TD 7 – Polynômes

Énoncés

Exercice 1 – Soit K un corps. Donner un exemple d'un polynôme irréductible dans $K[X]$ qui admet une racine dans K.

Exercice 2 – Factoriser le polynôme X^4+1 dans $\mathbf{C}[X]$, $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{F}_2[X]$ et $\mathbf{F}_3[X]$.

Exercice 3 – Déterminer une relation de Bézout dans $\mathbf{Q}[X]$ entre les polynômes (a) X^3+1 et X^3-1, (b) $(X+1)^3$ et $(X-1)^3$ et (c) X^3+X^2+1 et X^3+X+1.

Exercice 4 – Soient $f, g \in \mathbf{Q}[X]$; on suppose f irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, alors f divise g.

Exercice 5 – Soit K un corps, $f \in K[X]$ et $a, b \in K$ $(a \neq b)$. Déterminer les restes respectifs de la division euclidienne de f par $(X-a)$, $(X-a)^2$ et $(X-a)(X-b)$.

Exercice 6 – Soit p un nombre premier.

1. Quel est le nombre de polynômes unitaires de degré 2 dans $\mathbf{F}_p[X]$?
2. Montrer que si f est un polynôme unitaire réductible de degré 2 dans $\mathbf{F}_p[X]$, alors :
   – ou bien $f = (X-a)(X-b)$ avec $a, b \in \mathbf{F}_p$, $a \neq b$; combien existe-t-il de tels polynômes ?
   – ou bien $f = (X-a)^2$ avec $a \in \mathbf{F}_p$; combien existe-t-il de tels polynômes ?
3. En déduire le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 dans $\mathbf{F}_p[X]$. Les expliciter pour $p = 2$ et $p = 3$.

Exercice 7 – Soient $m, n \geq 1$ des entiers, soit r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ dans $\mathbf{Q}[X]$ est égal à $X^r - 1$. En déduire que $\mathrm{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1$, où $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$.

Exercice 8 – Montrer que l'anneau $A = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\sqrt{6}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}[X]/(X^2-6)$.

Exercice 9– Montrer : si $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbf{Z}[X]$ (où $a_0a_n \neq 0$) a une racine rationnelle $a/b \in \mathbf{Q}$ (où $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$), alors on a $a \mid a_0$ et $b \mid a_n$.

Exercice 10 – Lesquels, parmi les polynômes $X^3 - X^2 - X \pm 1$ et $X^3 - X^2 - X \pm 2$, sont-ils irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$?

Exercice 11 – Soient $f = X^3 - 2$, $g = X^2 - 2X + 3$. Trouver $u, v \in \mathbf{Q}[X]$ tels que $uf + vg = 1$. Ecrire $(3 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^{-1}$ sous la forme $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, où $a, b, c \in \mathbf{Q}$.

Exercice 12 – Définir un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{R}[X]/(X^4 - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{C}$.

Exercice 13 – Trouver tous les polynômes unitaires irréductibles $f_j \in \mathbf{F}_2[X]$ de degré $\deg(f_j) = 3$. Montrer que les corps $K_j = \mathbf{F}_2[X]/(f_j)$ sont tous isomorphes entre eux. Quel est le cardinal de K_j ?

Exercice 14 – Soit $f = X^3 - X + 1 \in \mathbf{F}_3[X]$. On note $K = \mathbf{F}_3[X]/(f)$ et $\alpha = X \pmod{f} \in K$.

1. Montrer que K est un corps. Quel est son cardinal ?
2. Quels sont les ordres possibles des éléments de K^* ? Que peut-on dire de ceux qui ne sont pas dans $\mathbf{F}_3$?
3. Montrer que $\alpha^{13} = -1$. En déduire que α est un générateur de K^* (un élément d'ordre $|K^*|$).

Exercice 15 – Montrer que le polynôme $X^2 - X - 1 \in \mathbf{F}_7[X]$ est irréducible dans $\mathbf{F}_7[X]$. En déduire que l'anneau $K = \mathbf{F}_7[X]/(X^2 - X - 1)$ est un corps. Quel est son cardinal ? On note $\alpha \in K$ la classe de X; montrer que l'on a $\alpha^{483} = 2\alpha + 1$.

Exercice 16– Que se passe-t-il si l'on remplace $X^2 - X - 1$ dans l'exercice précédent par $X^2 - X + 1$?

Exercice 17 – Montrer : le polynôme $X^3 - X - 2 \pmod 5 \in \mathbf{F}_5[X]$ est irréductible dans $\mathbf{F}_5[X]$. Est-ce que cela implique que le polynôme $X^3 - X - 2$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$?

Exercice 18 –

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbf{F}_7$ le polynôme $X^3 - a$ est-il irréductible dans $\mathbf{F}_7[X]$?
2. Montrer que $K = \mathbf{F}_7[X]/(X^3 - 2)$ est un corps. Quels sont les ordres possibles des éléments de K^* ? Quel est l'ordre de la classe $\alpha = X \pmod{X^3 - 2} \in K^*$?
3. Trouver un élément de K^* d'ordre 19 de la forme $\beta = a + b\alpha$, où $a, b \in \mathbf{F}_7$. [Indication : $\beta \neq 1$ est d'ordre 19 $\iff$ $(\beta^7)^3 = \beta^2$.]
4. Trouver un générateur de K^* (un élément d'ordre $|K^*|$).