

# Cours introductif de M2

## Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations

Jean-François Dat

2013-2014

### Résumé

Dans ce cours, on étudie la structure des algèbres de Lie et de leurs “représentations linéaires”, principalement sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On sera amené à la jolie combinatoire des “systèmes de racines”.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Algèbres de Lie et Groupes de Lie</b>	<b>2</b>
1.1	Algèbres de Lie . . . . .	2
1.2	Groupes de Lie . . . . .	3
1.3	L’algèbre de Lie d’un groupe de Lie . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Algèbres de Lie : généralités</b>	<b>12</b>
2.1	Modules et représentations . . . . .	12
2.2	Algèbre enveloppante d’une algèbre de Lie . . . . .	20
2.3	Forme de Killing. Opérateurs de Casimir . . . . .	24
2.4	Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles . . . . .	25
2.5	Algèbres de Lie semi-simples . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Structure des algèbres de Lie semi-simples</b>	<b>35</b>
3.1	Sous-algèbres de Cartan et racines . . . . .	35
3.2	Systèmes de racines “abstraites” . . . . .	43
3.3	Classification des algèbres de Lie semi-simples . . . . .	52
3.4	Classification des systèmes de racines . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Représentations des algèbres de Lie semi-simples</b>	<b>60</b>
4.1	Modules de plus haut poids . . . . .	60
4.2	Classification des modules simples de dimension finie . . . . .	63

# 1 Algèbres de Lie et Groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous commençons par les définitions de base des algèbres de Lie, puis nous justifions ces définitions en expliquant comment elles proviennent de la notion naturelle de groupe de Lie.

## 1.1 Algèbres de Lie

Soit  $K$  un corps commutatif.

**1.1.1 DÉFINITION.**— Une  $K$ -algèbre de Lie est un  $K$ -ev  $L$  muni d'une application  $K$ -bilinéaire

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : L \times L &\rightarrow L \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

appelée “crochet de Lie” et satisfaisant les deux axiomes :

- i)  $[X, X] = 0$  pour tout  $X \in L$  (ce qui équivaut à  $[X, Y] = -[Y, X]$  pour tous  $X, Y$  si  $\text{car}(K) \neq 2$ ).
- ii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  pour tous  $X, Y, Z \in L$ . (identité de Jacobi)

*Remarque.* – Le rôle du second axiome est le même que celui de l'axiome d'associativité dans la définition des algèbres associatives.

*Exemple.* – Tout  $K$ -ev muni du crochet nul!

Voici quelques exemples moins triviaux.

**1.1.2 Algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre associative.** Si  $A$  est une  $K$ -algèbre associative, alors  $[x, y] := xy - yx$  définit un crochet de Lie sur  $A$  (exercice). L'exemple le plus important ici est l'algèbre  $A = \text{End}_K(V)$  des endomorphismes  $K$ -linéaires d'un  $K$ -espace vectoriel  $V$ . Lorsque  $V$  est de dimension finie, tout choix de base fournit un isomorphisme avec  $M_n(K)$ . Pour une raison qui apparaîtra plus tard, on note l'algèbre de Lie ainsi obtenue  $\mathfrak{gl}_n(K)$ , resp.  $\mathfrak{gl}(V)$ .

**1.1.3 Dérivations d'une algèbre.** Soit  $A$  une  $K$ -algèbre associative. Une *dérivation*  $\partial$  de  $A$  est un endomorphisme du  $K$ -espace vectoriel sous-jacent à  $A$  vérifiant la formule de Leibniz :  $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$ . L'ensemble  $\text{Der}(A)$  des dérivations de  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $\text{End}_K(A)$ . Le composé  $\partial \circ \partial'$  de deux dérivations  $\partial, \partial'$  n'est en général pas une dérivation (autrement dit,  $\text{Der}(A)$  n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative  $\text{End}_K(A)$ ), mais  $[\partial, \partial'] := \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$  est encore une dérivation de  $A$  (exercice!). Ainsi,  $\text{Der}(A)$  est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(A)$ .

*Exemple.* – Soit  $M$  une variété lisse (*i.e.* différentiable de classe  $C^\infty$ , aussi appelée “smooth manifold” en anglais). On rappelle, *cf* tout cours de géo diff de base, qu'un champ de vecteurs est une section lisse  $\xi : M \rightarrow TM$  du fibré tangent de  $M$  (intuitivement, la

donnée pour tout  $x \in M$  d'un vecteur  $\xi(x)$  tangent à  $M$  en  $x$  et dépendant de manière  $\mathcal{C}^\infty$  de  $x$ ). Un tel champ de vecteurs définit une dérivation de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  des fonctions lisses sur  $M$  qui envoie une fonction  $f$  sur la fonction  $x \mapsto d_x f(\xi(x))$ . On montre par un calcul local que l'application  $\mathcal{V}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$  ainsi obtenue est bijective. Il s'ensuit que le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension infinie)  $\mathcal{V}(M)$  de tous les champs de vecteurs sur  $M$  est muni d'une structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie.

De même, on définit une dérivation d'une  $K$ -algèbre de Lie  $L$  comme un élément  $\partial$  de  $\text{End}_K(L)$  vérifiant  $\partial([X, Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$ . Ici encore, le sous- $K$ -ev  $\text{Der}(L)$  n'est pas stable par produit (composition) mais est stable par crochet. *C'est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(L)$*

*Exemple.* – Voici un exemple très important de dérivation d'une algèbre de Lie. Pour  $Z \in L$ , notons

$$\begin{aligned} \text{ad}_Z : L &\rightarrow L \\ X &\mapsto \text{ad}_Z(X) := [Z, X] \end{aligned}$$

Compte tenu de l'antisymétrie du crochet, l'identité de Jacobi nous dit exactement que  $\text{ad}_Z$  est une dérivation de  $L$ .

**1.1.4 DÉFINITION.** – *Un morphisme d'algèbres de Lie est une application  $K$ -linéaire  $f : L \rightarrow L$  qui commute au crochet, ie  $\forall X, Y \in L, f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ .*

*Exemple.* – La trace  $\text{tr} : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow K$  est un morphisme d'algèbres de Lie. (Sur  $K$  on met l'unique crochet de Lie possible, à savoir le crochet nul).

*Cas particulier remarquable : représentations.* Un morphisme d'algèbres de Lie  $r : L \rightarrow \mathfrak{gl}_n(K)$  est appelé "représentation matricielle de  $L$ ". Plus intrinsèquement, si  $V$  est un  $K$ -ev, un morphisme d'algèbres de Lie  $r : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  est appelé "représentation linéaire de  $L$ ". On dit alors que  $V$  est l'espace de la représentation  $r$ . Voici un exemple très important.

**1.1.5 Représentation adjointe d'une algèbre de Lie.** L'identité de Jacobi montre que l'application

$$\begin{aligned} \text{ad} : L &\rightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ Z &\mapsto \text{ad}_Z \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. On l'appelle *représentation adjointe de  $L$* . Comme on l'a vu plus haut, son image est contenue dans la sous-algèbre de Lie des dérivations de  $L$ ; on a donc  $\text{ad}(L) \subset \text{Der}(L) \subset \text{End}_K(L)$ .

## 1.2 Groupes de Lie

**1.2.1 DÉFINITION.** – *Un groupe de Lie est une variété lisse  $G$  munie d'une loi de groupe lisse  $m : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$  dont l'application "passage à l'inverse"  $i : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$  est aussi lisse.*

*Exemples* : tout groupe discret (disons dénombrable), le groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$ , le groupe multiplicatif  $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ , son analogue complexe  $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ , et le cercle unité  $(S^1, \cdot)$ .

**1.2.2 Groupes généraux linéaires.** Ce sont en quelque sorte les exemples fondamentaux de groupes de Lie. Nous les rencontrerons sous deux formes.

*Forme matricielle.*  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ , muni de la structure  $C^\infty$  d'ouvert de  $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ . La multiplication  $(A, B) \mapsto AB$  est polynômiale en les entrées de  $A$  et  $B$ , donc  $C^\infty$ . L'application inverse  $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{com}(A)$  est analytique, donc en particulier  $C^\infty$ .

*Forme intrinsèque.* Si  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$ . Bien sûr, si  $n$  est la dimension de  $V$ , un choix de base de  $V$  fournit une bijection  $\mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  qui est un *isomorphisme de groupes de Lie* au sens de la définition suivante.

De même,  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est naturellement un groupe de Lie, et si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors  $\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$  est un groupe de Lie.

**1.2.3 DÉFINITION.**— *Un morphisme de groupes de Lie (parfois on dira simplement morphisme lisse) est une application  $G \xrightarrow{\varphi} G'$  qui est lisse et commute aux lois de groupe.*

Exemples.

- Le déterminant  $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ .
- L'exponentielle  $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}_{>0}^\times, \cdot)$  est un isomorphisme d'inverse le log.
- L'enroulement de la droite sur le cercle :  $\theta \in (\mathbb{R}, +) \mapsto \exp(2i\pi\theta) \in S^1$  est un difféomorphisme local surjectif.
- Les enroulements d'une droite sur le tore :  $\theta \in (\mathbb{R}, +) \mapsto (\exp(2i\pi\theta), \exp(2i\pi\theta\alpha)) \in S^1 \times S^1$ . Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , c'est une immersion injective, mais pas un plongement car l'image est dense.

Cas particuliers remarquables.

- Les morphismes  $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$  sont appelés (abusivement) *sous-groupes à 1 paramètre*.
- Un morphisme du type  $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$  est appelé *représentation (linéaire) de  $G$  sur  $V$* . L'espace  $V$  est aussi appelé "espace sous-jacent" à la représentation  $\rho$ .

**1.2.4 Variante holomorphe.** Un *groupe de Lie complexe* est une variété complexe munie d'une structure de groupe telle que la multiplication et l'inverse sont *holomorphes*. Un morphisme de groupe de Lie complexe est un morphisme de groupe holomorphe. Par exemple,  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est un groupe de Lie complexe et l'exponentielle  $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$  est un morphisme holomorphe.

**1.2.5 Variante algébrique.** Soit  $K$  un corps algébriquement clos, un *groupe algébrique affine sur  $K$*  est un sous-ensemble d'un  $K^n$  défini par des équations polynomiales et muni d'une structure de groupe dont le produit et l'inverse sont des polynômes en les coordonnées. Par exemple  $\mathrm{GL}_n(K)$  est un groupe algébrique sur  $K$ . Par contre il n'y a généralement pas d'analogue algébrique de l'exponentielle.

**1.2.6 DÉFINITION.**— *Un sous-groupe de Lie  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est une sous-variété qui est aussi un sous-groupe. De manière équivalente, l'injection  $H \hookrightarrow G$  est un plongement de groupes de Lie.*

Exemples.

- $H = \mathbb{Z}$  dans  $G = \mathbb{R}$ .
- $H = S^1$  dans  $G = \mathbb{C}^\times$ .

Puisqu'il est sous-variété, un sous-groupe de Lie est localement fermé. En utilisant l'action de translation, il est facile de prouver qu'il est en fait fermé. Le théorème suivant donne une réciproque assez spectaculaire, qui est source de nombreux exemples.

**1.2.7 THÉORÈME.** (Cartan, Von-Neumann)– *Tout sous-groupe fermé  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est un sous-groupe de Lie. Plus précisément, il existe une structure de groupe de Lie sur  $H$  (nécessairement unique) qui fait de  $H$  une sous-variété de  $G$ .*

Nous renvoyons aux notes [GALM2] pour une preuve. L'intérêt pratique de ce théorème est qu'il devient facile de produire plein de nouveaux exemples de groupes de Lie. La situation suivante est notamment féconde : supposons que  $G$  agisse de manière lisse sur une variété lisse  $M$  (i.e. que l'action  $G \times M \rightarrow M$  soit lisse). Alors le fixateur  $G_m$  d'un point  $m \in M$  est fermé, donc est un groupe de Lie.

En particulier, tous les "groupes classiques" sont des groupes de Lie. Comme ce sont les exemples les plus intéressants, nous en rappelons la liste ci-dessous. La lettre  $K$  désigne indifféremment les corps  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ , et  $V$  désigne un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

**1.2.8 Groupes spéciaux linéaires.** Le déterminant  $\mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}_1(K)$  étant un homomorphisme continu de groupes topologiques, son noyau  $\mathrm{SL}(V)$  est fermé donc un sous-groupe de Lie. On l'appelle *groupe spécial linéaire* de  $V$ . Un choix de base de  $V$  l'identifie à  $\mathrm{SL}_n(K)$ .

*Exercice.* – Le centre de  $\mathrm{SL}_n(K)$  est formé des homothéties de déterminant 1, donc il est isomorphe au groupe  $\mu_n(K)$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $K^*$  (d'ordre  $n$  si  $K = \mathbb{C}$ , d'ordre 1 ou 2 si  $K = \mathbb{R}$ ).

**1.2.9 Groupes orthogonaux.** Notons  $\mathrm{Sym}_K(V)$  le  $K$ -espace vectoriel des formes  $K$ -bilinéaires symétriques  $\Phi : V \times V \rightarrow K$ . On a une action linéaire, donc continue, de  $\mathrm{GL}(V)$  sur  $\mathrm{Sym}_K(V)$ , donnée par  $g\Phi(v, w) := \Phi(g^{-1}v, g^{-1}w)$ . Le stabilisateur de  $\Phi$  pour cette action est donc fermé dans  $\mathrm{GL}(V)$ , donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$\mathrm{O}(\Phi) := \{g \in \mathrm{GL}(V), \Phi(gv, gw) = \Phi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si  $\Phi$  est *non-dégénérée*, on l'appelle *groupe orthogonal* de  $\Phi$ .

Rappelons que deux formes quadratiques sont *équivalentes* si elles appartiennent à la même orbite sous  $\mathrm{GL}(V)$ . Il s'ensuit que leurs groupes orthogonaux sont conjugués dans  $\mathrm{GL}(V)$ , et en particulier isomorphes. Lorsque  $K = \mathbb{C}$ , on sait que toutes les formes

quadratiques sont équivalentes, de sorte que  $O(\Phi)$  est isomorphe au groupe orthogonal complexe usuel

$$O(n, \mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}), {}^t M M = I_n\}.$$

Lorsque  $K = \mathbb{R}$ , le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier  $p \leq n$  et d'une base  $e_1, \dots, e_n$  dans laquelle

$$\Phi \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

Le couple d'entiers  $(p, q := n - p)$  s'appelle la *signature* de  $\Phi$ . Ainsi  $O(\Phi)$  est isomorphe au groupe matriciel

$$O(p, q) := \{M \in M_{p+q}(\mathbb{R}), {}^t M \cdot D_{p,q} \cdot M = D_{p,q}\}$$

où  $D_{p,q} = D(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  est la matrice diagonale où 1 est répété  $p$  fois et  $-1$  l'est  $q$  fois. Pour  $p = n$  et  $p = 0$ , on retrouve le groupe orthogonal *euclidien*  $O(n, 0) = O(n)$  qui, comme on le sait bien, est compact. Les autres groupes orthogonaux ne sont pas compacts. On a  $O(p, q) = O(q, p)$  et on montre que les  $O(p, q)$  pour  $q \leq p$  sont deux à deux non isomorphes.

