ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

COURS DE M1 2007/8, UNIVERSITÉ PARIS VI

Jan Nekovář

`http://www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/ag/`

4. Algèbre multilinéaire

Convention: Les espaces vectoriels seront toujours sur un corps K fixé. Dans ce chapitre on autorise des espaces de dimension quelconque (même infinie).

4.1 Produit tensoriel

(4.1.1) Définition. *Soient U, V et W des espaces vectoriels. Une application $f : V \times W \longrightarrow U$ est dite* **bilinéaire** *si on a:*
pour tout $v \in V$, l'application $\quad f(v, \cdot) : W \longrightarrow U, \ \ w \mapsto f(v, w) \quad$ *est linéaire;*
pour tout $w \in W$, l'application $\quad f(\cdot, w) : V \longrightarrow U, \ \ v \mapsto f(v, w) \quad$ *est linéaire.*

(4.1.2) Exemples: (i) $U = K$, f une forme bilinéaire.
(ii) $K = \mathbf{R}$, $U = V = W = \mathbf{R}^3$, $f(v, w) = v \wedge w$ (le produit vectoriel).
(iii) Si $\ell : V \longrightarrow K$ et $g : W \longrightarrow U$ sont des applications linéaires, alors leurs "produit" $f(v, w) = \ell(v)g(w)$ est une application bilinéaire $f : V \times W \longrightarrow U$.

(4.1.3) Théorème. *Pour tout couple V, W d'espaces vectoriels il existe une application bilinéaire* **universelle**

$$\begin{aligned} i : V \times W &\longrightarrow V \otimes W \quad (= V \otimes_K W) \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, pour toute application **bilinéaire** *$f : V \times W \longrightarrow U$, il existe une unique application* **linéaire** *$\overline{f} : V \otimes W \longrightarrow U$ vérifiant $f = \overline{f} \circ i$, i.e. $f(v, w) = \overline{f}(v \otimes w)$ $(\forall v \in V, \forall w \in W)$.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

(4.1.4) On peut aussi exprimer la propriété universelle du produit tensoriel $V \otimes W$ de la manière suivante: pour tout espace vectoriel U, l'application

$$\{\overline{f} : V \otimes W \longrightarrow U \text{ linéaire}\} \xrightarrow{\sim} \{f : V \times W \longrightarrow U \text{ bilinéaire}\}, \qquad \overline{f} \mapsto \overline{f} \circ i$$

est bijective (i.e. l'espace $V \otimes W$ "classifie" les applications bilinéaires $f : V \times W \longrightarrow U$).

(4.1.5) (i) La bilinéarité de l'application i équivaut à

$$\begin{aligned} v \otimes (w + w') &= v \otimes w + v \otimes w' \\ (v + v') \otimes w &= v \otimes w + v' \otimes w \\ \lambda v \otimes w &= v \otimes \lambda w = \lambda(v \otimes w) \end{aligned}$$

(pour tous $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\lambda \in K$).
(ii) Tout élément de $V \otimes W$ s'écrit $v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n$ ($n \geq 0$, $v_i \in V$, $w_i \in W$); voir 4.1.6(i) ci-dessous.
(iii) L'universalité de i signifie que toutes les relations linéaires valables dans $V \otimes W$ se déduisent des relations 4.1.5(i).

(4.1.6) On **admet** d'abord que le produit tensoriel $V \otimes W$ qui vérifie la propriété universelle 4.1.3-4 existe.

(i) *$V \otimes W$ est engendré par l'image de i, i.e. par les produits $v \otimes w$ ($v \in V$, $w \in W$).*

Preuve. Soit $Z = \{v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n \mid n \geq 0,\ v_i \in V,\ w_i \in W\}$ le sous-espace de $V \otimes W$ engendré par l'image de i. Si $Z \neq V \otimes W$, alors il existe deux applications linéaires distinctes $\overline{f}_1, \overline{f}_2 : V \otimes W \longrightarrow (V \otimes W)/Z$ (à savoir $\overline{f}_1 = 0$ et $\overline{f}_2 =$ la projection canonique) vérifiant $\overline{f}_1 \circ i = \overline{f}_2 \circ i = 0$, ce qui contredit 4.1.4.

(ii) **Unicité du produit tensoriel:** Si $i' : V \times W \longrightarrow V \otimes' W$ est une autre application qui satisfait à la propriété universelle 4.1.3-4, alors il existe des applications linéaires (uniques) $j : V \otimes W \longrightarrow V \otimes' W$ et $j' : V \otimes' W \longrightarrow V \otimes W$ vérifiant $j \circ i = i'$ et $j' \circ i' = i$, i.e. $j(v \otimes w) = v \otimes' w$ et $j'(v \otimes' w) = v \otimes w$. La linéarité entraîne

$$j\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes' w_i, \qquad j'\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes' w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \qquad\qquad (v_i \in V,\ w_i \in W).$$

En utilisant (i), on déduit que les applications j et j' sont bijectives, inverses l'une de l'autre.

(iii) **Un cas particulier:** Il est facile de voir que le produit $K \times W \longrightarrow W$, $(\lambda, w) \mapsto \lambda w$ satisfait à la propriété universelle; il résulte de (ii) que l'application $j : \lambda \otimes w \mapsto \lambda w$ définit un isomorphisme $K \otimes W \xrightarrow{\sim} W$ (de même, le produit $(v, \lambda) \mapsto \lambda v$ donne lieu à l'isomorphisme $V \otimes K \xrightarrow{\sim} V$).

(iv) **Fonctorialité:** Soient $f : V \longrightarrow V'$ et $g : W \longrightarrow W'$ des applications linéaires.

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f \times g"'] \arrow[dr, "h"] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\overline{h} = f \otimes g"] \\
V' \times W' \arrow[r, "i'"] & V' \otimes W'
\end{tikzcd}$$

L'application

$$h = i' \circ (f \times g) : V \times W \longrightarrow V' \otimes W', \qquad (v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$$

étant bilinéaire, il existe une unique application linéaire

$$\overline{h} : V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W'$$

vérifiant

$$\overline{h}(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) \qquad \left(\Longrightarrow \quad \overline{h}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \otimes g(w_i)\right);$$

on le note $f \otimes g := \overline{h}$.

(v) *Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in V$ (resp. $w_1, \ldots, w_n \in W$) sont linéairement indépendants dans V (resp. dans W), alors les produits tensoriels $v_i \otimes w_j$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) sont linéairement indépendants dans $V \otimes W$.*

Preuve. On suppose qu'on a

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}\, v_i \otimes w_j = 0 \qquad\qquad (\lambda_{ij} \in K).$$

On fixe $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$. Il existe une forme linéaire $\ell : V \longrightarrow K$ vérifiant $\ell(v_i) = \delta_{\alpha i}$ ($= 1$ si $i = \alpha$, resp. $= 0$ si $i \neq \alpha$). L'application

$$f : V \times W \longrightarrow W, \qquad f(v,w) = \ell(v)w$$

est bilinéaire, donc il existe une (unique) application linéaire $\overline{f} : V \otimes W \longrightarrow W$ telle que l'on ait $\overline{f}(v \otimes w) = \ell(v)w$ ($v \in V$, $w \in W$). L'égalité

$$0 = \overline{f}\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}\, v_i \otimes w_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, \overline{f}(v_i \otimes w_j) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, \ell(v_i) w_j = \sum_j \lambda_{\alpha j}\, w_j$$

montre que l'on a $\lambda_{\alpha j} = 0$ pour tout j; comme α était arbitraire, on obtient que tous les coefficients $\lambda_{ij} = 0$ s'annulent.

