TD 6 – Anneaux (unitaires)

Énoncés

Exercice 1 – Montrer : si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, alors on a $f(A^*) \subset B^*$ et $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ pour tout $a \in A^*$.

Exercice 2– Montrer : si A est un anneau commutatif, alors une matrice $M \in M_n(A)$ est inversible dans $M_n(A)$ si et seulement si $\det(M) \in A$ est inversible dans A.

Exercice 3 – Soit A un anneau. Décrire tous les morphismes d'anneaux $\mathbf{Z} \longrightarrow A$.

Exercice 4 – Montrer : si $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$ (resp. $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$) est un morphisme d'anneaux, alors on a $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$ (resp. pour tout $x \in \mathbf{Q}$).

Exercice 5 – Soit A un anneau. Décrire tous les morphismes d'anneaux $\mathbf{Q} \longrightarrow A$.

Exercice 6 – Montrer : si $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est un morphisme d'anneaux, alors $x > 0$ implique que $f(x) > 0$. En déduire que l'on a $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 7 – Soit A un anneau. Décrire tous les morphismes d'anneaux $\mathbf{Z}[X] \longrightarrow A$, où $\mathbf{Z}[X] = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_i \in \mathbf{Z},\, n \geq 0\}$ est l'anneau de polynômes en une variable à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 8– Montrer : si $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, où A est un corps et $B \neq \{0\}$, alors f est injectif.

Exercice 9 – Ecrire les idéaux suivants de $\mathbf{Z}$ sous la forme $(m) = m\mathbf{Z}$: $(10, 12) = (10) + (12)$, $(10) \cap (12)$, $(10) \cdot (12)$.

Exercice 10 – Décrire tous les idéaux d'un corps K.

Exercice 11 – Montrer :

1. $A = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{6}$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$.
2. Un élément quelconque de A s'écrit d'une manière unique $a + b\sqrt{6}$, où $a, b \in \mathbf{Q}$.
3. L'application $\sigma : A \longrightarrow A$, $\sigma(a + b\sqrt{6}) = a - b\sqrt{6}$ $(a, b \in \mathbf{Q})$ est un isomorphisme d'anneaux.
4. Décrire tous les morphismes d'anneaux $A \longrightarrow \mathbf{C}$.
5. A est un corps.