)] = -1$. On appelle $H(M)$ l'hyperplan polaire de M par rapport à H et H' .

Preuve. Soit $D \notin H_M$ une droite qui passe par M ; posons $D \cap H = \{P\}$, $D \cap H' = \{P'\}$, $H(M) \cap D = M'$. On a $[P, P', M, M'] = [H, H', H_M, H(M)] = -1$, d'après 2.6.1. Réciproquement, si $N \in D - \{M, P, P'\}$, alors on a $[P, P', M, N] = [P, P', M, M'] \iff N = M'$.

- (2.7.6)** (i) Si $M \in H - (H \cap H')$ (resp. si $M \in H' - (H \cap H')$), on définit $H(M) = H$ (resp. $H(M) = H'$).
(ii) Deux points $M, N \notin H \cap H'$ ont le même hyperplan polaire $\iff H_M = H_N$.
(iii) Si $n = 2$, on peut construire la droite polaire en utilisant 2.7.3 :



- (iv) Résoudre 2.4.3 en utilisant (iii).
(v) La correspondance $M \mapsto H(M)$ s'inscrit dans le cadre général suivant, qui généralise aussi la dualité projective 2.3.14 :

(2.7.7) Soit V un espace vectoriel de dimension $\dim(V) = n+1 \geq 2$. Toute application linéaire $f : V \longrightarrow V^*$ induit une application projective

$$g = \mathbf{P}(f) : \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\text{Ker}(f)) \longrightarrow \mathbf{P}(V^*) = \{\text{hyperplans } H \subset \mathbf{P}(V)\}.$$

En choisissant une base de V , on identifie

$$V = K^{n+1} = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K \right\}, \quad V^* = (K^{n+1})^* = \{ {}^t b \mid b \in K^{n+1} \} = \{ (b_0, \dots, b_n) \mid b_i \in K \}$$

$\pi({}^t(a_0, \dots, a_n)) = (a_0 : \dots : a_n)$ et l'accouplement canonique $V^* \times V \rightarrow K$ au produit matriciel ${}^t b, a \mapsto {}^t b a = b_0 a_0 + \dots + b_n a_n$, donc $\pi({}^t b) \in \mathbf{P}(V^*)$ correspond à l'hyperplan projectif

$$\{(a_0 : \dots : a_n) \mid b_0 a_0 + \dots + b_n a_n = 0\} = \{\pi(a) \mid {}^t b a = 0\}.$$

L'application f deviendra

$$f : a \mapsto {}^t(Fa) = {}^t a {}^t F \quad (a \in K^{n+1}),$$

où $F \in M_{n+1}(K)$ est la matrice de f . Par exemple, si $F = I_{n+1}$, alors $f(a) = {}^t a$ et l'application g n'est rien d'autre que la dualité définie en 2.3.14 ci-dessus.

Si $a \in K^{n+1}$, $f(a) \neq 0$, alors $g(\pi(a)) = \pi(f(a))$ est l'hyperplan associé à $f(a) = {}^t a {}^t F$, donc

$$g : \pi(a) = \{\pi(v) \mid v \in K^{n+1} - \{\vec{0}\}, {}^t a {}^t F v = 0\}$$

(en 2.3.14, on a considéré le cas $F = I$).

(2.7.8) Proposition. Si ${}^t F = \pm F$, alors on a

$$(\forall A, B \in \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(\text{Ker}(f))) \quad A \in g(B) \iff B \in g(A).$$

Preuve. Soient $A = (a_0 : \dots : a_n) = \pi(a)$, $B = (b_0 : \dots : b_n) = \pi(b)$. On a

$$A \in g(B) \iff {}^t b {}^t F a = 0 \iff 0 = {}^t ({}^t b {}^t F a) = {}^t a F b = \pm {}^t a {}^t F b \iff B \in g(A).$$

(2.7.9) Le cas symétrique. Si la matrice F est symétrique (${}^t F = F$), on peut décrire l'application g géométriquement en termes de la quadrique projective

$$C : \{A \in \mathbf{P}(V) \mid A \in g(A)\} = \{\pi(a) \mid a \in K^{n+1} - \{\vec{0}\}, {}^t a {}^t F a = 0\}.$$

(i) Si l'on a ${}^t a {}^t F a = \ell(a)\ell'(a)$, où ℓ, ℓ' sont des formes linéaires, linéairement indépendantes (ce qui entraîne $rg(F) = 1$), alors C est égale à la réunion des hyperplans $H : \ell = 0$ et $H' : \ell' = 0$. L'application

$$g : \mathbf{P}(V) - (H \cap H') \rightarrow \mathbf{P}(V^*)$$

dans ce cas n'est rien d'autre que la polarité $M \mapsto H(M)$ par rapport à H et H' (exercice!).