(vi) *Si $\{v_\alpha\}$ (resp. $\{w_\beta\}$) est une base de V (resp. de W), alors $\{v_\alpha \otimes w_\beta\}$ est une base de $V \otimes W$. En particulier, un élément $t \in V \otimes W$ s'écrit, de manière unique, $t = \sum_{\alpha,\beta} t_{\alpha\beta} v_\alpha \otimes w_\beta$, où la somme est finie et $t_{\alpha\beta} \in K$.*

Preuve. Les éléments $v_\alpha \otimes w_\beta$ engendrent $V \otimes W$, d'après (i) (en utilisant les relations de bilinéarité 4.1.5(i)); ils sont linéairement indépendants, grâce à (v).

(vii) *On a* $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$, $V \otimes (W \oplus W') = (V \otimes W) \oplus (V \otimes W')$, $(V \oplus V') \otimes W = (V \otimes W) \oplus (V' \otimes W)$.

Preuve. Ceci est une conséquence de (vi).

Preuve de 4.1.3 (esquisse). On utilise la construction suivante: pour tout ensemble S, il existe un espace vectoriel $K^{(S)}$ dont la base est en bijection avec S. Par exemple, on peut définir

$$K^{(S)} = \{\text{les applications } \alpha : S \longrightarrow K \text{ dont le support } \mathrm{supp}(\alpha) \text{ est fini}\}$$

(où $\mathrm{supp}(\alpha) = \{s \in S \mid \alpha(s) \neq 0\}$). En effet, les éléments

$$e_s : S \longrightarrow K, \qquad s' \mapsto \begin{cases} 1, & s' = s \\ 0, & s' \neq s \end{cases} \qquad\qquad (s \in S)$$

forment une base de $K^{(S)}$, puisqu'on a, pour tout $\alpha \in K^{(S)}$,

$$\alpha = \sum_{s \in \mathrm{supp}(\alpha)} \alpha(s)\, e_s = \sum_{s \in S} \alpha(s)\, e_s.$$

L'espace $K^{(S)}$ classifie les applications $S \longrightarrow U$ vers des espaces vectoriels, au sens suivant: pour tout espace vectoriel U, la correspondance

$$\begin{aligned} \{\text{applications } f : S \longrightarrow U\} &\xrightarrow{\sim} \{\text{applications linéaires } F : K^{(S)} \longrightarrow U\} \\ f &\mapsto \left(F : \sum_s \alpha(s)\, e_s \mapsto \sum_s \alpha(s)\, f(s)\right) \end{aligned}$$

est bijective. Si l'on applique cette construction à l'ensemble $S = V \times W$, on obtient l'espace vectoriel $X = K^{(V \times W)}$ qui classifie les applications $f : V \times W \longrightarrow U$. Une telle application est bilinéaire $\Longleftrightarrow$ $F : X \longrightarrow U$ vérifie

$$\begin{aligned} F\left(e_{(v+v',w)} - e_{(v,w)} - e_{(v',w)}\right) &= f(v+v',w) - f(v,w) - f(v',w) = 0, \\ F\left(e_{(v,w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')}\right) &= f(v,w+w') - f(v,w) - f(v,w') = 0, \\ F\left(e_{(\lambda v,w)} - \lambda\, e_{(v,w)}\right) &= f(\lambda v,w) - \lambda f(v,w) = 0, \\ F\left(e_{(v,\lambda w)} - \lambda\, e_{(v,w)}\right) &= f(v,\lambda w) - \lambda f(v,w) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on note $Y \subset X$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments

$$e_{(v+v',w)} - e_{(v,w)} - e_{(v',w)}, \qquad e_{(v,w+w')} - e_{(v,w)} - e_{(v,w')}, \qquad e_{(\lambda v,w)} - \lambda\, e_{(v,w)}, \qquad e_{(v,\lambda w)} - \lambda\, e_{(v,w)}$$

$(v, v' \in V,\ w, w' \in W,\ \lambda \in K)$, il en résulte que l'espace $V \otimes W := X/Y$ et l'application

$$i : V \times W \longrightarrow V \otimes W = X/Y, \qquad (v,w) \mapsto v \otimes w := \text{l'image de } e_{(v,w)}$$

satisfont à la propriété universelle 4.1.3-4.

(4.1.7) Définition. *Soient $U, V_1, \ldots, V_n$ $(n \geq 2)$ des espaces vectoriels. Une application $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U$ est dite n-**linéaire** si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $v \in V_i$, l'application*

$$V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n \longrightarrow U, \qquad (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

est $(n-1)$-linéaire.

(4.1.8) Théorème. *Soient $U, V_1, \ldots, V_n$ $(n \geq 2)$ des espaces vectoriels. On définit*

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := V_1 \otimes (V_2 \otimes \cdots \otimes (V_{n-1} \otimes V_n) \cdots), \qquad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := v_1 \otimes (v_2 \otimes \cdots \otimes (v_{n-1} \otimes v_n) \cdots)$$
$$i : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \qquad (v_i \in V_i).$$

*L'application i satisfait à la propriété universelle suivante: toute application n-**linéaire** $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U$ il existe une unique application **linéaire** $\overline{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow U$ vérifiant $f = \overline{f} \circ i$, i.e. $f(v_1, \ldots, v_n) = \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ $(v_i \in V_i)$.*

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] \\
 & U
\end{tikzcd}$$

Preuve. Récurrence (exercice).

(4.1.9) Le produit tensoriel de $V_1, \ldots, V_n$ (dans cet ordre) avec une autre distribution de parenthèses satisfait à la même propriété universelle. L'argument de 4.1.6(ii) montre que les deux produits sont canoniquement isomorphes; par exemple, l'application $(v_1 \otimes v_2) \otimes (v_3 \otimes v_4) \mapsto ((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) \otimes v_4$ identifie $(V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4)$ à $((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4$. On peut donc supprimer les parenthèses, ce qui justifie la notation de 4.1.8.

(4.1.10) Proposition. *Soient $V_1, \ldots, V_n$ $(n \geq 1)$ des espaces vectoriels. Si $\{e^{(i)}_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in I_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ est une base de V_i, alors $\{e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}\}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n}$ est une base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.*

Preuve. Récurrence.

(4.1.11) Fonctorialité. Soient $f_i : V_i \longrightarrow V_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$ des application linéaires.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1 \times \cdots \times f_n"] \arrow[dr, "h"] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[d, dotted, "\overline{h} = f_1 \otimes \cdots \otimes f_n"] \\
V_1' \times \cdots \times V_n' \arrow[r, "i'"] & V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'
\end{tikzcd}$$

L'application

$$h = i' \circ (f_1 \times \cdots \times f_n) : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1' \otimes \cdots \otimes V_n', \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$$

est n-linéaire, donc il existe une unique application linéaire

$$\overline{h} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'$$

vérifiant

$$\overline{h}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n);$$

on la note $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n := \overline{h}$.