*Exemple.* – Pour la forme  $xx' + yy' + zz' - tt'$  sur l'espace-temps  $\mathbb{R}^4$ , on obtient ainsi le *groupe de Lorentz*  $O(3, 1)$  qui intervient dans la théorie de la relativité générale.

Par ailleurs, on définit les groupes spéciaux orthogonaux par

$$SO(p, q) := O(p, q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{R}).$$

**1.2.10 Groupes unitaires.** Ici  $K = \mathbb{C}$ . Notons  $\text{Herm}(V)$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes hermitiennes  $\Psi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . On a une action linéaire, donc continue, de  $GL(V)$  sur  $\text{Herm}(V)$ , donnée par  $g\Psi(v, w) := \Psi(g^{-1}v, g^{-1}w)$ . Le stabilisateur de  $\Psi$  pour cette action est donc fermé dans  $GL(V)$ , donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$U(\Psi) := \{g \in GL(V/\mathbb{C}), \Psi(gv, gw) = \Psi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si  $\Psi$  est *non-dégénérée*, on l'appelle *groupe unitaire* de  $\Psi$ .

Comme dans le cas symétrique, deux formes hermitiennes sont équivalentes si elles sont dans la même orbite sous  $GL(V)$ . Dans ce cas, leurs groupes unitaires sont isomorphes et même conjugués. Ici aussi, les formes hermitiennes sont classifiées par leur *signature* : le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier  $p \leq n$  et d'une base  $e_1, \dots, e_n$  dans laquelle

$$\Psi \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^p x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Ainsi, posant  $q = n - p$ , le groupe topologique  $U(\Psi)$  est isomorphe au groupe matriciel

$$U(p, q) := \{M \in M_{p+q}(\mathbb{C}), {}^t \bar{M} \cdot D_{p,q} \cdot M = D_{p,q}\}$$

Pour  $p, q = 0$ , on retrouve le groupe unitaire habituel  $U(n, 0) = U(n)$  qui, comme on le sait, est compact. Les autres groupes unitaires ne sont pas compacts. On a  $U(p, q) = U(q, p)$  et on montre que les  $U(p, q)$  pour  $q \leq p$  sont deux à deux non isomorphes.

*Remarque.* – Les groupes  $U(1, n - 1)$  jouent un rôle prépondérant dans des problèmes actuels de théorie des nombres.

De même que précédemment, on a le groupe spécial unitaire

$$SU(p, q) := U(p, q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{C}).$$

*Exercice.* – Déterminer les centres de  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ .

**1.2.11 Groupes symplectiques.** À nouveau,  $K$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Notons  $\text{Alt}_K(V)$  le  $K$ -espace vectoriel des formes  $K$ -bilinéaires alternées  $\psi : V \times V \rightarrow K$ . On a une action linéaire, donc continue, de  $GL(V)$  sur  $\text{Alt}_K(V)$ , donnée par  $g\psi(v, w) := \psi(g^{-1}v, g^{-1}w)$ . Le stabilisateur de  $\psi$  pour cette action est donc fermé dans  $GL(V)$ , donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$\text{Sp}(\psi) := \{g \in GL(V), \psi(gv, gw) = \psi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si  $\psi$  est *non-dégénérée* (on parle alors de *forme symplectique*), on l'appelle *groupe symplectique de  $\psi$* . La dimension de  $V$  est alors nécessairement paire, et on change la notation en  $\dim_K(V) = 2n$ . Comme plus haut, ce groupe ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'équivalence de  $\psi$ . Or, on sait que toutes les formes symplectiques sont équivalentes. En particulier, il existe une base  $e_1, \dots, e_{2n}$  de  $V$  dans laquelle on a

$$\psi \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

En d'autres termes, la matrice de  $\psi$  dans cette base est la matrice antisymétrique  $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$ . On voit alors que  $\text{Sp}(\psi)$  est isomorphe au *groupe symplectique*

$$\text{Sp}_{2n}(K) = \{M \in GL_{2n}(K), {}^t M J M = J\}.$$

Ainsi,  $\text{Sp}_2(K) = \text{SL}_2(K)$ . Plus généralement, on démontre que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1, de sorte que pour tout  $n$ ,  $\text{Sp}_{2n}(K)$  est un sous-groupe fermé, non compact, de  $\text{SL}_{2n}(K)$ .

*Exercice.* – Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel  $V/\mathbb{C}$  est une forme  $\mathbb{R}$ -bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sous-jacent  $\tilde{V}$ . En déduire que dans  $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \{P \in GL_{2n}(\mathbb{R}), P^{-1} J_{2n} P = J_{2n}\} \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$ , on a  $U(n) = O(2n) \cap \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ .

**1.2.12 Importance des groupes classiques.** Ils interviennent dans des domaines assez variés.

*Géométrie.* C'est leur domaine de prédilection. Ces groupes sont souvent des groupes de symétries d'espaces remarquables (sphères, hyperboloïdes...), et en tant que tels sont des modèles pour des géométries non-euclidiennes.

*Théorie des Nombres.* Voilà une application un peu plus surprenante, mais depuis une centaine d'années, on étudie des espaces de fonctions, formes différentielles etc sur des espaces de la forme  $G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R}) / K$  où  $G$  est un groupe classique réel et  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Par exemple pour  $G = \text{GL}_1$ , on obtient les fonctions trigonométriques, pour  $G = \text{GL}_2$  les formes modulaires, pour  $G$  général on parle de "formes automorphes". Ces objets interviennent de manière cruciale dans la preuve du théorème de Fermat, par exemple.

*Physique.*

- Le groupe de Lorentz de la relativité générale est  $O(1, 3)$ . C'est le groupe "associé à la géométrie de l'espace-temps".
- Certaines particules élémentaires sont classifiées par des représentations "irréductibles" de  $\text{SU}(3)$ .
- Les niveaux d'énergie d'un atome d'hydrogène sont donnés par les valeurs propres du Laplacien sphérique sur la sphère  $S^2$ , que l'on calculera plus tard en utilisant la "décomposition spectrale" de  $\mathcal{C}^\infty(S^2)$  sous l'action de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

*Remarque.* – Les groupes  $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ ,  $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$  et  $\text{O}_n(\mathbb{C})$  sont des groupes de Lie complexes, et même algébriques. Le groupe  $\text{U}(n)$  n'est pas un groupe de Lie complexe (mais il est défini par des applications polynomiales sur  $\mathbb{R}$ ).

### 1.3 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Il y a plusieurs manières de munir l'espace tangent  $T_e G$  d'un groupe de Lie en son élément neutre d'une structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie.

**1.3.1 Via les champs de vecteurs invariants à gauche.** C'est probablement la plus rapide. L'idée est que tout vecteur tangent en  $e$  définit, grâce à l'action de translation à gauche, un champ de vecteurs "invariant à gauche", et que cette construction est bijective. Formellement, faisons agir  $G$  sur lui-même par translations à gauche, en notant  $L_g(x) = gx$ . Ceci induit une action sur le fibré tangent  $TG$ , compatible à la projection  $\pi$ , et que nous noterons  $(g, \theta) \mapsto L_g^t(\theta)$ . L'application

$$\begin{aligned} TG &\rightarrow G \times T_e G \\ \theta &\mapsto (\pi(\theta), L_{\pi^{-1}(\theta)}^t(\theta)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme compatible aux projections sur  $G$ , dont l'inverse est donné par

$$\begin{aligned} G \times T_e G &\rightarrow TG \\ (g, X) &\mapsto (g, d_e L_g(X)) \end{aligned}$$



Le fibré tangent de  $G$  est donc “parallélisable”. Soit alors  $X \in \text{Lie}(G) := T_e G$ . On peut donc lui associer un *champ de vecteurs invariant à gauche* (ie tel que  $\xi(gh) = d_h(L_g)(\xi(h))$  pour tous  $h, g \in G$ )  $\xi_X$  par la formule :

$$\forall g \in G, \xi_X(g) := d_e L_g(X).$$

Soit  $\mathcal{V}(G)$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $G$  et  $\mathcal{V}(G)^L$  le sous-espace des champs invariants à gauche. On voit clairement que *l’application  $X \mapsto \xi_X$  est un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $T_e G \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G)^L$  dont l’inverse est  $\xi \mapsto \xi(e)$* . Maintenant, la dérivation associée à un champ de vecteurs invariant à gauche est aussi invariante à gauche, et un calcul montre que le crochet de deux dérivations invariantes à gauche est encore invariante à gauche. Cela définit un crochet de Lie sur  $T_e G$ .

**1.3.2** *Par différentiation de la représentation adjointe de  $G$ .* Pour un élément  $x \in G$ , on note

$$\begin{aligned} \text{Int}_x : G &\rightarrow G \\ y &\mapsto xyx^{-1} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \text{Ad}_x := d_e(\text{Int}_x) : T_e G \longrightarrow T_e G.$$

Puisque  $\text{Int}_x \circ \text{Int}_{x'} = \text{Int}_{xx'}$ , on a aussi  $\text{Ad}_x \circ \text{Ad}_{x'} = \text{Ad}_{xx'}$ , si bien que  $\text{Ad}_x$  est inversible et que l’application

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{GL}(T_e G) \\ x &\mapsto \text{Ad}_x \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. Comme l’application  $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xyx^{-1}$  est lisse, l’application obtenue par différentiation  $G \times T_e G \rightarrow T_e G, (x, Y) \mapsto \text{Ad}_x(Y)$  est lisse aussi, et par conséquent le morphisme  $\text{Ad}$  est lisse. On l’appelle *représentation adjointe* de  $G$ . Son espace sous-jacent est donc l’espace tangent en  $e$ .

Comme  $\text{GL}(T_e G)$  est un ouvert du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G)$ , on peut identifier ce dernier à l’espace tangent en tout point de  $\text{GL}(T_e G)$  et en particulier au point  $e$ . En différentiant  $\text{Ad}$  au point  $e$  on obtient alors une application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \text{ad} := d_e \text{Ad} : T_e G &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G) \\ X &\mapsto \text{ad}_X \end{aligned}.$$

Il ne reste plus qu’à définir le crochet par :

$$[X, Y] := \text{ad}_X(Y), \text{ pour } X, Y \in T_e G.$$

Par construction, c’est bien une application bilinéaire  $L \times L \rightarrow L$ . Pour la vérification des axiomes i) et ii) des crochets de Lie, on renvoie à [GALM2] 1.5.4 et 1.5.6. Et pour la vérification que ce crochet coïncide avec le précédent, voir [GALM2] 1.8.4.

*Propriétés.* –

- i) tout morphisme de groupes de Lie  $\varphi : G \rightarrow G'$  induit un morphisme d’algèbres de Lie  $d\varphi : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G')$  par dérivation en l’élément neutre.
- ii)  $\text{Lie}(G \times G') = \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G')$  (clair).

iii)  $\text{Lie}(G) = \text{Lie}(G^0)$  (composante connexe contenant  $e$ ).

*Exemples.* – i) L'algèbre de Lie d'un groupe discret est nulle.

ii)  $\text{Lie}(\mathbb{R}) = \text{Lie}(\mathbb{R}^\times) = \text{Lie}(S^1) = \mathbb{R}$  (muni du crochet nul). Plus généralement, le crochet de Lie d'un groupe de Lie *abélien* est nul.

iii)  $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  (cf notation plus haut) et la représentation adjointe est donnée par la conjugaison. En effet, l'espace tangent en  $I_n$  s'identifie à  $M_n(\mathbb{R})$ . Soient  $x, y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et supposons  $y = I_n + Y$  avec  $\|Y\| < 1$ . L'égalité  $xyx^{-1} = I_n + xYx^{-1}$  montre que  $\text{Ad}_x$  est la conjugaison par  $x$  sur  $M_n(\mathbb{R})$ . Supposons  $x = I_n + X$  avec  $\|X\| < 1$ . On a alors  $\text{Ad}_x(Y) = (I_n + X)Y(I_n - X) + o(X) = Y + [X, Y] + o(X)$ , ce qui montre que  $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ .

iv) Plus intrinsèquement,  $\text{Lie}(\text{GL}(V)) = \mathfrak{gl}(V)$ .

*Exercice.* – Montrer que la différentielle du déterminant  $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$  est la trace  $\text{tr} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**1.3.3 L'exponentielle.** La théorie des équations différentielles sur une variété lisse montre qu'il existe une *unique* application

$$\exp_G : \text{Lie}(G) \rightarrow G$$

telle que pour tout  $X$ , l'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp_G(tX)$  soit un sous-groupe à un paramètre de  $G$  dont la différentielle en 0 est  $X$ . Concrètement, ce sous-groupe à un paramètre est la courbe intégrale au champ de vecteurs  $\xi_X$  passant par  $e$ , ou autrement dit,  $\exp_G(X)$  est la valeur au temps  $t = 1$  et au point  $e \in G$  du *flot* du champs de vecteurs  $\xi_X$ , cf [GALM2], 1.7.

*Exemple.* – Pour  $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\exp_G$  est tout simplement l'exponentielle usuelle définie par  $\exp(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}$  pour  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .

L'unicité de l'exponentielle implique que si  $\varphi : G \rightarrow G'$  est un morphisme lisse, on a

$$\exp_{G'} \circ d\varphi = \varphi \circ \exp_G.$$

En particulier, l'exponentielle d'un sous-groupe de Lie est la restriction de celle du groupe ambiant.

La très forte interaction entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie provient de la propriété suivante, qui découle aussi de la théorie des équations différentielles dépendant d'un paramètre (ou peut se voir directement dans le cas de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ) :

*l'application  $\exp_G$  est lisse et réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $\text{Lie}(G)$  sur un voisinage de  $e$  dans  $G$ . De plus, l'image de  $\exp_G$  engendre la composante connexe  $G^0$  de  $G$  qui contient  $e$ .*

**1.3.4 Algèbres de Lie classiques.** Le théorème de Cartan-Von Neumann nous dit qu'un sous-groupe fermé  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  est une sous-variété. C'est donc un groupe de Lie et son algèbre de Lie  $\text{Lie}(H)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\text{Lie}(G)$ , i.e. son crochet est induit par celui de  $\text{Lie}(G)$ . Par ailleurs, l'exponentielle nous fournit la caractérisation suivante de  $\text{Lie}(H)$  en tant que sous-ensemble de  $\text{Lie}(G)$  :

$$\text{Lie}(H) = \{X \in \text{Lie}(G), \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}.$$

En appliquant cela à  $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$  ou  $\text{GL}(V)$ , on peut calculer les algèbres de Lie des groupes classiques.

Par exemple, l'égalité  $\exp(\text{tr}(u)) = \det(\exp(u))$  montre que

$$\mathfrak{sl}(V) := \text{Lie}(\text{SL}(V)) = \{u \in \mathfrak{gl}(V), \text{tr}(u) = 0\}.$$

Remarquons que c'est toujours un  $K$ -sev (pas seulement un  $\mathbb{R}$ -sev). En termes matriciels, cela donne

- i)  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(X) = 0\}$  (matrices de trace nulle). Sa dimension est  $n^2 - 1$ .
- ii)  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \text{tr}(X) = 0\}$ . Sa dimension réelle est  $2n^2 - 2$ .

