TD 3 – Congruences

Énoncés

Exercice 1– Si $a \in \mathbf{N}$ et son écriture décimale donnée par $a = (a_r \cdots a_0)_{10} = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^r a_r$ ($a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$), alors on a

1. $3 \mid a \iff 3 \mid (a_0 + a_1 + \ldots + a_r)$
2. $9 \mid a \iff 9 \mid (a_0 + a_1 + \ldots + a_r)$
3. $11 \mid a \iff 11 \mid (a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^r a_r)$

Exercice 2 – Soient $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Montrer :

1. $x^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$.
2. Si $3 \mid (x^2 + y^2)$, alors $3 \mid x$ et $3 \mid y$.
3. Si $x^2 + y^2 = 3z^2$, alors $3 \mid x$, $3 \mid y$ et $3 \mid z$.
4. Si $x^2 + y^2 = 3z^2$, alors $x = y = z = 0$.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace 3 par 5 (resp. par 7) ?

Exercice 3 – La comète A passe tous les 5 ans et a été observée l'année dernière. La comète B passe tous les 8 ans et a été observée il y a deux ans. Quelle est la prochaine fois où l'on pourra observer les deux comètes la même année?

Exercice 4 – Résoudre dans $\mathbf{Z}$

$$(a) \left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 3 \pmod 7 \\ x & \equiv & 1 \pmod 8 \\ x & \equiv & 4 \pmod 9 \end{array} \right. , \qquad (b)\ 10x \equiv 6 \pmod{14}, \qquad (c) \left\{ \begin{array}{lcl} 7x & \equiv & 5 \pmod{19} \\ 6x & \equiv & 3 \pmod{15} \end{array} \right. .$$

Exercice 5 – Sans calculatrice, déterminer $3^{15} \pmod{2^3}$, $3^{15} \pmod{5^3}$ puis $3^{15} \pmod{1000}$.

Exercice 6 – Enumérer les classes de congruence inversibles $a \pmod{12} \in (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^*$. Pour chaque élément de l'ensemble $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^*$ déterminer son inverse. Idem pour $(\mathbf{Z}/18\mathbf{Z})^*$.

Exercice 7 – Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13.

Exercice 8 – Montrer que l'entier $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.

Exercice 9 – Montrer que l'on a $a^{m+10n} \equiv a^m \pmod{11}$, pour tous $a \in \mathbf{Z}$ et $m, n \geq 1$. Déterminer $b \in \{0, \ldots, 10\}$ tel que $b \equiv 2019^{9102} \pmod{11}$ sans calculatrice.

Exercice 10 – Déterminer $b \in \{0, 1, \ldots, 90\}$ tel que $2019^{2018} \equiv b \pmod{91}$ sans calculatrice.

Exercice 11 – Soit $a \in \mathbf{Z}$. Montrer

1. $2 \nmid a \;\Rightarrow\; a^2 \equiv 1 \pmod 8$.
2. $\mathrm{pgcd}(a, 6) = 1 \;\Rightarrow\; a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
3. $a^{13} \equiv a \pmod{2730}$.

Exercice 12 – Soit $x \in \mathbf{Z}$. Montrer :

1. si $\mathrm{pgcd}(x, 30) = 1$, alors on a $x^4 \equiv 1 \pmod{240}$;
2. $x^4 \equiv 0$ ou $1 \pmod{2^4}$, $x^4 \equiv 0$ ou $1 \pmod 3$ et $x^4 \equiv 0$ ou $1 \pmod 5$,
3. $x^4 \equiv x^8 \pmod{240}$,
4. pour tout $n \geq 0$, $x^{n+4} \equiv x^{n+8} \pmod{240}$,
5. $x^4 \equiv 0, 16, 96, 160 \pmod{240}$ ou $x^4 \equiv 1, 81, 145, 225 \pmod{240}$.

Exercice 13 – Déterminer $a \in \{0, 1, \ldots, 239\}$ tel que $2018^{2019} \equiv a \pmod{240}$ sans calculatrice.

Exercice 14 – Pour $n \in \mathbf{N}$ on note $a_n = 3^n$, $b_n = 4^n$ et $c_n = 1018 \cdot 2018^n + 1026 \cdot 2019^n$.

1. Que peut-on dire de valeurs de $a_n \pmod{13}$ et $b_n \pmod{13}$?
2. Que peut-on dire de valeurs de $c_n \pmod{13}$? Quand est-ce qu'on a $c_n \equiv 0 \pmod{13}$ (resp. $c_n \equiv 3 \pmod{13}$) ?

Exercice 15 – Soient $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Montrer :

1. $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$.
2. Si $4 \mid (x^2 + y^2 + z^2)$, alors $2 \mid x$, $2 \mid y$ et $2 \mid z$.
3. Si $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 4$, alors $2 \nmid x$, $2 \nmid y$, $2 \nmid z$ et $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 8$.
4. $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4^k(8l + 7)$ $(k, l \in \mathbf{N})$.

Exercice 16 – Montrer que pour tout entier $n > 0$, l'entier $2^{2^{6n+2}} + 3$ est divisible par 19.