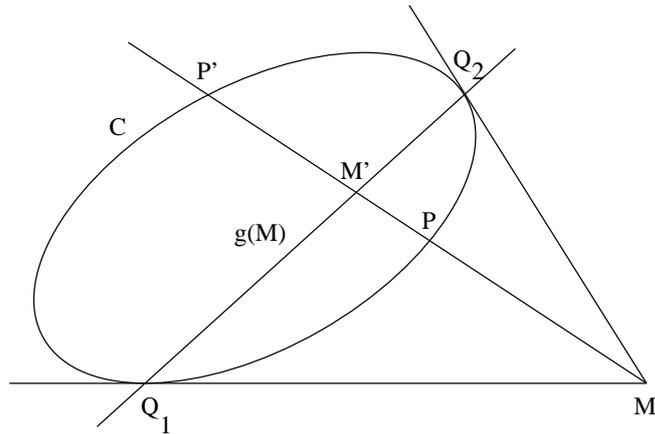
(ii) Si la matrice F est inversible, alors l'application $g : \mathbf{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(V^*)$ est bijective. Si $M \in \mathbf{P}(V) - C$, alors on a

$$C \cap g(M) = \{Q \in C \mid \text{la droite } (QM) \text{ est tangente à } C\}$$

(les coordonnées de Q ne sont pas forcément définies sur K ; par exemple, si $K = \mathbf{R}$, il faut considérer les points complexes). Si $P \in C$, alors $g(M)$ est l'hyperplan tangent à C en M . La dualité projective de 2.3.14 correspond à la quadrique

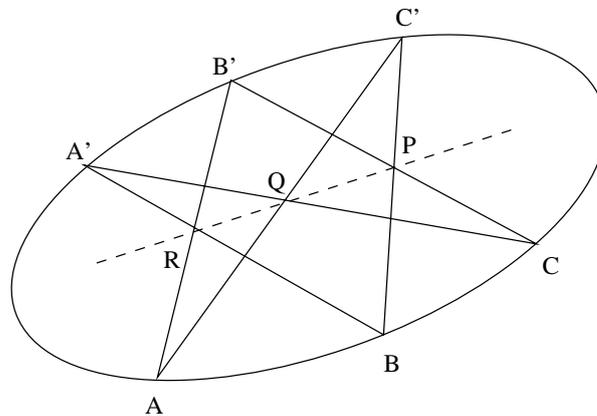
$$C : a_0^2 + \dots + a_n^2 = 0.$$

Si d est une droite qui passe par M , on note $d \cap C = \{P, P'\}$, $d \cap g(M) = \{M'\}$. Alors les points M, M' sont conjugués harmoniques par rapport à P et P' .

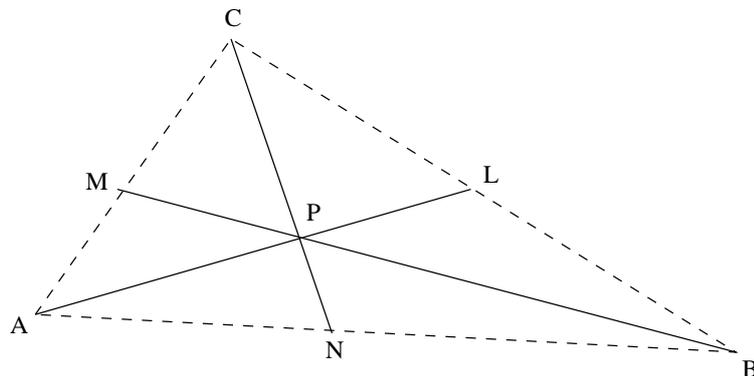


On peut également considérer le théorème de Pappus 2.6.6 comme une version dégénérée du résultat suivant.

(2.7.10) Théorème de Pascal. *Si A, B, C, A', B' et C' sont six points distincts d'une conique, alors les trois points d'intersection $P = (BC') \cap (B'C)$, $Q = (CA') \cap (C'A)$ et $R = (AB') \cap (A'B)$ sont alignés.*



(2.7.11) Exercice. *Étant donné un triangle LMN et un point $P \notin (LM) \cup (MN) \cup (NL)$, construire à la règle tous les triangles ABC tels que $N \in (AB)$, $L \in (BC)$, $M \in (CA)$ et $P = (AL) \cap (BM) \cap (CN)$. [Un triangle = trois points qui ne sont pas alignés.]*



VERSION 9/10/2008

Bibliographie

- [L] Y. Ladegaillerie, *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, Ellipses, Paris, 2003.
- [N] J. Nekovář, *Formes Quadratiques et Géométrie*, polycopié du cours LM 223, disponible à <http://www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/q/>
- [P] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, Paris, 1995.
- [B] M. Berger, *Géométrie*, CEDIC, Paris, 1977.