(4.1.12) Exemple: Soient V un espace vectoriel de dimension $\dim(V) = 2$ et $f, g : V \longrightarrow V$ des applications linéaires. On fixe une base e_1, e_2 de V et on note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de f resp. de g dans la base $\{e_i\}$. On a

$$f(e_1) = ae_1 + ce_2, \qquad f(e_2) = be_1 + de_2, \qquad g(e_1) = Ae_1 + Ce_2, \qquad g(e_2) = Be_1 + De_2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_1 \otimes e_1) &= (ae_1 + ce_2) \otimes (Ae_1 + Ce_2) = aA\, e_1 \otimes e_1 + aC\, e_1 \otimes e_2 + cA\, e_2 \otimes e_1 + cC\, e_2 \otimes e_2 \\
(f \otimes g)(e_1 \otimes e_2) &= (ae_1 + ce_2) \otimes (Be_1 + De_2) = aB\, e_1 \otimes e_1 + aD\, e_1 \otimes e_2 + cB\, e_2 \otimes e_1 + cD\, e_2 \otimes e_2 \\
(f \otimes g)(e_2 \otimes e_1) &= (be_1 + de_2) \otimes (Ae_1 + Ce_2) = bA\, e_1 \otimes e_1 + bC\, e_1 \otimes e_2 + dA\, e_2 \otimes e_1 + dC\, e_2 \otimes e_2 \\
(f \otimes g)(e_2 \otimes e_2) &= (be_1 + de_2) \otimes (Be_1 + De_2) = bB\, e_1 \otimes e_1 + bD\, e_1 \otimes e_2 + dB\, e_2 \otimes e_1 + dD\, e_2 \otimes e_2,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la matrice de $f \otimes g : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ dans la base $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ de $V \otimes V$ est égale à

$$\begin{pmatrix} aA & aB & bA & bB \\ aC & aD & bC & bD \\ cA & cB & dA & dB \\ cC & cD & dC & dD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & b\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ c\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & d\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

(4.1.13) Complexification d'un espace vectoriel réel. Soit V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel; on définit

$$W := \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V.$$

A priori, W est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel; si $\{e_\alpha\}$ est une $\mathbf{R}$-base de V, $\{1 \otimes e_\alpha,\, i \otimes e_\alpha\}$ est une $\mathbf{R}$-base de W. On peut munir W d'une structure naturelle de $\mathbf{C}$-espace vectoriel:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \times V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "m_\lambda"'] & \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V \arrow[d, dotted, "\overline{m}_\lambda"] \\
& \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V
\end{tikzcd}$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, l'application

$$m_\lambda : \mathbf{C} \times V \longrightarrow \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V, \qquad (\mu, v) \mapsto (\lambda\mu) \otimes v$$

est $\mathbf{R}$-bilinéaire, donc il existe une unique application $\mathbf{R}$-linéaire $\overline{m}_\lambda : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V \longrightarrow \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ vérifiant $\overline{m}_\lambda \otimes i = m_\lambda$, i.e.

$$\overline{m}_\lambda \left(\sum_\beta \mu_\beta \otimes v_\beta \right) = \sum_\beta (\lambda \mu_\beta) \otimes v_\beta.$$

Pour tous $w \in \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, on définit $\lambda \cdot w = \overline{m}_\lambda(w)$. Comme

$$(\forall r \in \mathbf{R}) \quad \overline{m}_r = r \cdot \mathrm{id}, \qquad \overline{m}_{\lambda+\mu} = \overline{m}_\lambda + \overline{m}_\mu, \qquad \overline{m}_{\lambda\mu} = \overline{m}_\lambda \circ \overline{m}_\mu,$$

on obtient bien une structure de **C**-espace vectoriel sur $W = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$. Les formules

$$i \cdot (1 \otimes e_\alpha) = i \otimes e_\alpha, \qquad i \cdot (i \otimes e_\alpha) = (i^2) \otimes e_\alpha = (-1) \otimes e_\alpha = -1 \otimes e_\alpha$$

entraînent que $\{1 \otimes e_\alpha\}$ est une **C**-base de W.
Par exemple, si $V = \mathbf{R}[t]$ est l'espace des polynômes réels, alors $W = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ s'identifie à l'espace des polynômes complexes $\mathbf{C}[t]$.

(4.1.14) Exercice. *Soient V, W des espaces vectoriels; on note $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ l'espace dual de V. L'application*

$$V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ linéaire}\}, \qquad (\ell, w) \mapsto (v \mapsto \ell(v)w)$$

est bilinéaire, donc il existe une unique application linéaire $\phi : V^* \otimes_K W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W)$ vérifiant

$$\phi\left(\sum_\alpha \ell_\alpha \otimes w_\alpha\right) : v \mapsto \sum_\alpha \ell_\alpha(v) w_\alpha \qquad\qquad (\ell_\alpha \in V^*,\ w_\alpha \in W).$$

Montrer que l'application ϕ est injective et que son image est égale à

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ linéaire}, \dim(f(V)) < \infty\}.$$

En particulier, si $\dim(W) < \infty$, alors $\phi : V^* \otimes_K W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V, W)$ est un isomorphisme.

4.2 Algèbre tensorielle d'un espace vectoriel

On fixe un espace vectoriel V.
(4.2.1) Notation. Pour $n \geq 0$, on pose

$$T^n(V) = \otimes^n V = V^{\otimes n} := \begin{cases} K, & n = 0 \\ V, & n = 1 \\ \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n-\text{fois}}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Si e_α $(\alpha \in I)$ est une base de V, alors $e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n}$ $(\alpha_i \in I)$ est une base de $\otimes^n V$.
(4.2.2) Exemples: (i) $\dim(V) = 1$: si $V = Kx$, alors on a $\otimes^n V = Kx \otimes \cdots \otimes x$.
(ii) $\dim(V) = 2$: si x, y est une base de V, alors $x \otimes x,\ x \otimes y,\ y \otimes x,\ y \otimes y$ est une base de $\otimes^2 V$ et

$$x \otimes x \otimes x, \quad x \otimes x \otimes y, \quad x \otimes y \otimes x, \quad y \otimes x \otimes x, \quad x \otimes y \otimes y, \quad y \otimes x \otimes y, \quad y \otimes y \otimes x, \quad y \otimes y \otimes y$$

est une base de $\otimes^3 V$. Pour simplifier la notation, on écrit souvent les éléments de cette base comme des "monômes non-commutatifs"

$$xxx, \quad xxy, \quad xyx, \quad yxx, \quad xyy, \quad yxy, \quad yyx, \quad yyy.$$

(4.2.3) Le **produit**

$$\begin{gathered} T^m(V) \otimes T^n(V) \longrightarrow T^{m+n}(V) \\ (u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \ \mapsto\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \end{gathered}$$

est associatif (voir 4.1.9 ci-dessus), mais il n'est pas commutatif (sauf si $\dim(V) \leq 1$ ou $mn = 0$).

(4.2.4) Définition. L'algèbre tensorielle de V *est l'anneau*

$$T(V) = \otimes^\bullet V := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V) = \{t = (t_0, t_1, \ldots) \mid t_n \in T^n(V),\ (\exists n(t))\,(\forall n \geq n(t))\ \ t_n = 0\}$$

(on écrit aussi $t = \sum_{n\geq 0} t_n$ *(la somme étant finie) au lieu de* $t = (t_0, t_1, \ldots)$*). Plus précisement,* $T(V)$ *est une* K*-algèbre* $\mathbf{N}$*-graduée (voir 4.2.6 ci-dessous).*

(4.2.5) Exemple: Si $\dim(V) = 1$, $V = Kx$, on a $T^n(V) = Kx^n$ et $x^m \otimes x^n = x^{m+n}$; l'anneau $T(V)$ s'identifie alors à l'anneau de polynômes $K[x]$.

(4.2.6) Définition. *Une* K**-algèbre N-graduée** *est un anneau* A *tel que*
(i) K *est un sous-anneau de* A.
(ii) $K \subset Z(A)$, *i.e.* $(\forall \lambda \in K)\,(\forall x \in A)\quad \lambda x = x\lambda$.
(iii) $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ *comme espace vectoriel (on dit qu'un élément* $x \in A_n$ *est* **homogène de degré** n*).*
(iv) $K \subset A_0$.
(v) $(\forall m, n \geq 0)\quad A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}\qquad (\iff (\forall x \in A_m)\,(\forall y \in A_n)\quad xy \in A_{m+n})$.