Par ailleurs, supposons  $G = \{g \in \text{GL}(V), \Psi(gv, gw), \forall v, w \in V\}$  défini par une forme bilinéaire non dégénérée  $\Psi$  (qu'elle soit symétrique, alternée ou hermitienne). En d'autres termes, si  $g^*$  désigne l'adjoint de  $g$  pour  $\Psi$ , on a  $G = \{g \in \text{GL}(V), gg^* = \text{id}_V\}$ . Comme  $\exp(u)^* = \exp(u^*)$  (par passage à la limite), on constate que

$$\mathfrak{g} = \{u \in \mathfrak{gl}(V), u + u^* = 0\}.$$

Notons d'ailleurs que c'est toujours un  $K$ -espace vectoriel, sauf dans le cas unitaire, où  $K = \mathbb{C}$  mais  $\mathfrak{g}$  n'est qu'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. En termes matriciels, cela donne :

- iii)  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \text{Lie}(\text{O}(n)) = \text{Lie}(\text{SO}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), X + {}^tX = 0\}$  est l'ensemble des matrices antisymétriques. Sa dimension est  $n(n-1)/2$ .
- iv)  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \text{Lie}(\text{O}(n, \mathbb{C})) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^tX = 0\}$ . Sa dimension réelle est  $n(n-1)$ .
- v)  $\mathfrak{u}_n = \text{Lie}(\text{U}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^t\bar{X} = 0\}$ . Par exemple,  $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . Sa dimension est  $n^2$ .
- vi)  $\mathfrak{su}_n = \text{Lie}(\text{SU}(n)) = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ . Sa dimension est  $n^2 - 1$ .
- vii)  $\mathfrak{sp}_{2n}(K) = \text{Lie}(\text{Sp}_{2n}(K)) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(K), {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0\}$ . Pour calculer la dimension on remarque que  ${}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0 \Leftrightarrow (J_{2n}X \text{ symétrique})$ . On trouve que la dimension réelle est  $n(n+1)/2$  si  $K = \mathbb{R}$  et  $n(n+1)$  si  $K = \mathbb{C}$ .

*Remarque.* – Les équations définissant  $\mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{so}_n$  et  $\mathfrak{sp}_{2n}$  font sens sur n'importe quel corps  $K$ , nous fournissant ainsi des exemples d'algèbres de Lie sur un corps général.

De plus, si l'on se donne une extension quadratique  $K'$  de  $K$ , on peut aussi définir une sous- $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{u}_n(K'/K)$  de  $\mathfrak{gl}_n(K')$  analogue à  $\mathfrak{u}_n$  dans  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

**1.3.5 Interaction entre un groupe de Lie et son algèbre.** Voici quelques propriétés d'un groupe ou d'un morphisme de groupes de Lie qui se lisent sur son algèbre ou sur le morphisme d'algèbres de Lie induit.

- Un sous-groupe de Lie *connexe*  $H$  de  $G$  *connexe* est distingué si et seulement si  $\text{Lie}(H)$  est un idéal de  $\text{Lie}(G)$  (i.e.  $[\text{Lie}(H), \text{Lie}(G)] \subset \text{Lie}(G)$ ).
- Un sous-groupe de Lie *connexe*  $H$  de  $G$  *connexe* est central si et seulement si  $[\text{Lie}(H), \text{Lie}(G)] = 0$ .
- Si  $G$  est connexe, le noyau de la représentation adjointe est le centre de  $G$ .

Soit  $\varphi : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes de Lie.

- $d\varphi$  est surjective  $\Leftrightarrow \varphi(G) \supset G'^0$ ,
- $\text{Lie}(\text{Ker } \varphi) = \text{Ker}(d\varphi)$ . En particulier,  $d\varphi$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi)$  est discret,
- Si  $G'$  est connexe, alors  $d\varphi$  est bijective  $\Leftrightarrow \varphi$  est un revêtement.

Comme le montrent ces propriétés, le passage du groupe à son algèbre est plus intéressant lorsque le groupe est connexe (penser que l'algèbre de Lie d'un groupe fini est nulle...) et encore plus intéressant lorsqu'il est simplement connexe. Par exemple le théorème 1.9.2 de [GALM2] dit :

THÉORÈME. – Soient  $G, G'$  deux groupes de Lie. L'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{Gp.Lie}(G, G') & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{R}-AL}(\text{Lie}(G), \text{Lie}(G')) \\ \varphi & \mapsto & d\varphi \end{array} \quad \text{est :}$$

- i) injective, si  $G$  est connexe.
- ii) bijective, si  $G$  est simplement connexe.

Par ailleurs on peut montrer que toute  $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie de dimension finie provient d'un groupe de Lie. On a alors le corollaire impressionnant suivant : *le foncteur  $G \mapsto \text{Lie}(G)$  est une équivalence de catégories*

$$\{\text{Gpes de Lie simplement connexes}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{R}\text{-algs de Lie de dim finie}\}.$$

**1.3.6 Variantes complexes.** Si  $G$  est un groupe de Lie complexe,  $\text{Lie}(G)$  est naturellement une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie. De plus, la différentielle  $d\varphi$  d'un morphisme holomorphe  $\varphi : G \rightarrow G'$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

## 2 Algèbres de Lie : généralités

### 2.1 Modules et représentations

Soit  $K$  un corps commutatif. En copiant la définition d'un module sur une  $K$ -algèbre associative, on obtient la notion suivante

**2.1.1 DÉFINITION.**— *Un module sur une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  (ou  $\mathfrak{g}$ -module) est un  $K$ -espace vectoriel  $V$  muni d'une application  $K$ -bilinéaire*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (X, v) &\mapsto X \cdot v \end{aligned}$$

telle que  $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v)$  pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}$  et  $v \in V$ .

En d'autres termes, en notant  $r(X) \in \text{End}_K(V)$  l'endomorphisme  $v \mapsto X \cdot v$ , le couple  $(V, r)$  est une *représentation* de  $\mathfrak{g}$  au sens donné plus haut. Il faut donc penser aux représentations comme aux analogues des modules sur une algèbre associative. Cela nous conduira souvent à simplifier la notation en écrivant  $X \cdot v$  (ou même  $Xv$ ) au lieu de  $r(X)(v)$  et à parler indifféremment de “ $\mathfrak{g}$ -module” ou de “représentation de  $\mathfrak{g}$ ”.

*Exemple.* – La représentation adjointe n'est autre que le  $\mathfrak{g}$ -module  $\mathfrak{g}$  obtenu en faisant agir  $\mathfrak{g}$  sur elle-même à gauche, par le crochet :  $X \cdot Y := [X, Y]$ .

**2.1.2 Catégories de représentations de  $\mathfrak{g}$ .** Comme pour les algèbres associatives, un morphisme entre  $\mathfrak{g}$ -modules est une application linéaire qui commute aux actions de  $\mathfrak{g}$ . En termes de représentations, un morphisme entre  $(V, r)$  et  $(V', r')$  est une application  $K$ -linéaire  $f : V \rightarrow V'$  telle que  $\forall X \in \mathfrak{g}, r'(X) \circ f = f \circ r(X)$ , ce qui en notation simplifiée donne  $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, f(Xv) = Xf(v)$ . On note  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$  le  $K$ -e.v. formé par ces morphismes.

On obtient une *catégorie*  $\text{Rep}_K(\mathfrak{g})$  (ou simplement  $\text{Rep}(\mathfrak{g})$ ), dont les objets sont les représentations et les morphismes sont comme ci-dessus. C'est en fait une *catégorie abélienne* et les noyaux, conoyaux et sommes directes commutent au foncteur d'oubli vers la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels. En d'autres termes, si  $f : V \rightarrow V'$  est un morphisme de représentations, alors son noyau (au sens des espaces vectoriels) est une sous-représentation de  $V$  (ou si l'on préfère, un sous  $\mathfrak{g}$ -module de  $V$ ), son image une sous-représentation de  $V'$ , et son conoyau possède une unique structure de représentation rendant la projection depuis  $V'$  compatible aux actions (“représentation quotient”). De même on définit la somme directe de deux représentations comme la somme directe des espaces sous-jacents munie de l'action évidente de  $\mathfrak{g}$ .

*Exemple.* – Un idéal de  $\mathfrak{g}$  n'est autre qu'un sous  $\mathfrak{g}$ -module de  $\mathfrak{g}$ , ou encore une sous-représentation de la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ .

On notera aussi  $\text{Rep}^{\text{df}}(\mathfrak{g})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Rep}(\mathfrak{g})$  formée des représentations de dimension finies sur  $K$ .

**2.1.3 Représentations de groupes de Lie et foncteur “dérivation”.** La notion de  $\mathfrak{g}$ -module est inspirée du contexte des algèbres associatives. Si l'on utilise aussi la terminologie “représentation”, c'est en raison des liens qui les unissent aux groupes de Lie. Supposons, pour ce paragraphe, que  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $(V, \rho)$  est une représentation de  $G$ , on peut lui associer par dérivation une représentation  $(V, d\rho)$  de  $\text{Lie}(G)$ . De plus, si  $f : V \rightarrow V'$  est un morphisme de représentations de

$G$ , c'est aussi un morphisme des représentations de  $\text{Lie}(G)$  associées, puisque en dérivant au point  $g = e$  l'égalité  $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$  on trouve  $\forall X \in \text{Lie}(G)$ ,  $f \circ d\rho(X) = d\rho'(X) \circ f$ . On obtient ainsi un *foncteur exact*

$$\begin{aligned} \text{Rep}_K^{\text{df}}(G) &\rightarrow \text{Rep}_K^{\text{df}}(\text{Lie}(G)) \\ (V, \rho) &\mapsto (V, d\rho) \end{aligned} ,$$

qui est l'outil le plus important pour étudier les représentations de  $G$ .

PROPOSITION. – *Le foncteur “dérivation” ci-dessus est :*

- i) pleinement fidèle si  $G$  est connexe.
- ii) essentiellement surjectif (et donc une équivalence de catégories) si  $G$  est simplement connexe.

Voir [GALM2], 1.12.2.

*Remarque.* – Il est important ici de se limiter aux représentations de dimension finie. Il existe des représentations de dimension infinie de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  qui ne s'intègrent pas à  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Les définitions et constructions qui suivent sont parallèles à des définitions et constructions concernant les représentations de groupes (et qui pour la plupart n'ont pas d'analogues chez les modules sur une algèbre associative). Il paraît donc intéressant de traiter les deux contextes en parallèle.

**2.1.4 Représentations triviales, unités, vecteurs invariants.** Soit  $V$  l'espace vectoriel d'une représentation d'un groupe  $G$  ou d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On note

- (groupes) :  $V^G := \{v \in V, \forall g \in G, gv = v\}$  le s.e.v. des vecteurs invariants sous  $G$ .
- (algèbres) :  $V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, Xv = 0\}$  le s.e.v. des vecteurs annulés par  $\mathfrak{g}$ .

*Remarque.* – Si  $(V, \rho)$  est une représentation d'un groupe de Lie  $G$  connexe, on montre facilement que  $V^{\text{Lie}(G)} = V^G$ .

Une représentation  $V$  de  $G$ , resp. de  $\mathfrak{g}$ , est dite *triviale* si  $V = V^G$ , resp. si  $V = V^{\mathfrak{g}}$ .

La *représentation unité* de  $G$ , resp.  $\mathfrak{g}$ , est l'espace vectoriel  $K$  muni de la représentation triviale. On la note simplement  $K$  en l'absence d'ambiguïté.

**2.1.5 Produit tensoriel, contragrédiente, Hom interne.** Soient  $V, V'$  deux  $K$ -espaces vectoriels sous-jacents de représentations  $\rho, \rho'$  d'un groupe, ou  $r, r'$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

i) On munit  $V \otimes_K V'$  de la représentation *produit tensoriel* définie par :

- (groupes)  $g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$ , ou encore  $g(v \otimes v') := gv \otimes gv', \forall v \in V, v' \in V'$ .
- (algèbres)  $X \mapsto r(X) \otimes \text{id}_{V'} + \text{id}_V \otimes r'(X)$ , ou encore  $X(v \otimes v') := Xv \otimes v' + v \otimes Xv', \forall v \in V, v' \in V'$ .

*Exercice.* – Vérifier que la seconde définition fournit bien une représentation de  $\mathfrak{g}$ , puis vérifier que lorsque  $G$  est un groupe de Lie, la dérivée de  $\rho \otimes \rho'$  est bien  $d\rho \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d\rho'$ .

*Exercice.* – Si  $V' = K$  est la représentation unité, vérifier que  $V \otimes_K K \simeq V$  (ceci expliquant la terminologie “représentation unité”).

*Remarque.* – Il n’y pas de notion de produit tensoriel de  $A$ -modules, pour une algèbre associative  $A$  quelconque.

- ii) On munit  $\text{Hom}_K(V, V')$  de la représentation *Hom interne* définie par
- (groupes)  $(g, f) \mapsto \rho'(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$ , ou encore :  $(gf)(v) := gf(g^{-1}v)$ ,  $\forall v \in V$ .
  - (algèbres)  $(X, f) \mapsto r'(X) \circ f - f \circ r(X)$ , ou encore :  $(Xf)(v) := Xf(v) - f(Xv)$ ,  $\forall v \in V$ .

On notera  $\mathcal{H}om_K(V, V')$  cette représentation Hom-interne (avec un  $\mathcal{H}$ ).

*Exercice.* – Vérifier que ces formules définissent bien des représentations, et que la dérivée du Hom interne pour un groupe de Lie  $G$  est le Hom interne pour  $\text{Lie}(G)$ .

*Remarque.* – On a  $\text{Hom}_G(V, V') = \mathcal{H}om_K(V, V')^G$  et  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') = \mathcal{H}om_K(V, V')^{\mathfrak{g}}$ .

iii) Un cas particulier important du ii) est lorsque  $V' = K$  est la représentation unité. Dans ce cas on note simplement  $V^\vee := \mathcal{H}om_K(V, K)$  et on l’appelle *contragrédiente* (ou aussi *duale*) de  $V$ .

Le produit tensoriel et le Hom interne sont liés de la manière suivante :

LEMME. – Si  $V$  et  $V'$  sont de dimension finie, le morphisme  $V^\vee \otimes_K V' \longrightarrow \mathcal{H}om_K(V, V')$  qui envoie  $v^* \otimes v'$  sur le morphisme  $(v, v') \mapsto \langle v, v^* \rangle v'$  est un isomorphisme de représentations.

*Démonstration.* Exercice. □

**2.1.6 Réduction des représentations.** Une représentation  $V$  (d’un groupe ou d’une algèbre de Lie) est dite :

- *irréductible* si ses seules sous-représentations sont  $\{0\}$  et  $V$ .
- *complètement réductible* si elle est somme directe de sous-représentations *irréductibles*.
- *indécomposable* si elle n’est pas *somme directe* de deux sous-représentations.

