TD 2 – Arithmétique des entiers

Énoncés

Exercice 1 – 157 est-il un nombre premier ?

Exercice 2 – Décomposer les entiers 2015 et 2016 en produit de nombres premiers.

Exercice 3 – Déterminer tous les diviseurs positifs de $n = 2^8$, leur nombre et leur somme. Idem pour $n = 1800$.

Exercice 4 – En utilisant le Théorème Fondamental de l'Arithmétique, montrer que $\dfrac{2+\sqrt[3]{20}}{3}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

Exercice 5 – Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 7$?

Exercice 6 – Soit $n \geq 2$ un entier et posons $N = n!$.

1. Montrer que les entiers $N+2, N+3, \ldots, N+n$ ne sont pas premiers.
2. Donner un exemple de 10 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 7 – Calculer le pgcd et le ppcm de 195 et 143.

Exercice 8 – Trouver $d = \text{pgcd}(36, 126)$ et une relation $36a + 126b = d$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Exercice 9 – Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{llllll} (1) & 4x+9y=1 & (3) & 5x-18y=4 & (5) & 56x+35y=14. \\ (2) & 18x+7y=2 & (4) & 6x+15y=28 & & \end{array}$$

Exercice 10 – Soient a, b, x et y des entiers $(a, b \neq 0)$. Montrer que si l'entier $d = ax + by > 0$ divise a et b alors c'est le pgcd de a et b.

Exercice 11 – Soient a, b, c et d des entiers non nuls. Démontrer les implications suivantes :

1. $\text{pgcd}(a, b) = d \Rightarrow \text{pgcd}(ac, bc) = d|c|$.
2. $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{pgcd}(a, c) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(a, bc) = 1$.

3. $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow \forall m, n \geq 2,\ \text{pgcd}(a^m, b^n) = 1.$
4. $\text{pgcd}(a, b) = d \Rightarrow \forall m \geq 2,\ \text{pgcd}(a^m, b^m) = d^m.$
5. $\text{pgcd}(a, b) = d \Rightarrow \forall m, n \geq 2,\ \text{pgcd}(\frac{a^m}{d^m}, \frac{b^n}{d^n}) = 1.$

Exercice 12 – Soient a et b deux entiers. Montrer que l'on a l'identité

$$\text{pgcd}(a, b) \cdot \text{ppcm}(a, b) = |ab|.$$

Exercice 13 – Soient a et b deux entiers strictement positifs et posons $m = \text{ppcm}(a, b)$. Montrer qu'il existe un diviseur a' de a, un diviseur b' de b, tels que $\text{pgcd}(a', b') = 1$ et $m = a'b'$.