(4.2.7) Exemples: (i) L'anneau de polynômes $A = K[X_1, \ldots, X_d]$,

$$A_n = \{ \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_d=n} c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} \mid c_\alpha \in K\}.$$

(ii) L'algèbre tensorielle $A = T(V)$, $A_n = T^n(V)$. Moralement, les éléments de $T(V)$ sont des "polynômes non-commutatifs" (cf. 4.2.2(ii)).
(iii) L'algèbre $T(V)$ consiste en les "tenseurs covariants"; il est utile de travailler aussi avec des "tenseurs contravariants" $t' \in T(V^*)$ et, plus généralement, avec des éléments de l'algèbre $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$-graduée

$$T(V) \otimes T(V^*) = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} T^m(V) \otimes T^n(V^*).$$

(4.2.8) Si A est une K-algèbre $\mathbf{N}$-graduée, alors le produit

$$A_m \times A_n \longrightarrow A_{m+n}, \qquad (x, y) \mapsto xy$$

est bilinéaire; il est donc induit par une unique qpplication linéaire $A_m \otimes A_n \longrightarrow A_{m+n}$ vérifiant

$$\sum_\alpha x_\alpha \otimes y_\alpha \mapsto \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha \qquad\qquad (x_\alpha \in A_m,\ y_\alpha \in A_n).$$

4.3 Tenseurs symétriques et antisymétriques

On fixe un espace vectoriel V.
(4.3.1) Exemple: L'application

$$\sigma : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V, \qquad u \otimes v \mapsto v \otimes u,$$

qui échange les deux facteurs, est un isomorphisme. Un élément $t \in V \otimes V$ est dit **symétrique** (resp. **antisymétrique**) si on a $\sigma(t) = t$ (resp. $\sigma(t) = -t$). Par exemple, les tenseurs $u \otimes u$ et $u \otimes v + v \otimes u$ sont symétriques, alors que $u \otimes v - v \otimes u$ est antisymétrique (pour tous $u, v \in V$).

(4.3.2) Groupe symétrique S_n (rappel). Une **permutation** de $\{1, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ est une application bijective $\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ forment un groupe S_n avec l'opération $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$, c'est-à-dire $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. L'ordre du groupe S_n est égal à $n!$. On écrit un élément $\sigma \in S_n$ soit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

soit comme un produit de cycles (= orbites sous l'action de σ). Par exemple, l'élément

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

est le produit des cycles

$$1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 1, \qquad 2 \mapsto 5 \mapsto 2, \qquad 3 \mapsto 3,$$

donc

$$\sigma = (146)(25)(3).$$

Une **transposition** est une permutation qui échange deux éléments $i \neq j$, par exemple $(14)(2)(3)(5)(6) \in S_6$. On associe à chaque permutation $\sigma \in S_n$ la **signature** $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$. L'application $\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ est caractérisée par les propriétés suivantes:

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau), \qquad \mathrm{sgn}(\mathit{transposition}) = -1.$$

(4.3.3) Action du groupe symétrique S_n sur $T^n(V)$. Soit $n \geq 1$. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, l'application

$$h_\sigma : V \times \cdots \times V \longrightarrow V \otimes \cdots \otimes V, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

est n-linéaire,

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "h_\sigma"'] & V \otimes \cdots \otimes V \arrow[d, dotted, "\overline{h}_\sigma"] \\ & V \otimes \cdots \otimes V, \end{tikzcd}$$

donc il existe une unique application linéaire

$$\overline{h}_\sigma : \otimes^n V \longrightarrow \otimes^n V$$

vérifiant

$$\overline{h}_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Pour tout tenseur $t \in \otimes^n V$, on écrit $t * \sigma$ au lieu de $\overline{h}_\sigma(t)$. Cette construction définit une action de S_n **à droite** sur $\otimes^n V$: on a

$$(\forall \sigma, \tau \in S_n)\,(\forall t \in \otimes^n V) \qquad (t * \sigma) * \tau = t * (\sigma\tau).$$

On peut aussi définir une action de S_n à gauche: si on pose $\sigma * t := t * \sigma^{-1}$, alors on a $\sigma * (\tau * t) = (\sigma\tau) * t$.

(4.3.4) Définition. *Un tenseur $t \in \otimes^n V$ est dit* **symétrique** *(resp.* **antisymétrique***) si on a, pour tout $\sigma \in S_n$, $t * \sigma = t$ (resp. $t * \sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) t$).*

(4.3.5) Exemples: (i) Pour tout $v \in V$, le tenseur $v \otimes \cdots \otimes v \in \otimes^n V$ est symétrique.
(ii) $\dim(V) = 2$: si x, y est une base de V, alors les tenseurs $x^2 = x \otimes x$, $xy = x \otimes y$, $yx = y \otimes x$, $y^2 = y \otimes y$ forment une base de $\otimes^2 V$. Les éléments $x^2, xy+yx, y^2$ sont symétriques, alors que $xy-yx$ est antisymétrique.

Dans $\otimes^3 V$, les éléments $x^3, x^2y + xyx + yx^2, xy^2 + yxy + y^2x, y^3$ sont symétriques. Si $\mathrm{car}(K) \neq 2, 3$, il n'y a aucun élément antisymétrique non nul dans $\otimes^3 V$ (voir 4.4.13 et 4.4.15 ci-dessous).
(iii) Si $\mathrm{car}(K) = 2$, alors $-1 = 1$ dans K, ce qui signifie qu'un tenseur $t \in \otimes^n V$ est symétrique $\iff$ il est antisymétrique.
(iv) Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, alors il n'y a aucun tenseur non nul $t \in \otimes^n V$ $(n \geq 2)$ qui soit simultanément symétrique et antisymétrique.

(4.3.6) Symétrisation, antisymétrisation. On suppose que $\mathrm{car}(K) \nmid n!$**.** On définit l'opérateur "symétrisation" $s : \otimes^n V \longrightarrow \otimes^n V$ (resp. "antisymétrisation" $a : \otimes^n V \longrightarrow \otimes^n V$) par les formules

$$s(t) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} t * \sigma, \qquad a(t) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, t * \sigma \qquad\qquad (t \in \otimes^n V).$$

(4.3.6.1) Par exemple, si $n = 2$ (et $\mathrm{car}(K) \neq 2$), on a

$$s(u \otimes v) = \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u), \qquad a(u \otimes v) = \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u).$$

(4.3.6.2) Pour tout $t \in \otimes^n V$, le tenseur $s(t)$ (resp. $a(t)$) est symétrique (resp. antisymétrique).
(4.3.6.3) Si $t \in \otimes^n V$ est symétrique (resp. antisymétrique), alors on a $s(t) = t$ (resp. $a(t) = t$).
(4.3.6.4) Il résulte de 4.3.6.2-3 que l'on a

$$s(\otimes^n V) = \{t \in \otimes^n V \mid t \text{ symétrique}\}$$
$$a(\otimes^n V) = \{t \in \otimes^n V \mid t \text{ antisymétrique}\}.$$

(4.3.7) Exemple ($n = 2$): Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, alors tout tenseur $t \in V \otimes V$ s'écrit $t = s(t) + a(t)$, ce qui définit une décomposition

$$V \otimes V = s(V \otimes V) \oplus a(V \otimes V)$$

(la somme est directe; voir 4.3.5(iv)). Si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de V (où $d = \dim(V) < \infty$), alors les tenseurs

$$s(e_i \otimes e_j) = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) \qquad\qquad (1 \leq i \leq j \leq d)$$

forment une base de $s(V \otimes V)$ et les tenseurs

$$a(e_i \otimes e_j) = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \qquad\qquad (1 \leq i < j \leq d)$$

forment une base de $a(V \otimes V)$. En particulier, on a

$$\dim(s(V \otimes V)) = 1 + 2 + \cdots + d = d(d+1)/2, \qquad \dim(a(V \otimes V)) = 1 + 2 + \cdots + (d-1) = d(d-1)/2.$$

(4.3.8) Si $n \geq 3$, $\mathrm{car}(K) \nmid n!$ et $\dim(V) > 1$, alors on a $s(\otimes^n V) \oplus a(\otimes^n V) \subsetneq \otimes^n V$.