*Exemple.* (Le cas  $\mathfrak{g} = K$ ) – Supposons  $\mathfrak{g}$  de dimension 1, et soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Une représentation  $(V, r)$  de  $\mathfrak{g}$  est alors déterminée par l’endomorphisme  $r(X) \in \text{End}_K(V)$ . Lorsque  $K$  est *algébriquement clos*, on voit que :

- $V$  est irréductible si et seulement si  $\dim_K(V) = 1$  (existence de droites propres.)
- $V$  est complètement réductible si et seulement si  $r(X)$  est diagonalisable.
- $V$  est indécomposable si et seulement si dans la décomposition de Jordan  $r(X) = r(X)_s + r(X)_n$ , l’ordre de nilpotence de  $r(X)_n$  est la dimension de  $V$  (et  $r(X)_s$  est alors une homothétie). En d’autres termes,  $r(X)$  a un seul bloc de Jordan.

*Par contre*, lorsque  $K$  n’est pas algébriquement clos, une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  peut être de dimension  $> 1$ . Par exemple pour  $K = \mathbb{R}$ , celle de dimension 2 donnée par

$$r(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Remarque.* – Si  $(V, \rho)$  est une représentation de dimension finie d'un groupe de Lie *connexe*  $G$ , alors  $(V, \rho)$  est irréductible, resp. indécomposable, resp. complètement réductible, si et seulement si  $(V, d\rho)$  l'est.

*Exercice.* – Montrer que  $V$  est irréductible, indécomposable ou complètement réductible si et seulement si  $V^\vee$  l'est.

On voit facilement par récurrence descendante sur la dimension que toute représentation de dimension finie est somme directe de sous-représentations indécomposables. Ainsi, comprendre la catégorie  $\text{Rep}^{\text{df}}(G)$  ou  $\text{Rep}^{\text{df}}(\mathfrak{g})$  nécessite a priori de classifier les représentations indécomposables. Dans l'exemple ci-dessus, elles sont classifiées par la dimension et l'unique valeur propre de  $X$ . Mais en général, ce problème peut devenir trop difficile, voire sans espoir, par exemple pour l'algèbre de Lie abélienne (i.e. avec crochet nul)  $\mathfrak{g} = K^3$  (pour laquelle une représentation revient à se donner 3 endomorphismes commutant 2 à 2 d'un espace  $V$ ).

Les choses se simplifient beaucoup si l'on sait que les représentations de  $G$  ou de  $\mathfrak{g}$  sont toutes *complètement réductibles*. Dans ce cas, l'application du lemme de Schur ci-dessous montre qu'il suffit de classifier les irréductibles, et cela s'avère souvent plus facile.

**2.1.7 Lemme de Schur.** Soit  $f : V \rightarrow V'$  un morphisme de représentations *irréductibles*. Si  $f$  est non nul, on a  $\text{Ker}(f) \neq V$  donc  $\text{Ker}(f) = 0$  par irréductibilité de  $V$ , et de même  $\text{Im}(f) \neq 0$  donc  $\text{Im}(f) = V'$  par irréductibilité de  $V'$ . Ainsi,  $f$  est soit *nul*, soit *invertible*.

En particulier, si  $V$  est irréductible de dimension finie,  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V)$  est une  $K$ -algèbre à division de dimension finie. Lorsque  $K$  est algébriquement clos, cela implique  $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V) = K$  (*lemme de Schur*).

*Application.* – Une représentation complètement réductible  $V$  s'écrit *de manière unique* (à l'ordre près) sous la forme  $V = V_1^{\oplus e_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{\oplus e_r}$  avec  $V_1, \dots, V_r$  des représentations irréductibles 2 à 2 non isomorphes. En effet, on retrouve la multiplicité  $e_i$  par la formule

$$e_i = \dim_K(\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_i, V)) / \dim_K(\text{End}_{\mathfrak{g}}(V_i)).$$

*Remarque.* – Pour une représentation qui n'est pas complètement réductible, il existe aussi un résultat d'*unicité* de décomposition en somme directe d'indécomposables, connu sous le nom de théorème de Krull-Schmidt-Azumaya. Sa preuve est plus délicate et nous n'en aurons pas besoin. On pourra consulter un des livres de théorie des représentations de Curtis et Reiner.

**2.1.8** Nous verrons plus tard que cette propriété de complète réductibilité est satisfaite pour les algèbres de Lie "semi-simples" sur un corps de caractéristique nulle. En attendant, familiarisons-nous avec cette notion.

LEMME. – *Pour une représentation  $V$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) toute sous-représentation  $W$  de  $V$  admet un supplémentaire stable (donc une sous-représentation)  $W' \oplus W = V$ .*



- ii)  $V$  est complètement réductible,
- iii)  $V$  est somme de ses sous-représentations irréductibles.

*Démonstration.* i)  $\Rightarrow$  ii). Par récurrence sur la dimension de  $V$ . Si  $V$  est irréductible (donc en particulier si  $\dim(V) = 1$ ) il n'y a rien à faire. Sinon, prenons une sous-représentation  $W$  de  $V$  de dimension  $> 0$  minimale. Elle est donc irréductible et, par hypothèse, admet un supplémentaire stable  $V'$ . Montrons que  $V'$  satisfait encore i). Soit  $W' \subset V'$  une sous-représentation, et soit  $W''$  un supplémentaire stable de  $W \oplus W'$  dans  $V$ . Alors sa projection sur  $V'$  (le long de  $W$ ) est un supplémentaire stable de  $W'$  dans  $V'$ . Ainsi  $V'$  satisfait i) et par hypothèse de récurrence,  $V'$  est somme directe d'irréductibles. Donc  $V = W \oplus V'$  aussi.

ii)  $\Rightarrow$  iii) est tautologique.

iii)  $\Rightarrow$  i). Montrons que  $W \subset V$  admet un supplémentaire stable par récurrence sur la codimension de  $W$ . Si la codimension est nulle il n'y a rien à faire. Sinon, il existe (par hypothèse) une représentation irréductible  $U$  de  $V$  telle que  $U \not\subset W$ , et donc  $W \cap U = \{0\}$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $W \oplus U$  nous fournit  $W'_1$  supplémentaire de  $W \oplus U$  et il n'y a plus qu'à poser  $W' := U \oplus W'_1$ .  $\square$

Voici un exemple de situation de complète réductibilité.

*Exemple.* – Supposons que  $K = \mathbb{C}$ . Soit  $V$  une représentation munie d'un produit scalaire hermitien *invariant* au sens suivant :

- (groupes)  $\forall v, v' \in V, \forall g \in G, \langle gv, gv' \rangle = \langle v, v' \rangle$
- (algèbres)  $\forall v, v' \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, \langle Xv, v' \rangle + \langle v, Xv' \rangle = 0$ .

Alors  $V$  est complètement réductible. En effet, si  $W \subset V$  un sous-espace stable, alors son orthogonal  $W^\perp = \{v \in V, \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\}$  est en somme directe  $W \oplus W^\perp$  (puisque  $\langle, \rangle$  est défini positif) et est stable.

*Exercice.* – Soit  $G$  un groupe fini,  $V$  une représentation de  $G$  et  $\langle, \cdot \rangle$  un produit hermitien sur  $V$ . Montrer que la formule  $(v, w) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle$  définit un produit hermitien  $G$ -invariant. En conclure que toute représentation complexe d'un groupe fini est complètement réductible.

**2.1.9 Représentations d'un produit.** Soient  $G, G'$  deux groupes, ou  $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$  deux algèbres de Lie. Si  $W$  est une représentation complexe de  $G$ , resp.  $\mathfrak{g}$ , et  $W'$  une représentation de  $G'$ , resp.  $\mathfrak{g}'$ , on munit  $W \otimes_K W'$  de la représentation  $(g, g')(v \otimes v') := (gv, gv')$  de  $G \times G'$ , resp.  $(X, X')(v \otimes v') := Xv \otimes v' + v \otimes X'v'$  de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ .

PROPOSITION. – Supposons  $K$  algébriquement clos. Dans chacune des deux situations (groupes ou algèbres), on a :

- i) Si  $W$  et  $W'$  sont irréductibles, alors  $W \otimes_K W'$  l'est aussi (**pour le produit !**).
- ii) Toute représentation irréductible  $V$  de  $G \times G'$ , resp.  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ , est de la forme  $W \otimes_K W'$  comme ci-dessus.
- iii) Si  $W$  et  $W'$  sont complètement réductibles, alors  $W \otimes_K W'$  aussi.

*Démonstration.* Nous traitons le cas des algèbres de Lie. Celui des groupes est totalement analogue. Commençons par une construction générale. Si  $W \in \text{Rep}(\mathfrak{g})$  et  $V \in \text{Rep}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}')$ , on munit  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, V)$  de la représentation de  $\mathfrak{g}'$  définie par  $(X'f)(w) := X' \cdot f(w)$  (c'est une variante de la construction "Hom interne"). On a alors une application d'évaluation :

$$\begin{aligned} \text{ev}_{W,V} : \quad W \otimes_K \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, V) &\rightarrow V \\ w \otimes f &\mapsto f(w) \end{aligned}$$

On vérifie aisément que c'est un morphisme de représentations de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  (exercice : le vérifier!).

Supposons maintenant que  $V$  et  $W$  sont irréductibles, et que  $W$  est isomorphe à une sous-représentation irréductible de  $V_{|\mathfrak{g}}$ . Dans ce cas,  $\text{ev}_{W,V}$  est non nulle, et donc surjective. Soit  $n' := \dim_K(\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, V))$ . On a donc une surjection  $W^{\oplus n'} \twoheadrightarrow V$ , qui montre que  $V$  est complètement réductible en tant que  $\mathfrak{g}$ -module, et isomorphe à  $W^{\oplus e}$  pour un  $e \leq n'$ . Mais alors, puisque  $K$  est algébriquement clos, le lemme de Schur nous dit que  $n' = e$ , et finalement on a montré que  $\text{ev}_{W,V}$  est un isomorphisme. Il s'ensuit aussi que  $W' := \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, V)$  est un  $\mathfrak{g}'$ -module irréductible et que, en tant que  $\mathfrak{g}'$ -module, on a  $V \simeq W'^{\oplus n}$  où  $n = \dim_K(W)$ .

On a donc prouvé ii). On en déduit aussi i) en appliquant ceci à une sous-représentation irréductible non nulle de  $W \otimes_K W'$ .

Il reste à prouver iii). Mais si  $W = \bigoplus_i W_i$  et  $W' = \bigoplus_j W'_j$  avec les  $W_i$  et les  $W'_j$  irréductibles, alors  $W \otimes W' = \bigoplus_{i,j} W_i \otimes W'_j$  est une décomposition en somme d'irréductibles.  $\square$

**2.1.10 Représentations irréductibles de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  en caractéristique nulle.** À titre d'exemple, mais surtout parce que les techniques et résultats intermédiaires utilisés seront fondamentaux pour notre étude ultérieure des algèbres de Lie "semi-simples", nous classifions ici les représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$ , sous l'hypothèse que  $K$  est algébriquement clos de caractéristique nulle.

Rappelons que  $\mathfrak{sl}_2$  est de dimension 3. On utilisera la base  $(E, H, F)$  suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le crochet de  $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2$  y est déterminé par les formules suivantes :

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Si  $(V, r)$  est une représentation de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $\lambda \in K$ , on notera

$$V_\lambda := \text{Ker}(r(H) - \lambda \text{id}_V).$$

Si  $V_\lambda \neq 0$ , c'est l'espace propre de la valeur propre  $\lambda$  de  $r(H)$ . On dit alors que  $\lambda$  est un poids de  $H$  dans  $V$ .

LEMME. — Soit  $(V, r)$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  et  $\lambda \in K$  un poids de  $H$  dans  $V$ . Alors  $r(E)V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$  et  $r(F)V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$ .

*Démonstration.* Soit  $v \in V_\lambda$ . On a  $HEv = EHv + [H, E]v = \lambda Ev + 2Ev = (\lambda + 2)Ev$ . De même  $HFv = (\lambda - 2)Fv$ .  $\square$

PROPOSITION. – Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ , il existe une unique (à isomorphisme près) représentation irréductible  $(V_m, r_m)$  de  $\mathfrak{g}$  de dimension  $m + 1$ . De plus, les poids de  $H$  dans  $V_m$  sont  $\{-m, -m + 2, \dots, m - 2, m\}$ .

*Démonstration.* i) Montrons d'abord l'unicité. Soit  $V$  une représentation irréductible de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $K$  est algébriquement clos, l'ensemble des poids de  $V$  est non vide. Comme cet ensemble est aussi fini et  $K$  est de caractéristique nulle, il existe un poids  $\lambda_0$  tel que  $\lambda_0 + 2$  ne soit pas un poids. Soit  $v_0 \in V_{\lambda_0}$  non nul. D'après le lemme précédent, on a alors  $EV_{\lambda_0} = 0$ .

Posons  $v_k := \frac{1}{k!} F^k v_0$  et  $W = \text{Vect}_K\{v_k, k \in \mathbb{N}\}$  l'espace engendré par les  $v_k$ . Par construction, cet espace est stable par  $F$ , et puisque les  $v_k$  sont vecteurs propres de  $H$  (lemme précédent), il est aussi stable par  $H$ . Montrons qu'il est stable par  $E$ . On a vu que  $Ev_0 = 0$ . Pour  $k > 1$ , on a

$$Ev_k = \frac{1}{k} EFv_{k-1} = \frac{1}{k} (FEv_{k-1} + [E, F]v_{k-1}) = \frac{1}{k} (FEv_{k-1} + (\lambda_0 - 2k + 2)v_{k-1}).$$

Ceci nous permet de montrer par récurrence que  $Ev_k = (\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}$ .

On en conclut que  $W$  est une sous-représentation non nulle de  $V$ , donc par irréductibilité, que  $W = V$ . Les  $v_k$  non nuls sont linéairement indépendants, puisque associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $H$ , d'où une base  $v_0, \dots, v_m$  de  $V$ , en posant  $m = \dim_K(V) - 1$ .

Pour déterminer  $\lambda_0$ , on remarque que puisque  $H = [E, F]$ , on doit avoir  $\text{tr}(r(H)) = 0$ . Or,  $\text{tr}(r(H)) = \lambda_0 + (\lambda_0 - 2) + \dots + (\lambda_0 - 2m) = (m + 1)\lambda_0 - m(m + 1)$ . Il vient  $\lambda_0 = m$  et finalement les poids sont bien ceux annoncés.

ii) Il faut maintenant vérifier l'existence. Pour cela, il suffit de vérifier que les matrices de  $M_{m+1}(K)$  suivantes :

$$H_m := \sum_{i=1}^{m+1} (m - 2i + 2)E_{i,i}, \quad E_m := \sum_{i=1}^m (m - i + 1)E_{i,i+1}, \quad \text{et} \quad F_m := \sum_{i=1}^m iE_{i+1,i}$$

satisfont les relations  $[H_m, E_m] = 2E_m$ ,  $[H_m, F_m] = -2F_m$  et  $[E_m, F_m] = H_m$ . Après quoi il ne reste qu'à poser  $r_m(H) := H_m$ ,  $r_m(E) := E_m$  et  $r_m(F) := F_m$ .  $\square$

*Remarque.* – En petite dimension, on reconnaît des représentations familières :

- $(V_0, r_0)$  est la représentation unité de  $\mathfrak{g}$ .
- $(V_1, r_1)$  est la représentation "standard" donnée par l'inclusion  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_2(K)$ .
- $(V_2, r_2)$  est la représentation adjointe  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_K) \simeq \mathfrak{gl}_3(K)$ .

