TD 1 – Divisibilité

Énoncés

Exercice 1 –

1. Montrer : si $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ $(n \geq 0)$ sont des nombres complexes tels que $a_n = b_n - b_{n-1}$ $(n \geq 1)$, alors on a
$$\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = b_n - b_0.$$
Déterminer $b_n - b_{n-1}$ lorsque $b_n = n$, $b_n = n(n+1)$, $b_n = n(n+1)(n+2)$ etc.

2. Trouver une formule explicite pour les sommes suivantes :
$$\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 2 – Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Montrer les implications suivantes :

1. Si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors $c \mid (a \pm b)$.
2. Si $a \mid c$ et $b \mid d$, alors $ab \mid cd$.
3. Si $a \mid (b-1)$ et $a \mid (c-1)$, alors $a \mid (bc-1)$.

Exercice 3 – Soient a, b et c des entiers non nuls. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. Si $a \mid b^2$, alors $a \mid b$.
2. Si $a \mid bc$, alors $a \mid b$ ou $a \mid c$.
3. Si $a^2 \mid b^3$, alors $a \mid b$.
4. Si $a^3 \mid b^2$, alors $a \mid b$.

5. Si $a^3 \mid b^3$, alors $a \mid b$.

Exercice 4 – Si $p > 2$ est un nombre premier, alors on a $p = 4k \pm 1$ ($k \in \mathbf{N}$). Si $p > 3$ est un nombre premier, alors on a $p = 6l \pm 1$ ($l \in \mathbf{N}$).

Exercice 5 –

1. Résoudre $x^2 - y^2 = n, \quad x, y \in \mathbf{N} \quad$ pour $n = 20, 21$ et 22.
2. Si $x \in \mathbf{Z}$ est pair (resp. impair), alors on a $x^2 = 4k$ (resp. $x^2 = 4k + 1$), où $k \in \mathbf{Z}$.
3. $\{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbf{Z}\} = (2\mathbf{Z} + 1) \cup 4\mathbf{Z}$.
4. L'équation $x^2 + y^2 = 1000003$ admet-elle une solution $x, y \in \mathbf{Z}$?

Exercice 6 – Soit a un entier impair. Montrer que l'on a $4 \mid (a - 1)$ ou $4 \mid (a + 1)$. En déduire que $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ est divisible par 8, $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$ est divisible par 16,..., $a^{2^k} - 1$ est divisible par 2^{k+2} (pour tout $k \geq 1$).

Exercice 7 – Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, l'entier $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169. *Indication : la formule du binôme.*

Exercice 8 – Déterminer les entiers naturels n tels que n divise $n + 8$.

Exercice 9 – Déterminer tous les entiers n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 10 – Montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 11 – Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Si $2 \nmid n$, alors on a $2 \nmid (3^n - 1)/2$.
2. Si $2 \nmid n$ et si $(3^n - 1)/2$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
3. Si $2 \mid n$, alors on a $2 \nmid (3^n + 1)/2$.
4. Si $2 \mid n$ et si $(3^n + 1)/2$ est un nombre premier, alors $n = 2^k$.