(4.3.9) Si $\mathrm{car}(K) \nmid n!$ et si $f : V \longrightarrow W$ est une application linéaire, alors les opérateurs s, a commutent avec l'application

$$\otimes^n f : \otimes^n V \longrightarrow \otimes^n W, \qquad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_n),$$

donc $\otimes^n f$ induit des applications

$$s(\otimes^n f) : s(\otimes^n V) \longrightarrow s(\otimes^n W), \qquad a(\otimes^n f) : a(\otimes^n V) \longrightarrow a(\otimes^n W).$$

(4.3.10) Exemple: On suppose que $\dim(V) = 2$, $n = 2$, $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Fixons une base x, y de V; l'application $f : V \longrightarrow V$ s'écrit alors

$$f(x) = ax + cy, \qquad f(y) = bx + dy, \qquad \text{la matrice de } f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Les éléments $x^2 = x \otimes x, (xy + yx)/2 = (x \otimes y + y \otimes x)/2$ et $y^2 = y \otimes y$ forment une base de $s(V \otimes V)$; l'élément $(xy - yx)/2 = (x \otimes y - y \otimes x)/2$ est une base de $a(V \otimes V)$. On calcule l'action de $a(f \otimes f)$ et $s(f \otimes f)$:

$$a(f \otimes f) : \frac{xy - yx}{2} \mapsto \frac{(ax + cy)(bx + dy) - (bx + dy)(ax + cy)}{2} = (ad - bc)\,\frac{xy - yx}{2}.$$

$$s(f \otimes f) : \begin{cases} x^2 \mapsto (ax + cy)(ax + cy) = a^2x^2 + 2ac\,\dfrac{xy + yx}{2} + c^2y^2 \\ \dfrac{xy + yx}{2} \mapsto \dfrac{(ax + cy)(bx + dy) + (bx + dy)(ax + cy)}{2} = ab\,x^2 + 2(ad + bc)\,\dfrac{xy + yx}{2} + cd\,y^2 \\ y^2 \mapsto (bx + dy)(bx + dy) = b^2x^2 + 2bd\,\dfrac{xy + yx}{2} + d^2y^2 \end{cases}$$

Les matrices respectives de $a(f \otimes f)$ et $s(f \otimes f)$ sont donc égales à

$$\begin{pmatrix} ad - bc \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & 2(ad + bc) & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

(4.3.11) Plus généralement, si $\dim(V) = d < \infty$ et $\mathrm{car}(K) \nmid d!$, alors on a

$$a(\otimes^d V) = K \cdot a(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) = K \cdot \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes = K \sum_{\sigma \in S_d} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(d)},$$

où $e_1, \ldots, e_d$ est une base de V, et $a(\otimes^d f)$ agit par multiplication par $\det(f)$ (voir 4.4.13 et 4.4.17(iv) ci-dessous).

4.4 Algèbre extérieure, algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On fixe un espace vectoriel V.

(4.4.1) Rappel. Pour tout $n \geq 1$, l'application

$$i : V \times \cdots \times V \longrightarrow \otimes^n V, \qquad i(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

est une application n-linéaire **universelle**, c'est-à-dire que, pour tout espace vectoriel U, la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \{\overline{f} : \otimes^n V \longrightarrow U \mid \overline{f} \text{ linéaire}\} & \xrightarrow{\sim} & \{f : V \times \cdots \times V \longrightarrow U \mid f\ n\text{−linéaire}\} \\ \overline{f} & \mapsto & f = \overline{f} \circ i \qquad\qquad \left[f(v_1, \ldots, v_n) = \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\right] \end{array}$$

est **bijective**.

(4.4.2) Définition. *Soit $n \geq 1$. Une application n-linéaire $f : V \times \cdots \times V \longrightarrow U$ est dite:*
symétrique $\iff$ $(\forall \sigma \in S_n)\,(\forall v_j \in V) \qquad f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = f(v_1, \ldots, v_n)$;
antisymétrique $\iff$ $(\forall \sigma \in S_n)\,(\forall v_j \in V) \qquad f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, f(v_1, \ldots, v_n)$;
alternée $\iff$ $[(\exists i \neq j,\ v_i = v_j) \implies f(v_1, \ldots, v_n) = 0]$.

(4.4.3) Exercice. (i) *f est alternée $\Longrightarrow$ f est antisymétrique.*
(ii) *Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et si f est antisymétrique $\Longrightarrow$ f est alternée.*
(iii) *f est alternée $\iff$ $(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\,(\forall v_j \in V) \qquad f(v_1, \ldots, v_i, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_n) = 0$.*

(4.4.4) Exemples: (i) Si $\dim(V) = d < \infty$, fixons une base $e_1, \ldots, e_d$ de V. L'application d-linéaire (non nulle)

$$f : V \times \cdots \times V \longrightarrow K, \qquad f(v_1, \ldots, v_d) = \det\left((v_{ij})_{1 \le i,j \le d}\right), \qquad v_j = \sum_{i=1}^{d} v_{ij} e_i$$

est alternée.
(ii) Si $\mathrm{car}(K) \nmid n!$, alors l'application $s \circ i : V \times \cdots \times V \longrightarrow s(\otimes^n V)$ (resp. $a \circ i : V \times \cdots \times V \longrightarrow a(\otimes^n V)$) est symétrique (resp. alternée).

(4.4.5) But: On aimerait définir une application n-linéaire symétrique universelle

$$V \times \cdots \times V \xrightarrow{i} \otimes^n V \longrightarrow S^n V$$

et une application n-linéaire alternée universelle

$$V \times \cdots \times V \xrightarrow{i} \otimes^n V \longrightarrow \Lambda^n V.$$

(4.4.6) Le cas symétrique. Soient f et $\overline{f}$ comme en 4.4.1. Le groupe symétrique S_n est engendré par les transpositions $i \longleftrightarrow i+1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, ce qui entraîne que l'application f est symétrique $\iff$

$$\begin{aligned}
&(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\,(\forall v_j \in V) \qquad f(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) - f(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n) = 0 \iff \\
\iff\ &(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\,(\forall v_j \in V) \qquad \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \otimes v_n) = 0 \iff \\
&\iff \overline{f}(I_n) = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$I_n = \mathrm{vect}\{a \otimes (u \otimes v - v \otimes u) \otimes b \mid u, v \in V,\ a, b \in T(V)\} \cap \otimes^n V.$$

(4.4.7) Le cas alterné. D'après 4.4.3(iii), l'application f est alternée $\iff$

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n-1\})\,(\forall v_j \in V) \qquad \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \otimes v_n) = 0 \iff \overline{f}(J_n) = 0,$$

où l'on a noté

$$J_n = \mathrm{vect}\{a \otimes (v \otimes v) \otimes b \mid v \in V,\ a, b \in T(V)\} \cap \otimes^n V.$$

(4.4.8) Théorème-Définition. *On définit*

$$S^n V = (\otimes^n V)/I_n, \qquad S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V$$