En général, on peut montrer que  $(V_m, r_m) \simeq \text{Sym}^m(V_1, r_1)$ , la puissance symétrique  $m$ -ème  $(V_1, r_1)$  dont l'espace sous-jacent est  $\text{Sym}^m(V_1) = (V_1 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_1)^{\mathfrak{S}_m}$  et l'action de  $\mathfrak{g}$  est quotient de la représentation produit tensoriel.

*Remarque.* – La représentation  $(V_m, r_m)$  est appelée représentation irréductible *de plus haut poids*  $m$ . Notons que les seules propriétés de la base  $E, H, F$  qui entrent dans la preuve sont les formules  $[H, E] = 2E$ ,  $[H, F] = 2F$  et  $[E, F] = H$ . Toute autre base

$(E', H', F')$  vérifiant ces propriétés est *conjuguée* à  $(E, H, F)$  sous l'action de  $\mathrm{GL}_2(K)$ . En effet, les formules du ii) de la preuve ci-dessus appliquées à la représentation standard nous fournissent une base  $v_0, v_1$  de  $K^2$  dans laquelle les matrices de  $(E', H', F')$  sont justement  $E, H, F$ .

- Exercice.* – i) Montrer que l'application  $K$ -linéaire  $\mathfrak{sl}_2(K) \xrightarrow{r} \mathrm{End}_K(K[x, y])$  définie par  $r(H) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $r(E) = x \frac{\partial}{\partial y}$  et  $r(F) = y \frac{\partial}{\partial x}$  est une représentation de  $\mathfrak{sl}_2(K)$ .
- ii) Soit  $\mathcal{P}_m := \{f(x, y) \in K[x, y], \text{ homogènes de degré } m\}$ . Montrer que  $\mathcal{P}_m$  est stable par  $\mathfrak{sl}_2(K)$  et que la représentation  $(\mathcal{P}_m, r)$  ainsi obtenue est isomorphe à la représentation  $(V_m, r_m)$ , irréductible de plus haut poids  $m$ .

## 2.2 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Ici (comme ailleurs), toutes les  $K$ -algèbres associatives sont supposées *unitaires*. Rappelons qu'une telle algèbre associative peut être vue comme une  $K$ -algèbre de Lie avec pour crochet  $[a, b] = ab - ba$ .

- 2.2.1 THÉORÈME.** – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie. Il existe une paire  $(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \iota)$  formée
- d'une  $K$ -algèbre associative  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  et
  - d'un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

satisfaisant la propriété universelle suivante : pour toute  $K$ -algèbre associative  $A$ , l'application  $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\text{-ALie}}(\mathfrak{g}, A)$ ,  $f \mapsto f \circ \iota$  est bijective.

La propriété universelle assure l'unicité, à isomorphisme unique près, de la paire  $(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \iota)$ . Pour ceux qui aiment les catégories, on peut paraphraser le théorème en disant, au choix, que

- pour toute  $\mathfrak{g}$ , le foncteur  $A \mapsto \mathrm{Hom}_{K\text{-ALie}}(\mathfrak{g}, A)$  est représentable.
- le foncteur qui à une algèbre associative associe son algèbre de Lie sous-jacente possède un adjoint à gauche. Cette formulation paraît plus forte car elle inclut la fonctorialité de  $\mathfrak{g} \mapsto \mathcal{U}\mathfrak{g}$ , mais elle est en fait équivalente.

*Démonstration.* Considérons  $T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathfrak{g}$  où  $T^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathfrak{g} \otimes_K \mathfrak{g} \otimes_K \cdots \otimes_K \mathfrak{g}$ . On munit ce  $K$ -espace vectoriel du produit de concaténation, qui envoie  $T^n \mathfrak{g} \times T^m \mathfrak{g}$  dans  $T^{n+m} \mathfrak{g}$  et qui est donné sur les tenseurs élémentaires par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m.$$

On obtient ainsi une  $K$ -algèbre associative graduée  $T\mathfrak{g}$ , appelée *algèbre tensorielle de  $\mathfrak{g}$* . Noter que cette construction ne dépend en fait que du  $K$ -ev sous-jacent à  $\mathfrak{g}$ , et s'applique à n'importe quel  $K$ -ev. L'algèbre  $T\mathfrak{g}$ , munie de l'application  $\mathfrak{g} = T^1 \mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g}$  possède la propriété universelle suivante : pour toute  $K$ -algèbre associative  $A$ , l'application  $\mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(T\mathfrak{g}, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, A)$  est bijective. En d'autres termes, le foncteur  $V \mapsto TV$  est adjoint à gauche du foncteur qui à une algèbre associe son espace vectoriel sous-jacent. La vérification de ceci est facile mais on ne donne pas de détails, voir tout livre d'algèbre (Lang par exemple).

Considérons maintenant l'idéal bilatère  $I$  engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in T^{\leq 2} \mathfrak{g}.$$

Noter que ce n'est pas un idéal homogène. Posons enfin  $\mathcal{U}\mathfrak{g} := T\mathfrak{g}/I$ . C'est une algèbre associative, non graduée, mais tout de même filtrée : si  $\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n}$  est l'image de  $T^{\leq n} \mathfrak{g}$ , alors  $\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n} \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq m} \subset \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n+m}$ . Par construction, on a

$$\text{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, A) = \{f \in \text{Hom}_{K\text{-alg}}(T\mathfrak{g}, A), \forall x, y \in \mathfrak{g}, f(x)f(y) - f(y)f(x) = f([x, y])\}.$$

La propriété universelle annoncée pour  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  munie de  $\iota : \mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$  découle donc de celle de  $T\mathfrak{g}$ .  $\square$

*Application.* – Si  $(V, \rho)$  est une  $K$ -représentation de  $\mathfrak{g}$ , le morphisme  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  provient d'un (unique) morphisme d'algèbre  $\mathcal{U}\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_K(V)$  qui fait de  $V$  un  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -module à gauche. On obtient ainsi une *équivalence de catégories*

$$\text{Rep}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}\mathfrak{g}\text{-Mod}$$

entre la catégorie des  $\mathfrak{g}$ -modules à gauche et celle des  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -modules à gauche. Notamment les représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  correspondent aux modules simples de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

*Exemples.* – Remarquons d'abord que  $\mathcal{U}\mathfrak{gl}_n(K) \neq M_n(K)!!!$  Par exemple pour  $n = 2$ , l'élément  $E = E_{12}$  est nilpotent d'ordre 2 dans  $M_2(K)$ . Mais dans la représentation  $V_m$  qu'on a construite plus haut, son image est nilpotente d'ordre  $m + 1$ , ce qui implique, puisque  $m$  est arbitraire, que dans  $\mathcal{U}\mathfrak{gl}_2$ , son image n'est pas nilpotente du tout! En fait,  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  est de dimension infinie en général.

- i)  $\mathfrak{g} = K$ . On vérifie que  $\mathcal{U}\mathfrak{g} = K[T]$  avec  $\mathfrak{g} = K \xrightarrow{\sim} K.T$  convient.
- ii)  $\mathfrak{g}$  abélienne. Dans ce cas, l'idéal par lequel on quotiente  $T\mathfrak{g}$  est engendré par les  $x \otimes y - y \otimes x$ . L'algèbre obtenue est l'*algèbre symétrique*  $S\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n \mathfrak{g}$ , qui est commutative et graduée, et dont la construction s'applique à tout  $K$ -ev. Le foncteur  $V \mapsto SV$  est adjoint à gauche du foncteur qui à une algèbre *commutative* associe son e.v. sous-jacent. On a  $S^n \mathfrak{g} = (T^n \mathfrak{g})_{\mathfrak{S}_n}$  (coinvariants sous le groupe symétrique). Tout choix de base de  $\mathfrak{g}$  induit un isomorphisme  $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} K[T_1, \dots, T_{\dim \mathfrak{g}}]$ .
- iii)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ . On peut donner la présentation suivante :  $\mathcal{U}\mathfrak{sl}_2$  est l'algèbre associative de générateurs  $e, f, h$  soumis aux relations  $he - eh = 2e$ ,  $hf - fh = -2f$  et  $ef - fe = h$ . Lorsque  $K$  est de caractéristique différente de 2, elle contient un élément remarquable, l'*opérateur de Casimir* donné par

$$C := ef + fe + \frac{1}{2}h^2.$$

*Exercice.* –  $\mathfrak{g}$  désigne encore  $\mathfrak{sl}_2$  et  $\text{car}(K) \neq 2$ .

- (a) Montrer que  $C$  commute à  $e, f, h$ , et donc appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

- (b) Si  $K$  est algébriquement clos, en déduire que  $C$  agit par un scalaire sur chaque représentation irréductible.
- (c) Montrer que ce scalaire, sur la représentation  $V_m$  est  $\lambda_m = \frac{1}{2}m(m+2)$ .
- (d) Montrer que l'action de  $C$  sur  $K[x, y]$  (comme dans le dernier exercice de 2.1) est donnée par  $(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{1}{2}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^2$  et retrouver le scalaire précédent.

**2.2.2 Algèbre enveloppante et opérateurs différentiels.** Pour une variété lisse  $M$ , notons  $\text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(M))$  l'algèbre (associative) des *opérateurs différentiels* de  $M$ , ie la sous- $\mathbb{R}$ -algèbre de  $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M))$  engendrée par les dérivations. Un opérateur différentiel est donc localement combinaison linéaire d'opérateurs de la forme  $f \cdot \frac{\partial^r}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}$  avec  $f$  fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$  (et donc  $K = \mathbb{R}$ ), et considérons la sous-algèbre  $\text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(G))^L$  des opérateurs différentiels invariants à gauche. La propriété universelle de  $\mathcal{U}\text{Lie}(G)$  nous permet d'étendre l'application  $X \in \text{Lie}(G) \mapsto \xi_X \in \text{Vec}(G)^L$  en un morphisme d'algèbres

$$\mathcal{U}\text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(G))^L.$$

On peut montrer que ce morphisme est un isomorphisme

**2.2.3 Algèbres de Lie libres.** Soit  $I$  un ensemble. Une  $K$ -algèbre de Lie  $L$  munie d'éléments  $(X_i)_{i \in I}$  est appelée *algèbre de Lie libre sur  $I$*  si pour toute  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , l'application

$$(*) \quad \text{Hom}_{K\text{-ALie}}(L, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^I = \text{Hom}_{\text{Ens}}(I, \mathfrak{g}), \quad f \mapsto (f(X_i))_{i \in I}$$

est bijective. Il revient au même de dire que  $(L, (X_i)_{i \in I})$  est un objet initial dans la catégorie des paires formées d'une  $K$ -algèbre de Lie et d'une famille d'éléments indexée par  $I$ . Vu l'universalité de la condition, une algèbre de Lie libre sur  $I$  est unique à isomorphisme unique près. Montrons son existence. Notons  $V := \bigoplus_{i \in I} KX_i$  un espace vectoriel de base  $(X_i)_{i \in I}$ . L'algèbre tensorielle  $TV$  est visiblement une algèbre *associative* libre sur  $I$  (avec une définition semblable à ci-dessus). En particulier, pour toute  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , l'application

$$\text{Hom}_{K\text{-Alg}}(TV, \mathcal{U}\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}^I = \text{Hom}_{\text{Ens}}(I, \mathcal{U}\mathfrak{g}), \quad f \mapsto (f(X_i))_{i \in I}$$

est bijective. Définissons  $L$  comme la sous-algèbre de Lie de  $TV$  engendrée par les éléments (de degré 1)  $X_i, i \in I$ . L'application  $(*)$  est alors clairement injective (puisque les  $X_i$  engendrent  $L$ ). Pour voir la surjectivité, on admet temporairement que  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$  est injective (voir prochain paragraphe), et on identifie  $\mathfrak{g}$  à une sous algèbre de Lie de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ . Partons d'éléments  $(Y_i)_{i \in I}$  dans  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}\mathfrak{g}$  et considérons le morphisme d'algèbres associé par la bijection précédente  $f : TV \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$ . Alors  $f(V) \subset \mathfrak{g}$  donc  $f(L) \subset \mathfrak{g}$  et  $f(X_i) = Y_i$  comme voulu.

*Exercice.* – Montrer que l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur  $I$  est l'algèbre associative libre sur  $I$ .

**2.2.4 Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.** Revenons à la surjection  $\pi : T\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$ . C'est un morphisme d'algèbres associatives filtrées, si l'on munit  $T\mathfrak{g}$  de la filtration  $T\mathfrak{g}^{\leq m} := \bigoplus_{k \leq m} T^k\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  de la filtration image. En passant aux gradués associés, on obtient donc un morphisme d'algèbres graduées, encore surjectif,

$$gr\pi : T\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} gr(T\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} T\mathfrak{g}^{\leq k} / T\mathfrak{g}^{\leq k-1} \longrightarrow gr(\mathcal{U}\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq k} / \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq k-1}.$$

Puisque pour  $x, y \in \mathfrak{g}$  on a  $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y])$ , on a aussi  $gr\pi(x \otimes y) = gr\pi(y \otimes x)$ . Il s'ensuit que  $gr\pi$  se factorise par l'algèbre symétrique (cf exemple ii) ci-dessus) en un morphisme surjectif d'algèbres graduées  $S\mathfrak{g} \longrightarrow gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$ , et en particulier que  $gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$  est commutative.

**THÉORÈME.** (PBW, première formulation) – *Le morphisme  $S\mathfrak{g} \xrightarrow{gr\pi} gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$  ci-dessus est injectif. C'est donc un isomorphisme de  $K$ -algèbres graduées.*

Nous ne démontrons pas ce théorème ici, faute de temps (voir par exemple le livre de Carter ou celui de Humphreys). Voici un exemple de conséquence intéressante.

**COROLLAIRE.** – *i) L'application  $\iota : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$  est injective.*

*ii) Pour toute sous-algèbre  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , le morphisme  $\mathcal{U}\mathfrak{h} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$  associé est injectif.*

Noter que, lorsque  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie, le i) découle aussi du théorème d'Ado qui dit que  $\mathfrak{g}$  se plonge dans un  $\mathfrak{gl}(V)$  et donc dans  $\text{End}_K(V)$ .

Voici maintenant une formulation plus concrète, mais moins précise, du théorème précédent, dans le cas où  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie.

**THÉORÈME.** (PBW, deuxième formulation) – *Soit  $x_1, \dots, x_n$  une base de  $\mathfrak{g}$  sur  $K$ . Alors les monômes de la forme  $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$  avec  $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$  forment une base de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  sur  $K$ .*

On peut donner un énoncé analogue en dimension infinie en choisissant une base totalement ordonnée de  $\mathfrak{g}$ .

**2.2.5 Structure de bigèbre.** Terminons par la remarque suivante, qui montre qu'une algèbre enveloppante possède plus de structure que celle d'algèbre associative. Considérons l'application  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{g}$  qui envoie  $x$  sur  $\iota(x) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(x)$ . On peut montrer que c'est un morphisme d'algèbres de Lie (exercice). Il induit donc un morphisme d'algèbres  $\Delta : \mathcal{U}\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{g}$ . On peut alors montrer l'identité  $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$  (axiome de coassociativité). On dit que  $\Delta$  est un coproduit, et que  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  est une bigèbre (et même une "algèbre de Hopf"). Nous n'en ferons rien de plus ici, mais ce point de vue est fondamental dans la théorie des *groupes quantiques*. Ces derniers ne sont pas vraiment des groupes, mais plutôt des "déformations" d'une algèbre enveloppante classique.