($S^0(V) = K$, $S^1(V) = V$).
(i) $(\forall m, n \ge 0)$ $\quad I_m \otimes \otimes^n V \subset I_{m+n}$, $\otimes^m V \otimes I_n \subset I_{m+n}$, *donc le produit* $\otimes^m V \otimes \otimes^n V \longrightarrow \otimes^{m+n} V$ *induit un produit associatif*

$$S^m V \otimes S^n V \longrightarrow S^{m+n} V, \qquad x \otimes y \mapsto xy,$$

qui est aussi commutatif. Ceci signifie que $S(V)$ est une K-algèbre **N***-graduée commutative; on l'appelle* **l'algèbre symétrique** *de V [on verra que $S(V)$ est une algèbre de polynômes; voir 4.4.12 ci-dessous].*
(ii) *Pour toute application n-***linéaire symétrique** *$f : V \times \cdots \times V \longrightarrow U$ il existe une unique application* **linéaire** *$f' : S^n V \longrightarrow U$ vérifiant $f(v_1, \ldots, v_n) = f'(v_1 \cdots v_n)$.*

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \otimes^n V \arrow[r] & S^n V \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Preuve. (i) Les inclusions $I_m \otimes \otimes^n V \subset I_{m+n}$ et $\otimes^m V \otimes I_n \subset I_{m+n}$ sont immédiates. Pour démontrer que le produit xy dans $S(V)$ est commutatif, il suffit de remarquer que l'on a

$$(\forall u, v \in V) \qquad u \otimes v - v \otimes u \in I_2 \implies uv - vu = 0 \in S^2(V)$$

(ou que l'application $V \times V \xrightarrow{i} V \otimes V \longrightarrow S^2(V)$ est symétrique).
(ii) Ceci est une conséquence de 4.4.1 et 4.4.6.

(4.4.9) Théorème-Définition. *On définit*

$$\Lambda^n V = (\otimes^n V)/J_n, \qquad \Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n V$$

($\Lambda^0(V) = K$, $\Lambda^1(V) = V$).
(i) $(\forall m, n \geq 0)$ $\quad J_m \otimes \otimes^n V \subset J_{m+n}$, $\otimes^m V \otimes J_n \subset J_{m+n}$, *donc le produit* $\otimes^m V \otimes \otimes^n V \longrightarrow \otimes^{m+n} V$ *induit un produit associatif*

$$\Lambda^m V \otimes \Lambda^n V \longrightarrow \Lambda^{m+n} V, \qquad x \otimes y \mapsto x \wedge y,$$

qui vérifie

$$(\forall x \in \Lambda^m(V))\,(\forall y \in \Lambda^n(V)) \qquad y \wedge x = (-1)^{mn}\, x \wedge y.$$

Il en résulte que $\Lambda(V)$ est une K-algèbre **N**-*graduée; on l'appelle* **l'algèbre extérieure** *de V. On appelle un élément $x \in \Lambda^n(V)$ un n*-**vecteur**. *On dit que x est* **décomposable** *si $x = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ ($v_j \in V$).*
(ii) *Pour toute application n*-**linéaire alternée** *$f : V \times \cdots \times V \longrightarrow U$ il existe une unique application* **linéaire** *$f' : \Lambda^n V \longrightarrow U$ vérifiant $f(v_1, \ldots, v_n) = f'(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$.*

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \otimes^n V \arrow[r] & \Lambda^n V \arrow[dl, dotted, "f'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Preuve. (i) Les inclusions $J_m \otimes \otimes^n V \subset J_{m+n}$ et $\otimes^m V \otimes J_n \subset J_{m+n}$ sont immédiates. L'application $V \times V \xrightarrow{i} V \otimes V \longrightarrow \Lambda^2 V$ étant alternée ($\Longrightarrow$ antisymétrique), on a

$$(\forall u, v \in V) \qquad u \wedge v = -v \wedge u,$$

ce qui entraîne

$$(\forall u_i, v_j \in V) \qquad u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = (-1)^{mn} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m.$$

(ii) Ceci est une conséquence de 4.4.1 et 4.4.7.

(4.4.10) Fonctorialité. Si $g : V \longrightarrow W$ est une application linéaire, alors l'image de $I_n \subset \otimes^n V$ (resp. $J_n \subset \otimes^n V$) par l'application $\otimes^n g : \otimes^n V \longrightarrow \otimes^n W$ est contenue dans le sous-espace correspondant de $\otimes^n W$. Il en résulte que $\otimes^n g$ induit des applications linéaires

$$S^n(f) : S^n V \longrightarrow S^n W, \qquad \Lambda^n(f) : \Lambda^n(V) \longrightarrow \Lambda^n(W).$$

(4.4.11) Reformulation algébrique. (i) Un **idéal bilatère** d'un anneau A est un sous-groupe abélien $I \subset (A, +)$ du groupe additif de A qui vérifie $AI \subset I$ et $IA \subset I$ ($\iff$ $(\forall a \in A)\,(\forall i \in I) \quad ai \in I,\, ia \in I$).
(ii) On définit, pour $x, y \in A$,

$$x \equiv y \pmod{I} \iff x - y \in I.$$

Ceci est une relation d'équivalence qui conserve les opérations dans A: on a, pour tous $x, y, x', y' \in A$,

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv x' \pmod I \\ y \equiv y' \pmod I \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y \equiv x'+y' \pmod I \\ xy \equiv x'y' \pmod I \end{array}\right\}$$

(par exemple, on a $xy - x'y' = (x-x')y + x'(y-y') \in IA + AI \subset I + I = I$).
(iii) On définit **l'anneau quotient** A/I (= une généralisation de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) comme l'ensemble des classes d'équivalence $A/\equiv$, muni des opérations $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy}$, où on l'a noté $\overline{x}$ l'image de $x \in A$ dans A/I.
(iv) Si $\phi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors le noyau $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$ est un idéal bilatère de A et l'application $\overline{a} \mapsto \phi(a)$ induit un isomorphisme d'anneaux $A/\mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\phi)$.
(v) Si $S \subset A$ est un sous-ensemble, alors le plus petit idéal bilatère I de A contenant S est égal au sous-groupe abélien de $(A, +)$ engendré par les produits asa', où $a, a' \in A$ et $s \in S$. On dit que I est **l'idéal bilatère engendré par** S.
(vi) Si $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A_n$ est une K-algèbre $\mathbf{N}$-graduée, un idéal bilatère $I \subset A$ et dit **gradué** si

$$(\forall x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in I,\, x_n \in A_n) \qquad x_n \in I.$$

Si c'est le cas, alors on a $I = \oplus_{n=0}^{\infty} I_n$, où $I_n = I \cap A_n$ et l'anneau quotient

$$A/I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n/I_n$$

est $\mathbf{N}$-gradué (si $K \cap I = \{0\}$, alors A/I est une K-algèbre $\mathbf{N}$-graduée).
(vii) **Exemple clef:** Si $A = T(V)$, soit I (resp. J) l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par l'ensemble $\{u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V\}$ (resp. par $\{v \otimes v \mid v \in V\}$). D'après (v), les sous-espaces $I_n, J_n \subset \otimes^n V = A_n$ sont égaux à $I_n = I \cap A_n$ et $J_n = J \cap A_n$. Il est facile de voir que les idéaux I et J sont gradués au sens de (vi). Il en résulte que l'on a

$$S(V) = T(V)/I, \qquad \Lambda(V) = T(V)/J.$$

(4.4.12) Proposition (Algèbre symétrique = algèbre de polynômes). *Si* $\dim(V) = d < \infty$*, fixons une base* $e_1, \ldots, e_d$ *de* V*. L'application*

$$\phi : T(V) \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_d], \qquad \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 1}^{d} c_\alpha\, e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n} \mapsto \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 1}^{d} c_\alpha\, X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_n}$$

est un homomorphisme surjectif de K*-algèbres* $\mathbf{N}$*-graduées dont le noyau est égal à* $\mathrm{Ker}(\phi) = I$*; il en résulte que* ϕ *induit un isomorphisme de* K*-algèbres* $\mathbf{N}$*-graduées* $T(V)/I = S(V) \xrightarrow{\sim} K[X_1, \ldots, X_d]$*.*

Preuve. Par construction, ϕ est un homomorphisme surjectif de K-algèbres $\mathbf{N}$-graduées. Il est facile de voir que l'on a

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{vect}\{a \otimes (e_\alpha \otimes e_\beta - e_\beta \otimes e_\alpha) \otimes b \mid a, b \in T(V),\, 1 \leq \alpha, \beta \leq d\} = I.$$

(4.4.13) Proposition. *Si* $\mathrm{car}(K) \nmid n!$*, alors les applications linéaires canoniques*

$$g : s(\otimes^n V) \hookrightarrow \otimes^n V \longrightarrow S^n V, \qquad h : a(\otimes^n V) \hookrightarrow \otimes^n V \longrightarrow \Lambda^n V$$

sont des isomorphismes.

Preuve. D'après 4.4.4(ii) et 4.4.8, il existe une unique application linéaire $f' : S^n V \longrightarrow s(\otimes^n V)$ vérifiant

$$(\forall v_j \in V) \qquad f'(v_1 \cdots v_n) = s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n),$$

ce qui entraîne que f' est inverse à g (et de même pour h).

(4.4.14) Algèbre extérieure: formulaire. Comme

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow \otimes^n V \longrightarrow \Lambda^n V, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$$

est une application n-linéaire alternée, on a, pour tous $u, v, v_j \in V$,

$$v \wedge v = 0, \qquad u \wedge v = -v \wedge u, \qquad (\forall \sigma \in S_n) \quad v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_n,$$
$$(\exists i \neq j,\, v_i = v_j) \implies v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = 0.$$

(4.4.15) Théorème-Définition. *Si* $\dim(V) = d < \infty$, *fixons une base* $e_1, \ldots, e_d$ *de* V. *Si* $I \subset \{1, \ldots, d\}$, $I = \{i_1 < \cdots < i_n\}$ *(*$n = |I|$*), on pose* $e_I := e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \in \Lambda^n(V)$ *(si* $n = 0$, $e_\emptyset = 1 \in K = \Lambda^0(V)$*).*
(i) *Pour tout* $n \geq 0$, *les* n*-vecteurs* $\{e_I \mid I \subset \{1, \ldots, d\},\, |I| = n\}$ *forment une base de* $\Lambda^n(V)$.
(ii) $(\forall n \geq 0) \qquad \dim \Lambda^n(V) = \binom{d}{n}$.
(iii) $(\forall n > d) \qquad \Lambda^n(V) = 0$.

Preuve. Il suffit de démontrer (i). Les tenseurs $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d)$ engendrent $\otimes^n V$, donc leurs images $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ engendrent $\Lambda^n(V)$; comme

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = \begin{cases} 0, & (\exists k \neq l) \;\; i_k = i_l \\ \pm e_I, & \{i_1, \ldots, i_n\} = I,\, |I| = n, \end{cases}$$

les n-vecteurs $\{e_I \mid I \subset \{1, \ldots, d\},\, |I| = n\}$ engendrent $\Lambda^n(V)$. En particulier, on a $\dim \Lambda^n(V) \leq \binom{d}{n}$, d'où $(\forall n > d) \quad \Lambda^n(V) = 0$.
Pour démontrer que les éléments $\{e_I \mid |I| = n\}$ sont linéairement indépendants, on peut supposer que $d \geq n \geq 1$. Si $d = n$, on vient de démontrer que $\Lambda^d(V)$ est engendrée par $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$. L'exemple 4.4.4(i) et l'universalité de $\Lambda^d(V)$ entraînent $\Lambda^d(V) \neq 0$, d'où $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \neq 0$.
Si $d > n$, on suppose qu'il existe une relation linéaire

$$\sum_{|I|=n} \lambda_I\, e_I = 0 \in \Lambda^n(V) \qquad\qquad (\lambda_I \in K). \qquad\qquad (*)$$

On fixe $J \subset \{1, \ldots, d\}$ tel que $|J| = d - n$; si $I \subset \{1, \ldots, d\}$, $|I| = n$, alors on a

$$e_I \wedge e_J = \begin{cases} \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_d, & \text{si } I = J^\circ := \{1, \ldots, d\} - J \\ 0, & \text{si } I \neq J^\circ. \end{cases}$$

En multipliant $(*)$ par $\wedge e_J$, on obtient $\pm \lambda_{J^\circ} = 0$.

(4.4.16) Exemples: (i) $\dim(V) = 2$: une base de V: e_1, e_2; une base de $\Lambda^2(V)$: $e_1 \wedge e_2 = -e_2 \wedge e_1$.
(ii) $\dim(V) = 3$: une base de V: e_1, e_2, e_3; une base de $\Lambda^2(V)$: $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$; une base de $\Lambda^3(V)$: $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$.

(4.4.17) Coordonnées dans $\Lambda^n(V)$. (i) Si $n = 2$ et $d = 4$, les 2-vecteurs $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$, i.e.

$$e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_4, \quad e_3 \wedge e_4,$$

forment une base de $\Lambda^2(V)$. Soient $v_1, v_2 \in V$ des vecteurs; on les écrit $v_1 = \sum_{i=1}^4 v_{i1}\, e_i$ et $v_2 = \sum_{j=1}^4 v_{j2}\, e_j$, i.e.

$$v_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \end{pmatrix}, \qquad v_2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \end{pmatrix}$$

Le 2-vecteur décomposé $v_1 \wedge v_2$ est égal à

$$v_1 \wedge v_2 = \sum_{i,j=1}^{4} v_{i1}v_{j2}\, e_i \wedge e_j = \left(\sum_{i<j} + \sum_{i=j} + \sum_{i>j}\right) v_{i1}v_{j2}\, e_i \wedge e_j = \sum_{i<j} (v_{i1}v_{j2} - v_{j1}v_{i2})\, e_i \wedge e_j =$$

$$= \sum_{i<j} \begin{vmatrix} v_{i1} & v_{i2} \\ v_{j1} & v_{j2} \end{vmatrix} e_i \wedge e_j.$$

(ii) En général, si $v_1, \ldots, v_n \in V$, on écrit $v_j = \sum_{i=1}^{d} v_{ij}\, e_i$ $(j = 1, \ldots, n)$ et on calcule

$$x := v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \left(\sum_{i_1} v_{i_1 1}\, e_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n} v_{i_n n}\, e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{I=\{i_1<\cdots<i_n\}} \underbrace{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}}_{e_I} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_{i_{\sigma(1)}1} \cdots v_{i_{\sigma(n)}n} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,d\} \\ |I|=n}} x_I e_I,$$

où

$$x_I = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_{i_{\sigma(1)}1} \cdots v_{i_{\sigma(n)}n} = \det\left((v_{ij})_{i \in I, 1 \le j \le n}\right).$$

(iii) En particulier, si $n = d = \dim(V)$, on a $\Lambda^d(V) = K e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ et, pour tous $v_j \in V$,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = \left(\det (v_{ij})_{1 \le i,j \le d}\right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_d.$$

(iv) Si $f : V \longrightarrow V$ est une application linéaire et $d = \dim(V)$, alors l'application $\Lambda^d(f) : \Lambda^d(V) \longrightarrow \Lambda^d(V)$ est la multiplication par $\det(f)$, puisqu'on a, d'après (iii),

$$\Lambda^d(f)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) = f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_d) = \left(\det (f(e_i)_j)_{1 \le i,j \le d}\right) e_1 \wedge \cdots \wedge e_d = \det(f)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_d.$$

(4.4.18) Variété de Grassmann. On suppose que $d = \dim(V) < \infty$; on fixe $n \in \{0, \ldots, d\}$ et on définit

$$Gr(n, V) = \{W \subset V \mid W \text{ sous} - \text{espace vectoriel}, \dim(W) = n\}, \qquad Gr(n, d)(K) = Gr(n, K^d).$$

(i) Si $n = 1$, on a $Gr(n, V) = \mathbf{P}(V)$, $Gr(1, d)(K) = \mathbf{P}^{d-1}(K)$.
(ii) Si on fixe une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $f : V \times V \longrightarrow K$, alors l'application

$$Gr(n, V) \xrightarrow{\sim} Gr(d - n, V), \qquad W \mapsto W^{\perp}$$

est bijective.