## 2.3 Forme de Killing. Opérateurs de Casimir

**2.3.1 DÉFINITION.**— Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie. Une forme  $K$ -bilinéaire  $B$  sur  $\mathfrak{g}$  est dite invariante si  $B(\text{ad}_Z(X), Y) + B(X, \text{ad}_Z(Y)) = 0$  pour tous  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

*Exemple.* – Le paradigme de forme bilinéaire invariante est la forme

$$(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY) \text{ sur } \mathfrak{gl}_n(K).$$

Cela donne un moyen d'en construire plein d'autres : pour toute représentation  $r : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , la forme bilinéaire  $B_r(X, Y) := \text{tr}(r(X)r(Y))$  sur  $\mathfrak{g}$  est invariante.

*Propriété.* – Si  $B$  est une forme bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , alors son orthogonal  $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h}, B(X, Y) = 0\}$  est aussi un idéal de  $\mathfrak{g}$ . En particulier,  $\mathfrak{g}^\perp$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ .

*Forme de Killing.* – La forme de Killing  $B_{\text{ad}}$  sur  $\mathfrak{g}$  est la forme bilinéaire invariante associée à la représentation  $r = \text{ad}$  comme ci-dessus. On a donc  $B_{\text{ad}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$ .

**2.3.2 LEMME.**— Si  $\mathfrak{h}$  est un idéal<sup>1</sup> de  $\mathfrak{g}$ , alors la forme de Killing de  $\mathfrak{h}$  est la restriction à  $\mathfrak{h}$  de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* Pour  $X, Y \in \mathfrak{h}$ , on a  $\text{ad}_X \text{ad}_Y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ . Donc  $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y|_{\mathfrak{g}}) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y|_{\mathfrak{h}})$ .  $\square$

**2.3.3 Formes bilinéaires invariantes non dégénérées.** Supposons maintenant donnée une forme bilinéaire  $B$  non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$ . On lui associe un élément de l'algèbre enveloppante  $C_B \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$ , appelé *opérateur de Casimir*, et défini par

$$C_B = \sum_{i=1}^n X_i X_i^*$$

où  $X_1, \dots, X_n$  désigne une base de  $\mathfrak{g}$  et  $X_1^*, \dots, X_n^*$  désigne la base duale pour la forme non dégénérée  $B$ .

LEMME. – Cette définition ne dépend pas du choix de la base.

*Démonstration.* Soit en effet  $Y_1, \dots, Y_n$  une autre base de  $\mathfrak{g}$ . On a  $Y_i = \sum_k B(Y_i, X_k^*) X_k$  et  $Y_i^* = \sum_l B(Y_i^*, X_l) X_l^*$ . D'où

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i Y_i^* &= \sum_{k,l} \left( \sum_i B(Y_i, X_k^*) B(Y_i^*, X_l) \right) X_k X_l^* \\ &= \sum_{k,l} \left( B \left( \sum_i Y_i B(Y_i^*, X_l), X_k^* \right) \right) X_k X_l^* = \sum_{k,l} B(X_l, X_k^*) X_k X_l^* = C_B \end{aligned}$$

$\square$

---

1. Attention ce n'est pas vrai si  $\mathfrak{h}$  est simplement une sous-algèbre de Lie



*Exemple.* –  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$  et  $B$  la forme bilinéaire standard définie par  $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ . Elle est non dégénérée et la base duale de la base canonique  $(E_{ij})_{i,j}$  est donnée par  $E_{ij}^* = E_{ji}$ .

*Exemple.* – Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ , et  $B = B_{\text{std}}$  la forme bilinéaire standard définie par  $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ . Lorsque  $\text{car}(K) \neq 2$ , on vérifie aisément qu'elle est non dégénérée et que la base duale de la base  $(E, H, F)$  est  $(F, \frac{1}{2}H, E)$ . On retrouve l'opérateur  $C = EF + \frac{1}{2}H^2 + FE$  introduit plus haut.

*Exercice.* – i) Vérifier que  $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$  est non dégénérée sur  $\mathfrak{gl}_n(K)$  et sur les algèbres de Lie classiques ( $\mathfrak{so}$ ,  $\mathfrak{sl}$ ,  $\mathfrak{sp}$ ).

ii) ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Montrer que pour toute sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  stable par transposition, la forme bilinéaire  $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$  est non dégénérée.

On a vu dans un exercice que la vertu de l'opérateur de Casimir de  $\mathfrak{sl}_2$  était d'appartenir au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{sl}_2$ . Plus généralement :

PROPOSITION. – L'opérateur  $C_B$  appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'il commute à tout  $X \in \mathfrak{g}$ . Or on a

$$\begin{aligned} XC_B - C_BX &= \sum_i (XX_iX_i^* - X_iX_i^*X) = \sum_i ([X, X_i]X_i^* - X_i[X_i^*, X]) \\ &= \sum_i \sum_k (B([X, X_i], X_k^*)X_kX_i^* - B(X_k, [X_i^*, X])X_iX_k^*) \\ &= \sum_{i,k} (B([X, X_k], X_i^*) + B(X_k, [X, X_i^*]))X_iX_k^* = 0 \end{aligned}$$

par invariance de la forme bilinéaire  $B$ . □

Comme dans le cas de  $\mathfrak{sl}_2$ , une conséquence intéressante est que sur toute représentation  $(V, r)$  de  $\mathfrak{g}$ , l'élément  $C$  induit un opérateur  $r(C) = \sum_i r(X_i)r(X_i^*)$  qui commute à l'action de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, si  $V$  est irréductible et si  $K$  est algébriquement clos ( $K = \mathbb{C}$  par exemple), alors  $r(C)$  est une homothétie, par le lemme de Schur.

## 2.4 Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie. Pour deux idéaux  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$  de  $\mathfrak{g}$ , on définit

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = \{K\text{-esp.vect. engendré par les } [x_1, x_2], x_1 \in \mathfrak{h}_1, x_2 \in \mathfrak{h}_2\}.$$

C'est encore un idéal de  $\mathfrak{g}$ , d'après l'identité de Jacobi.

*Exemple.* (idéal dérivé) – L'idéal  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est appelé *idéal dérivé* de  $\mathfrak{g}$ . Il est nul si et seulement si  $\mathfrak{g}$  est abélienne. En général, il est contenu dans tout morphisme de  $\mathfrak{g}$  vers une algèbre de Lie abélienne, si bien que  $\mathfrak{g}_{\text{ab}} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est le *plus grand quotient* abélien de  $\mathfrak{g}$ .

Plus généralement, on définit deux suites décroissantes (pour l'inclusion) d'idéaux :

- i) la *suite centrale* définie par  $C^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$  et  $C^{n+1}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}]$ , pour  $n \geq 0$ .
- ii) la *suite dérivée* définie par  $D^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$  et  $D^{n+1}\mathfrak{g} := [D^n\mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g}]$ , pour  $n \geq 0$ .

On a  $C^1\mathfrak{g} = D^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  et pour  $n \geq 1$  on a  $C^n\mathfrak{g} \supset D^n\mathfrak{g}$ .

- 2.4.1 DÉFINITION.**— *On dit que  $\mathfrak{g}$  est*
- *nilpotente s’il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $C^n\mathfrak{g} = 0$ .*
  - *résoluble s’il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $D^n\mathfrak{g} = 0$ .*

On a donc “abélienne”  $\Rightarrow$  “nilpotente”  $\Rightarrow$  “résoluble”. On remarquera aussi le parallèle avec les notions de nilpotence et de résolubilité des groupes finis.

*Exercice.* – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie.

- i) (a) Montrer que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente si et seulement s’il existe une suite d’idéaux  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_n = 0$  de  $\mathfrak{g}$  tels que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$  pour tout  $i$ .
- (b) En déduire que toute sous-algèbre de Lie et toute algèbre quotient d’une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente.
- (c) Montrer que  $\mathfrak{g}$  est nilpotente si et seulement si  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  l’est.
- ii) (a) Montrer que  $\mathfrak{g}$  est résoluble si et seulement s’il existe une suite d’idéaux  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_n = 0$  de  $\mathfrak{g}$  tels que  $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$  est abélienne pour tout  $i$ .
- (b) En déduire que si  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble *si et seulement si*  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  le sont.

**2.4.2 DÉFINITION.**— *Soit  $V$  un  $K$ -ev de dimension finie  $n$ . Un drapeau complet de  $V$  est une suite croissante de s.e.v  $\mathcal{V} = (0 = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_n = V)$  avec  $\dim(\mathcal{V}_i) = i$ . On lui associe deux sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  :*

$$\mathfrak{b}(\mathcal{V}) := \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}, \text{ et}$$

$$\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V}) := \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}.$$

*Remarque.* – Si on choisit une base  $v_1, \dots, v_n$  telle que  $\mathcal{V}_i = \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$  alors l’isomorphisme  $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$  qui en résulte identifie  $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$ , resp.  $\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$  à l’espace des matrices triangulaires supérieures, resp. strictement triangulaires supérieures, dans  $M_n(K)$ .

*Exercice.* – Vérifier que  $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$  est bien une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$ , puis montrer :

- i)  $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}), \mathfrak{b}(\mathcal{V})] = \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ , et  $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}), \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})] = \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ .
- ii) pour  $k \geq 1$ ,  $C^k(\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})) = \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-k}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}$

En déduire que  $\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$  est nilpotente, et que  $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$  est résoluble mais pas nilpotente.

---

2. Attention, le “si” n’est pas vrai pour “nilpotente”

**2.4.3 Caractérisation par la théorie des représentations.** On suppose ici  $K$  **algébriquement clos et de caractéristique nulle**, et il n'y a pas de mal à se limiter à  $K = \mathbb{C}$ . Nous allons d'abord voir que l'exemple d'algèbre résoluble ci-dessus est typique.

THÉORÈME. (Lie) – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie avec  $K$  algébriquement clos. On a équivalence entre :

- i)  $\mathfrak{g}$  est résoluble.
- ii) Toute représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  est de dimension 1.
- ii)' Toute représentation de  $\mathfrak{g}$  contient un vecteur propre pour  $\mathfrak{g}$ .
- iii) Toute représentation  $(V, r)$  de  $\mathfrak{g}$  est trigonalisable, au sens où il existe un drapeau  $\mathcal{V}$  de  $V$  tel que  $r(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$ .

*Démonstration.* L'équivalence  $ii) \Leftrightarrow ii)'$  est claire, tout comme l'implication  $iii) \Rightarrow ii)'$ , et l'implication  $ii)' \Rightarrow iii)$  se voit par une récurrence évidente.

Montrons que  $iii) \Rightarrow i)$ . Appliquons  $iii)$  à la représentation adjointe. On obtient un drapeau complet de sous-espaces  $0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$ , ce qui signifie que les  $\mathfrak{h}_i$  sont des idéaux de  $\mathfrak{g}$ . Comme le quotient  $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$  est de dimension 1, c'est une algèbre de Lie abélienne, et on peut appliquer le critère de l'exercice ci-dessus pour en déduire que  $\mathfrak{g}$  est résoluble.

Montrons maintenant que  $i) \Rightarrow ii)'$  par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ . Si  $\dim(\mathfrak{g}) = 1$ , le résultat est clair puisque tout endomorphisme d'un  $K$ -ev de dimension finie possède un vecteur propre ( $K$  est algébriquement clos). Supposons  $\dim(\mathfrak{g}) > 1$  et soit  $\mathfrak{h}$  un hyperplan de  $\mathfrak{g}$  contenant  $D\mathfrak{g}$  (noter que  $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g} \neq 0$ ). Alors,  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , et par hypothèse de récurrence il existe un vecteur propre  $v$  de  $V$  commun à tous les éléments de  $\mathfrak{h}$ . Soit  $\lambda$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{h}$  définie par  $X.v = \lambda(X)v$  pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{h}$ . Posons

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, X.v = \lambda(X)v\},$$

le sous-espace “ $\lambda$ -propre” de  $V$  sous l'action de  $\mathfrak{h}$ , qui est donc non nul. Admettons un instant que  $V_\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ . Soit  $Y$  un générateur d'une droite supplémentaire de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Comme  $K$  est algébriquement clos,  $Y$  admet un vecteur propre  $v' \in V_\lambda$ . Alors,  $v'$ , qui est propre pour  $\mathfrak{h}$ , l'est pour  $\mathfrak{g}$  toute entière, et le théorème est démontré.

Il reste à prouver que  $V_\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ . Par l'égalité

$$XYv = YXv + [X, Y]v = \lambda(X)Yv + \lambda([X, Y])v$$

valable pour tout  $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, v \in V_\lambda$ , on est ramené à prouver que  $\lambda([X, Y]) = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$ . Pour cela, fixons un vecteur  $w \neq 0$  de  $V_\lambda$ , et notons

$$W_k := \text{vect}\{w, Yw, \dots, Y^k w\}$$

La formule  $XY^k w = YXY^{(k-1)}w + [X, Y]Y^{(k-1)}w$  montre par récurrence que

$$\forall X \in \mathfrak{h}, XW_k \subset W_k \quad (*) : XY^k w \in \lambda(X)Y^k w + W_{k-1}.$$

Considérons alors la réunion  $W$  des  $W_k$ . C'est un sous-espace stable par  $\mathfrak{h}$  et (\*) montre que  $\forall X \in \mathfrak{h}$  on a  $\text{tr}(X|_W) = \dim(W) \cdot \lambda(X)$ . En particulier on a  $\dim(W) \cdot \lambda([X, Y]) = \text{tr}([X, Y]|_W)$ . Or, par construction,  $W$  est aussi stable par  $Y$ , si bien que  $\text{tr}([X, Y]|_W) = \text{tr}([X|_W, Y|_W]) = 0$ . On a donc  $\lambda([X, Y]) = 0$  comme voulu (car  $\dim(W)$  est non nul dans  $K$  supposé de caractéristique nulle).  $\square$

*Remarque.* – Ce théorème généralise le résultat classique d'algèbre linéaire qui dit qu'une famille d'endomorphismes commutant 2 à 2 est simultanément trigonalisable.

Afin de donner une caractérisation des algèbres nilpotentes par leurs représentations, introduisons quelques définitions et notations. Si  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow K$  est une application et  $(V, r)$  une représentation, on note

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, r(X)v = \lambda(X)v\}$$

l'espace propre associé, et

$$V^\lambda := \{v \in V, \exists n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathfrak{g}, (r(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

l'espace propre "généralisé" (ou espace "caractéristique") associé.

**DÉFINITION.** – Si  $V_\lambda \neq 0$ , on dit que  $\lambda$  est un poids de  $\mathfrak{g}$  dans la représentation  $(V, r)$ . Alors  $V_\lambda$  est l'espace de poids  $\lambda$  et  $V^\lambda$  l'espace de poids généralisé.