(4.4.19) Proposition-Définition. (i) *Si $W \in Gr(n, V)$, alors $\Lambda^n(W) \subset \Lambda^n(V)$ est une droite vectorielle. Elle est engendrée par un n-vecteur décomposable $w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$, où $w_1, \ldots, w_n$ est une base de W.*
(ii) *La droite $\Lambda^n(W)$ détermine W; plus précisement,*

$$W = \{v \in V \mid \forall x \in \Lambda^n(W) \quad x \wedge v = 0 \in \Lambda^{n+1}(V)\}.$$

(iii) *On appelle l'application injective ainsi définie*

$$p : Gr(n, V) \hookrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^n(V)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{\binom{d}{n}-1}(K)$$

le **plongement de Plücker**. *L'image de p correspond aux n-vecteurs décomposables.*

Preuve. (i) Ceci résulte de 4.4.15.
(ii) Soit $w_1, \ldots, w_n$ une base de W; $\Lambda^n(W)$ est engendré par $x = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n$. Si $v \in V$, $v \notin W$, alors on peut compléter l'ensemble libre $w_1, \ldots, w_n, v$ à une base $w_1, \ldots, w_n, v, v_1, \ldots, v_{d-n-1}$ de V. En particulier, $x \wedge v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d-n-1} = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n \wedge v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d-n-1} \neq 0 \in \Lambda^d(V)$, ce qui entraîne que $x \wedge v \neq 0$. Réciproquement, si $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \in W$ $(\lambda_i \in K)$, alors on a $x \wedge v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, x \wedge w_i = 0$.

(4.4.20) Coordonnées de Plücker. Fixons une base $e_1, \ldots, e_d$ de V. On appelle les coordonnées homogènes $p_I(W)$ de $p(W)$ par rapport à la base $\{e_I \mid I \subset \{1, \ldots, d\}, |I| = n\}$ de $\Lambda^n(V)$ les **coordonnées de Plücker** de l'espace $W \in Gr(n, V)$.

Si on fixe une base $w_1, \ldots, w_n$ de W, alors on a (voir 4.4.17(ii))

$$x = w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \sum_{|I|=n} x_I e_I, \qquad x_I = \det\left((w_{ij})_{i \in I, 1 \le j \le n}\right), \qquad w_j = \sum_{i=1}^d w_{ij} e_i,$$

d'où

$$p_I(W) = c\, x_I = c \det\left((w_{ij})_{i \in I, 1 \le j \le n}\right) \qquad (c \in K^*)$$

(les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à une constante $c \in K^*$ près).

(4.4.21) Propriétés de $Gr(n, V)$. (i) On sait que l'espace projectif $\mathbf{P}^N(K)$ est égal à la réunion des espaces affines

$$\mathbf{P}^N(K) - H_i = \{(X_0 : \cdots X_N) \in \mathbf{P}^N(K) \mid X_i \neq 0\} \xrightarrow{\sim} K^N \qquad (i = 0, \ldots, N).$$

De même, $Gr(n, V)$ est la réunion des sous-ensembles

$$Gr(n, V)_I = \{W \in Gr(n, V) \mid p_I(W) \neq 0\} \subset Gr(n, V) \qquad (I \subset \{1, \ldots, d\}, |I| = n).$$

En utilisant la notation de la preuve de 4.4.15, on a, pour $W \in Gr(n, V)$,

$$W \in Gr(n, V)_I \iff \text{la projection } g_I : W \longrightarrow W_I \text{ est bijective.}$$

Il en résulte que chaque élément $W \in Gr(n, V)_I$ s'écrit, de manière unique, comme le graphe d'une application linéaire $\alpha_W : W_I \longrightarrow W_{I^0}$, où $I^0 = \{1, \ldots, d\} - I$:

$$V = W_I \oplus W_{I^0}, \qquad W = \{(x, \alpha_W(x)) \mid x \in W_I\}.$$

En fait, $Gr(n, V)_I$ admet une structure naturelle d'espace affine et la bijection

$$Gr(n, V)_I \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(W_I, W_{I^0}), \qquad W \mapsto \alpha_W$$

est un isomorphisme d'espaces affines. En particulier, on a

$$\dim Gr(n, V)_I = \dim \mathrm{Hom}_K(W_I, W_{I^0}) = \dim(W_I)\, \dim(W_{I^0}) = n(d - n)$$

(ce qui est compatible avec la "dualité" $Gr(n, V) \xrightarrow{\sim} Gr(d - n, V)$; voir 4.4.18(ii)).
(ii) L'image du plongement de Plücker $p(Gr(n, V)) \subset \mathbf{P}(\Lambda^n(V)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{\binom{d}{n}-1}(K)$ est une variété algébrique projective, c'est-à-dire que $p(Gr(n, V))$ est défini par un système d'équations polynomiales homogènes. Plus précisement, il existe un système d'équations quadratiques (les "équations de Plücker") qui définit $p(Gr(n, V))$.
(iii) Voici l'exemple le plus simple: $n = 2$, $d = 4$, $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Dans ce cas, on a

$$p : Gr(2, 4)(K) \hookrightarrow \mathbf{P}(\Lambda^2(K^4)) = \mathbf{P}^5(K), \qquad \dim(Gr(2, 4)(K)) = 2 \cdot (4 - 2) = 4.$$

L'image de p correspond aux 2-vecteurs décomposables

$$x = w_1 \wedge w_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} x_{ij}\, e_i \wedge e_j = x_{12}\, e_1 \wedge e_2 + \cdots + x_{34}\, e_3 \wedge e_4;$$

comme

$$0 = w_1 \wedge w_2 \wedge w_1 \wedge w_2 = x \wedge x = 2(x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23})\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4,$$

l'équation de Plücker s'écrit

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0.$$

En fait, un 2-vecteur $x \in \Lambda^2(K^4)$ est décomposable $\iff$ $x \wedge x = 0$, d'où

$$p(Gr(2,4)(K)) = \{(x_{12} : x_{13} : x_{14} : x_{23} : x_{24} : x_{34}) \in \mathbf{P}^5(K) \mid x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0\},$$

i.e. $p(Gr(2,4))$ est une quadrique projective (non-singulière) dans $\mathbf{P}^5$.

(4.4.22) Exercice. *Y a-t-il un lien entre 1.2.16 et 4.4.21?* *[Indication: utiliser 1.4.12.]*

VERSION 16/01/2008

Bibliographie

[L] Y. Ladegaillerie, *Géométrie - Affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, Ellipses, Paris, 2003.

[N] J. Nekovář, *Formes Quadratiques et Géométrie*, polycopié du cours LM 223, disponible à `http://www.math.jussieu.fr/~nekovar/co/q/`

[P] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, Paris, 1995.

[B] M. Berger, *Géométrie*, CEDIC, Paris, 1977.