*Exercice.* – Si  $\lambda$  est un poids d'une représentation, alors  $\lambda$  est  $K$ -linéaire et  $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ . C'est donc un élément du dual  $\mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$  de l'abélianisée de  $\mathfrak{g}$ .

Remarquer que, en général, il n'est pas clair que  $V^\lambda$  soit stable par  $\mathfrak{g}$ .

**PROPOSITION.** (Théorème de Engel) – Si  $V = V^\lambda$  alors  $\lambda \in \mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$  et il existe un drapeau complet  $\mathcal{V}$  de  $V$  tel que  $(r - \lambda)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ .

*Remarque.* – Concrètement, cela dit que si pour tout  $X$  il existe une base dans laquelle  $r(X)$  est triangulaire supérieure avec des  $\lambda(X)$  sur la diagonale, alors il existe en fait une base dans laquelle tout  $r(X)$  est de cette forme.

*Démonstration.* Par hypothèse, on a  $\text{tr}(r(X)) = \lambda(X) \dim(V)$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . Ceci montre (si  $K$  est de caractéristique 0 pour que  $\dim(V) \neq 0$  dans  $K$ ) que  $\lambda$  est  $K$ -linéaire et nulle sur  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , donc provient de  $\mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$ . Mais alors l'application  $X \mapsto r(X) - \lambda(X) \text{id}_V$  définit une représentation de  $\mathfrak{g}$  sur le même espace  $V$ . Quitte à remplacer  $r$  par  $r - \lambda$ , on peut donc supposer que  $\lambda = 0$ . Par un argument de récurrence, il nous suffit alors de prouver :

(\*) pour toute représentation  $(V, r)$  t.q.  $r(X)$  est nilpotent  $\forall X$ , on a  $V^{\mathfrak{g}} \neq 0$ .

Nous le ferons par récurrence sur  $\dim(\mathfrak{g})$ . Si  $\dim(\mathfrak{g}) = 1$ , on a  $V^{\mathfrak{g}} = \text{Ker}(r(X))$  pour tout  $X$  non nul de  $\mathfrak{g}$ . Comme  $r(X)$  est supposé nilpotent, son noyau est non nul, comme voulu. Supposons maintenant  $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ , et supposons que l'on dispose d'un idéal  $\mathfrak{h}$  non trivial, i.e. distinct de  $\{0\}$  et de  $\mathfrak{g}$ . Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\mathfrak{h}$  nous dit que

$V^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$ . De plus,  $V^{\mathfrak{h}}$  est stable par l'action de  $\mathfrak{g}$ , laquelle se factorise par  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Ainsi l'hypothèse de récurrence appliquée à  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  nous dit que  $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \neq 0$ . Or, on a  $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ .

Il reste donc à prouver l'existence d'un idéal  $\mathfrak{h}$  non trivial. Quittes à remplacer  $\mathfrak{g}$  par  $r(\mathfrak{g})$ , on peut supposer que  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ . Choisissons alors une sous-algèbre de Lie propre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  de dimension maximale. La représentation adjointe  $\text{ad}$  de  $\mathfrak{g}$  restreinte à  $\mathfrak{h}$  induit une représentation de  $\mathfrak{h}$  sur le quotient  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . L'image de  $\mathfrak{h}$  par cette représentation est formée d'endomorphismes nilpotents. En effet, d'après l'exercice ci-dessous, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorphisme  $\text{ad}(X)$  de  $\mathfrak{g}$  est nilpotent. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence pour en déduire l'existence d'un élément  $\bar{X} \neq 0$  dans  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  annulé par l'action de  $\mathfrak{h}$ . Soit  $X \in \mathfrak{g}$  au-dessus de  $\bar{X}$ . On a donc  $X \notin \mathfrak{h}$  et  $[\mathfrak{h}, X] = \text{ad}(\mathfrak{h})(X) \subseteq \mathfrak{h}$ . Ceci implique que  $\mathfrak{h} \oplus K.X$  est une algèbre de Lie contenant  $\mathfrak{h}$  comme idéal. Mais par maximalité de  $\mathfrak{h}$ , on a  $\mathfrak{h} \oplus K.X = \mathfrak{g}$ . Ainsi,  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  de codimension 1.  $\square$

*Exercice.* – Soit  $A$  une  $K$ -algèbre associative et  $\text{ad}(x)(y) = [x, y] := xy - yx$  pour  $x, y \in A$ . Montrer que  $\text{ad}(x)^n(y) \in \text{Vect}_K\{x^k y x^{n-k}, k = 0, \dots, n\}$ .

**COROLLAIRE.** – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie de dimension finie. Alors  $\mathfrak{g}$  est nilpotente si et seulement si  $\text{ad}_X$  est nilpotent pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\text{ad}_X^n(\mathfrak{g}) \subset C^n \mathfrak{g}$ , on voit que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons  $\text{ad}_X$  nilpotent pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ . D'après la proposition ci-dessus (avec  $\lambda = 0$ ), il existe un drapeau  $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}_X(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i-1}$  pour tout  $X$ , ie tel que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i-1}$ . Quitte à renuméroter  $\mathfrak{h}_i$  en  $\mathfrak{h}_{n-i}$ , on reconnaît là le critère de nilpotence qui suit la définition.  $\square$

**LEMME.** – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie nilpotente,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Lie,  $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow K$  une application, et  $V^\lambda$  l'espace propre généralisé. Alors  $V^\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* Soit  $Y \in \mathfrak{g}$ ,  $X \in \mathfrak{h}$  et  $v \in V^\lambda$ . On veut montrer que

$$(r(X) - \lambda(X))^n r(Y)v = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Or, pour  $f, g$  deux endomorphismes de  $V$ , on montre par récurrence (exercice) que

$$f^n \circ g = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (\text{ad}_f)^k(g) \circ f^{n-k}.$$

Posons  $f = r(X) - \lambda(X)$  et  $g = r(Y)$ . Choisissons  $m$  tel que  $f^m(v) = 0$  et  $\text{ad}_f^m(g) = 0$  (en effet  $\text{ad}_f = \text{ad}_{r(X)}$  et  $\mathfrak{g}$ , donc  $r(\mathfrak{g})$  est nilpotente). Alors la formule ci-dessus nous donne  $f^{2m} \circ g(v) = 0$ . On a donc montré que  $V^\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ .  $\square$

**THÉORÈME.** – Supposons  $K$  algébriquement clos, et soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie de dimension finie. On a alors équivalence entre :

- i)  $\mathfrak{g}$  est nilpotente,
- ii) toute représentation  $(V, r)$  se décompose  $V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda$  où  $\lambda$  parcourt les poids de  $\mathfrak{g}$  dans  $V$  et  $V^\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ .

*Démonstration.* *ii)  $\Rightarrow$  i).* Appliquons ii) à la représentation adjointe. On en tire une décomposition  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}^{\lambda}$  en somme directe d'idéaux. Montrons que  $\mathfrak{g}^{\lambda} \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ . En effet soit  $Y \in \mathfrak{g}^{\lambda}$ . L'endomorphisme  $(\text{ad}_Y - \lambda(Y))|_{\mathfrak{g}^{\lambda}}$  est nilpotent et  $(\text{ad}_Y)|_{\mathfrak{g}^{\lambda}}$  n'est pas inversible puisque  $\text{ad}_Y(Y) = 0$ . Il s'ensuit que  $\lambda(Y) = 0$  et donc  $\lambda|_{\mathfrak{g}^{\lambda}} = 0$ . Mais puisque  $[\mathfrak{g}^{\lambda'}, \mathfrak{g}^{\lambda}] \subset \mathfrak{g}^{\lambda'} \cap \mathfrak{g}^{\lambda}$ , on a aussi  $\lambda|_{\mathfrak{g}^{\lambda'}} = 0$  pour les autres poids, et donc finalement,  $\lambda = 0$ . D'après le corollaire ci-dessus,  $\mathfrak{g}$  est donc nilpotente.

*i)  $\Rightarrow$  ii).* Par récurrence sur  $\dim(V)$ . Si tous les  $r(X)$  n'ont qu'une valeur propre, alors  $V = V^{\lambda}$  pour une fonction  $\lambda$ , et on a vu que  $\lambda$  est un poids (proposition ci-dessus). Sinon, il existe  $X$  ayant au moins deux valeurs propres distinctes ( $K$  algébriquement clos). D'où une décomposition non triviale  $V = V_X^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_X^{\lambda_k}$  en sous-espaces propres généralisés de  $r(X)$ . D'après le lemme précédent, chaque  $V_X^{\lambda_i}$  est stable par  $\mathfrak{g}$  et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. □

*Remarque.* – Ce théorème donne une “forme de Jordan simultanée” pour les éléments de  $r(\mathfrak{g})$ .

#### 2.4.4 Caractérisation par la forme de Killing. On suppose toujours $K$ algébriquement clos de caractéristique nulle.

PROPOSITION. – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n(K)$  telle que  $\text{tr}(XY) = 0$  pour tout  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Alors,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est nilpotente, et donc  $\mathfrak{g}$  est résoluble.

*Remarque.* – La résolubilité de  $\mathfrak{g}$  découle du ii)(b) de l'exercice sous la définition 2.3.1 appliqué à  $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  et  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\text{ab}}$  qui est abélien.

*Démonstration.* Par simplicité, nous supposons que  $K = \mathbb{C}$  ou  $K = \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$  (remarquons que si  $K$  a au plus la puissance du continu (at most second-countable), il est connu (en admettant l'axiome du choix non dénombrable) que  $K$  est en effet isomorphe à  $\mathbb{C}$  ou à  $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ ). Par le théorème de Engel, il suffit de voir que tout élément  $X$  de  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{gl}_n(K)$  est nilpotent, autrement dit, que ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont nulles. Choisissons un polynôme  $f \in K[T]$  tel que  $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$  pour tout  $i$  (un polynôme interpolateur de Lagrange par exemple). Soit  $X = X_s + X_n$  la décomposition de Jordan de  $X$ . Alors  $\text{tr}(f(X_s)X) = \sum_i \bar{\lambda}_i \lambda_i = \sum_i |\lambda_i|^2$ . Il nous suffira donc de prouver que  $\text{tr}(f(X_s)X) = 0$ . Comme  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est une combinaison linéaire de  $[Y, Z]$  avec  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ , et comme

$$\text{tr}(f(X_s)[Y, Z]) = \text{tr}([f(X_s), Y]Z),$$

il suffit de montrer que  $\text{ad}_{f(X_s)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ , pour pouvoir appliquer l'hypothèse. Or, l'endomorphisme  $\text{ad}_{f(X_s)}$  de  $\mathfrak{gl}_n(K)$  est diagonalisable dans une même base que l'endomorphisme  $\text{ad}_{X_s}$ . Plus précisément, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $K^n$  qui diagonalise  $X_s$  (avec valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ) et si  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la base de  $\mathfrak{gl}_n(K)$  correspondante, alors  $E_{ij}$  est vecteur propre de  $\text{ad}_{X_s}$ , resp. de  $\text{ad}_{f(X_s)}$  pour la valeur  $\lambda_i - \lambda_j$ , resp.  $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = \bar{\lambda}_i - \lambda_j$ . Il s'ensuit que pour tout polynôme  $g \in K[T]$  tel que  $g(\lambda_i - \lambda_j) = \bar{\lambda}_i - \lambda_j$  (et il en existe, par exemple un polynôme interpolateur), on a  $\text{ad}_{f(X_s)} = g(\text{ad}_{X_s})$ . Il nous suffit donc de

prouver que  $\text{ad}_{X_s}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ . Or,  $\text{ad}_{X_s}$  est la partie semi-simple de  $\text{ad}_X$  dans sa décomposition de Jordan (cf remarque ci-dessous), donc c'est un polynôme en  $\text{ad}_X$ , et puisque  $\text{ad}_X(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ , on a terminé.  $\square$

*Remarque.* – On a utilisé le fait que si  $X = X_s + X_n$  est la décomposition de Jordan d'un endomorphisme  $K$ -linéaire d'un  $K$ -ev  $V$ , alors  $\text{ad}_X = \text{ad}_{X_s} + \text{ad}_{X_n}$  est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme  $\text{ad}_X$  de  $\mathfrak{gl}(V)$ . En effet, on a déjà remarqué que  $\text{ad}_{X_n}$  est nilpotent (exercice sous le théorème de Engel), et on vient d'expliquer dans la preuve ci-dessus que  $\text{ad}_{X_s}$  est diagonalisable. Il suffit donc de remarquer que  $\text{ad}_{X_s}$  et  $\text{ad}_{X_n}$  commutent.

**COROLLAIRE.** (Critère de Cartan) – *Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de dimension finie. Alors  $\mathfrak{g}$  est résoluble si et seulement si on a  $B_{\text{ad}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ .*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ . Si  $\mathfrak{g}$  est résoluble, le théorème de Lie nous dit qu'il existe un drapeau  $\mathcal{V} = (\mathfrak{h}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n)$  dans  $\mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$ . Mais alors  $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset [\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ , donc pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  et  $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , on a  $\text{ad}_X \text{ad}_Y \in \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ , et par conséquent  $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$ .

$\Leftarrow$ . Soit  $\mathfrak{h} := \text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$  où  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  est la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ . Puisque  $\mathfrak{h} \simeq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] / (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$  et  $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  est abélienne, on voit que  $\mathfrak{g}$  est résoluble si et seulement si  $\mathfrak{h}$  l'est (cf ii)(b) de l'exercice sous la définition 2.3.1). Or la résolubilité de  $\mathfrak{h}$  découle de la proposition précédente.  $\square$

## 2.5 Algèbres de Lie semi-simples

Si  $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$  sont deux idéaux résolubles d'une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , alors leur somme  $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$  est encore résoluble, puisque c'est un quotient de la somme directe  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$ . Cela permet de définir le *radical*  $\text{rad}(\mathfrak{g})$  comme *le plus grand idéal résoluble de  $\mathfrak{g}$* .

**2.5.1 DÉFINITION.** – *Une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est dite*

- simple si  $\dim(\mathfrak{g}) > 1$  et ses seuls idéaux sont  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ .
- semi-simple si  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$  (ie si  $\mathfrak{g}$  n'a pas d'idéal abélien non nul).
- réductive si  $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ .

*Remarque.* – La condition  $\dim(\mathfrak{g}) > 1$  dans la définition de “simple” est là pour éviter l'algèbre “triviale”  $\mathfrak{g} = K$  qui a pour seuls idéaux  $\{0\}$  et  $\mathfrak{g}$ . Avec ces définitions on a

$$\mathfrak{g} \text{ simple} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ semi-simple} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ réductive}$$

*Exercice.* –

- i) Montrer que  $\mathfrak{g}$  simple  $\Rightarrow$   $\mathfrak{g}$  semi-simple.
- ii) Montrer que pour  $\mathfrak{g}$  quelconque,  $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.
- iii) Montrer qu'une somme directe de semi-simples est semi-simple.

Nous allons voir que toutes les algèbres de Lie classiques sont réductives, et même simples dès que leur centre est trivial.

**2.5.2 Caractérisation par la forme de Killing.** On suppose dorénavant que  $K$  est algébriquement clos de caractéristique nulle.

LEMME. – Soit  $(V, r)$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$ . Alors tout  $X \in \text{rad}(\mathfrak{g})$  agit par un scalaire, et donc  $r([\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]) = 0$ .

*Démonstration.* Par le théorème de Lie, il existe dans  $V$  un vecteur propre pour  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ . Notons  $\lambda : \text{rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow K$  la “valeur propre” associée et  $V_\lambda$  l’espace propre. Il nous suffit de prouver que  $V_\lambda$  est stable par  $\mathfrak{g}$ . Or pour tous  $Y \in \mathfrak{g}$ ,  $X \in \text{rad}(\mathfrak{g})$  et  $v \in V_\lambda$ , on a  $XYv = [X, Y]v + YXv = \lambda([X, Y])v + \lambda(X)Yv$ . Comme dans la preuve du théorème de Lie, on prouve que  $\lambda([X, Y]) = 0$  et on conclut.  $\square$

COROLLAIRE. – Si  $\mathfrak{g}$  admet une représentation  $(V, r)$  telle que la forme bilinéaire  $B_r$  est non-dégénérée, alors  $\mathfrak{g}$  est réductive.

*Démonstration.* D’après le lemme, l’idéal  $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$  agit trivialement sur toute représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$ . Soit alors  $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_l = V$  une suite croissante de sous-représentations de  $V$  dont les quotients successifs  $V_i/V_{i-1}$  sont irréductibles. On a donc  $r(Y)(V_i) \subset V_i$  pour tout  $Y \in \mathfrak{g}$  et  $r(X)(V_i) \subset V_{i-1}$  pour  $X \in [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ . Par conséquent  $r(X)r(Y)$  est nilpotent, donc de trace nulle, et il s’ensuit que  $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$  est inclus dans le noyau de  $B_r$ . Comme celle-ci est supposée non-dégénérée, on a  $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] = 0$ , ce qui équivaut à  $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ . L’inclusion réciproque est tautologique.  $\square$

*Exemples.* – En appliquant ce corollaire à la représentation *standard* d’une algèbre de Lie classique, on constate que  $\mathfrak{gl}_n(K)$  et  $\mathfrak{u}(n)$  (pour  $K = \mathbb{R}$ ) sont réductives, et que  $\mathfrak{sl}_n(K)$ ,  $\mathfrak{so}_n(K)$  (pour  $n > 2$ ),  $\mathfrak{sp}_{2n}(K)$ ,  $\mathfrak{su}(n)$  (pour  $K = \mathbb{R}$ ) sont réductives, et même *semi-simples* puisque (exercice) leur centre est nul.

THÉORÈME. (Cartan) – Une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple si et seulement si la forme de Killing  $B_{\text{ad}}$  est non dégénérée.

*Démonstration.* Supposons  $B_{\text{ad}}$  non-dégénérée. Cela implique évidemment que  $\text{Ker}(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ , et d’après le corollaire ci-dessus cela implique aussi que  $\mathfrak{g}$  est réductive. Donc  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.

Réciproquement, supposons  $\mathfrak{g}$  semi-simple. Alors  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$  donc  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  est injective. Soit  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\perp$  le noyau de  $B_{\text{ad}}$ . D’après le critère de Cartan,  $\mathfrak{h}$  est résoluble, donc  $\mathfrak{h} = 0$ .  $\square$

THÉORÈME. – Une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  est somme directe d’idéaux simples. En particulier,  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{h}$  un idéal de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}^\perp$  son orthogonal pour la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Alors la forme de Killing de  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ , qui est la restriction de celle de  $\mathfrak{g}$ , est nulle donc  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$  est un idéal résoluble, donc il est nul. Comme  $B_{\text{ad}}$  est non dégénérée, il s’ensuit que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$  et que les formes de Killing de  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}^\perp$  sont non dégénérées. Une récurrence sur la dimension permet alors de conclure.  $\square$



**2.5.3 Caractérisation par les représentations.** On suppose toujours  $K$  algébriquement clos de caractéristique nulle.

THÉORÈME. (Weyl) – Une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple si et seulement si toutes ses représentations (de dimension finie) sont complètement réductibles.

La preuve originale de ce théorème par Weyl (pour  $K = \mathbb{C}$ ) utilisait son “astuce unitaire” (unitary trick) qui consiste à trouver une forme réelle de  $\mathfrak{g}$  qui s’intègre en un groupe de Lie compact pour utiliser le fait connu que les représentations continues de dimension finie d’un groupe compact sont complètement réductibles (grâce à l’existence de mesures de Haar). Voir les notes [GALM2], notamment le corollaire 1.12.7 et son “application”. Voici une preuve plus directe due à Casimir (un physicien!).

*Démonstration.* Si les représentations sont complètement réductibles, en particulier la représentation adjointe l’est. Écrivons  $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$  avec  $\mathfrak{g}_i$  sous-représentations irréductibles de  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$ . Alors les  $\mathfrak{g}_i$  sont des idéaux (car stables par  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ ) et simples ou de dimension 1 (car irréductibles). Or  $\mathfrak{g}$  ne peut pas avoir de facteur direct de dimension 1 puisqu’on a vu que les représentations de  $K$  ne sont pas nécessairement complètement réductibles. Donc  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.

Supposons maintenant  $\mathfrak{g}$  semi-simple. Soit  $(V, r) \in \text{Rep}_K(\mathfrak{g})$  et  $W \subset V$  une sous-représentation ; on veut trouver un supplémentaire de  $W$  stable sous  $\mathfrak{g}$ . Pour cela, il suffit de trouver un  $\varphi \in \text{Hom}_{K\mathfrak{g}}(V, W)$  tel que  $\varphi|_W = \lambda \text{id}_W$  avec  $\lambda \neq 0$ . Car en effet, on aura  $V = W \oplus \text{Ker}(\varphi)$  avec  $\text{Ker}(\varphi)$  stable.

*Première étape : on se ramène au cas où  $V/W$  est la représentation unité.* Considérons la représentation Hom interne  $H = \mathcal{H}om_K(V, W)$ , et ses sous-espaces  $A := \{\varphi \in H, \varphi|_W \in K \text{id}_W\}$  et  $B := \{\varphi \in A, \varphi|_W = 0\}$ . Si  $\varphi \in A$ , on voit que pour tout  $X \in \mathfrak{g}$  on a  $(X\varphi)(w) = X\varphi(w) - \varphi(Xw) = X\lambda w - \lambda Xw = 0$ , donc  $X\varphi \in B$ . En particulier  $A$  et  $B$  sont des sous-représentations de  $H$  et  $B/A$  est la représentation unité. Supposons que  $B$  admette un supplémentaire, c’est-à-dire une droite  $D \subset A^{\mathfrak{g}}$  telle que  $B \oplus D = A$ . Alors, comme expliqué ci-dessus, on a  $W \oplus \text{Ker}(\varphi) = V$ .

*Deuxième étape : opérateurs de Casimir et récurrence.* On suppose dorénavant que  $V/W$  est la représentation unité, et on montre l’existence d’une droite stable supplémentaire de  $W$  par récurrence sur  $\dim(V)$ . Fixons une suite croissante  $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{l-1} = W \subset V_l = V$  de sous-représentations telles que  $V_i/V_{i-1}$  soit irréductible pour tout  $i = 1, \dots, l$ .

Si tous les  $V_i/V_{i-1}$  sont isomorphes à la représentation unité, alors on est en présence d’un drapeau complet  $\mathcal{V}$  de  $V$  tel que  $r(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ . Mais comme  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = C^n \mathfrak{g}$  pour tout  $n$ , on en déduit pour  $n = \dim(V)$  que  $r(\mathfrak{g}) = r(C^n \mathfrak{g}) = C^n \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V}) = 0$ , donc  $V$  est une représentation triviale et n’importe quelle droite supplémentaire de  $W$  est stable.

Sinon, il existe  $i$  tel que  $(U, r_U) := V_i/V_{i-1}$  soit distinct de la représentation unité. L’image  $r_U(\mathfrak{g})$  est alors non nulle, et on peut choisir un facteur simple  $\mathfrak{g}_U$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $r_U(\mathfrak{g}_U) \neq 0$ . Alors,  $\mathfrak{g}_U \xrightarrow{\sim} r_U(\mathfrak{g}_U)$  donc  $r_U(\mathfrak{g}_U)$  est simple et la forme bilinéaire  $B_{r_U}$  associée à  $r_U$  est non nulle (à cause du critère de Cartan qui impliquerait la résolubilité de  $r_U(\mathfrak{g}_U)$ ). Son noyau est alors un idéal propre de  $\mathfrak{g}_U$ , donc nul, et finalement,  $B_{r_U}$  est non dégénérée sur  $\mathfrak{g}_U$ . Soit alors  $C_U$  l’opérateur de Casimir associé, qui appartient au centre de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}_U$  et

donc à celui de  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$  (en effet  $\mathcal{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}') = \mathcal{U}\mathfrak{h} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{h}'$ ). Alors  $r(C_U)$  est un endomorphisme de  $V$  qui commute à l'action de  $\mathfrak{g}$ , donc  $\mathfrak{g}$  stabilise ses sous-espaces caractéristiques. On a  $r(C_U)(V) \subset W$ , donc 0 est valeur propre et l'espace caractéristique  $V_0 := \text{Ker}(r(C_U)^n)$  n'est pas contenu dans  $W$ . Soit  $V^0$  la somme des autres sous-espaces caractéristiques de  $r(C_U)$ . On a alors une somme directe  $V^0 \oplus V_0$  de  $V$  en sous-espaces stables. Si l'on prouve que  $V^0 \neq 0$ , alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $V_0$ . Nous devons donc prouver que  $r(C_U)$  possède une valeur propre non nulle. Il suffit pour cela de vérifier que  $r_U(C_U)$  en possède une. Notons que  $r_U(C_U)$  est une homothétie, par le lemme de Schur. Il suffit donc de montrer que sa trace est non nulle. Or  $\text{tr}(r_U(C_U)) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_U} \text{tr}(r_U(X_i)r_U(X_i^*))$  où  $X_i$  est une base de  $\mathfrak{g}_U$  et  $X_i^*$  la base duale pour la forme bilinéaire  $B_{r_U}(X, Y) = \text{tr}(r_U(X)r_U(Y))$ . On a donc  $\text{tr}(r_U(C_U)) = \dim \mathfrak{g}_U \neq 0$ .  $\square$

**COROLLAIRE.** – Une  $K$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est réductive si et seulement si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  avec  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  semi-simple.

*Démonstration.* Que la condition soit suffisante est clair. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit  $\mathfrak{g}$  réductive. Alors la représentation adjointe  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  se factorise par  $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  qui est semi-simple. Elle est donc complètement réductible. Comme  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  est stable par  $\text{ad}(\mathfrak{g})$ , il existe une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$  avec les  $\mathfrak{g}_i$  irréductibles donc simples. Il s'ensuit que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$ .  $\square$

**2.5.4 Décomposition de Jordan.** Voici une première application du théorème de complète réductibilité de Weyl.

**THÉORÈME.** – Soit  $X$  un élément d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$ . Il existe une unique décomposition  $X = X_s + X_n$  telle que pour toute représentation  $(r, V)$ , on ait  $r(X_s) = r(X)_s$  et  $r(X_n) = r(X)_n$ , où  $r(X)_s + r(X)_n$  est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme  $r(X)$  de  $V$ . De plus, on a  $[X_s, X_n] = 0$ .

*Démonstration.* Première étape : Pour toute représentation  $(V, r)$ , on a  $r(X)_s \in r(\mathfrak{g})$  et  $r(X)_n \in r(\mathfrak{g})$ .

Remarquons d'abord que, puisque  $r(X)_s$  et  $r(X)_n$  sont des polynômes en  $r(X)$ , toute sous-représentation  $W$  de  $V$  est stable sous  $r(X)_s$  et  $r(X)_n$ . De plus, on a  $\text{tr}(r(X)_n|W) = 0$  puisque  $r(X)_n$  est nilpotent, et on a donc aussi  $\text{tr}(r(X)_s|W) = \text{tr}(r(X)|W) = 0$  puisque  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

Par ailleurs, puisque  $\text{ad}_{r(X)_s}$  et  $\text{ad}_{r(X)_n}$  sont des polynômes en  $\text{ad}_{r(X)}$  (se rappeler que  $\text{ad}_{r(X)_s} + \text{ad}_{r(X)_n}$  est la décomposition de Jordan de  $\text{ad}_{r(X)}$ ) et comme  $[r(X), r(\mathfrak{g})] = \text{ad}_{r(X)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ , on a aussi  $[r(X)_s, r(\mathfrak{g})] = \text{ad}_{r(X)_s}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$  et  $[r(X)_n, r(\mathfrak{g})] = \text{ad}_{r(X)_n}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ .

Introduisons alors le normalisateur  $\mathfrak{n} := \{u \in \mathfrak{gl}(V), [u, r(\mathfrak{g})] \subset r(\mathfrak{g})\}$ , une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(V)$  qui contient  $r(\mathfrak{g})$  comme idéal, et sa sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{n}' := \{u \in \mathfrak{n}, \text{ pour tout sous-}\mathfrak{g}\text{-module } W \subset V, u(W) = W \text{ avec } \text{tr}(u|_W) = 0\}$$

qui contient toujours  $r(\mathfrak{g})$  comme idéal et contient aussi  $r(X)_s$  et  $r(X)_n$ . Il nous suffira donc de prouver que  $r(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}'$ .

Faisant agir  $r(\mathfrak{g})$  sur  $\mathfrak{n}'$  par l'action adjointe, le théorème de Weyl dit qu'on peut trouver un supplémentaire stable  $\mathfrak{m}$  de  $r(\mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{n}'$ . Soit alors  $u \in \mathfrak{m}$ . Puisque  $[r(\mathfrak{g}), \mathfrak{n}'] \subset r(\mathfrak{g})$ , on a  $[r(\mathfrak{g}), \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \cap r(\mathfrak{g}) = \{0\}$  donc en particulier  $[r(\mathfrak{g}), u] = 0$ . Il s'ensuit que pour toute sous- $\mathfrak{g}$ -représentation irréductible  $W$  de  $V$ , l'action de  $u|_W$  commute à celle de  $\mathfrak{g}$  donc (lemme de Schur) est une homothétie de rapport  $\lambda_{W,u} \in K$ . Mais puisque  $\text{tr}(u|_W) = 0$ , on a aussi  $\lambda_{W,u} = 0$ , donc  $W \subset \text{Ker}(u)$ . Or (encore le théorème de Weyl),  $V$  est somme de ses sous-représentations irréductibles. Donc  $V \subset \text{Ker}(u)$  et  $u = 0$ ,  $\mathfrak{m} = 0$ , et  $\mathfrak{n}' = r(\mathfrak{g})$ .

*Deuxième étape.* Appliquons la première étape à la représentation adjointe  $(\mathfrak{g}, \text{ad}_{\mathfrak{g}})$ . Le morphisme  $\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad}_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  étant injectif, l'élément  $X$  possède une unique décomposition  $X = X_s + X_n$  telle que  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_s) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)_s$  et  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_n) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)_n$ . On a évidemment  $[X_s, X_n] = 0$ .

*Montrons que pour toute représentation  $(V, r)$  on a  $r(X_s) = r(X)_s$  et  $r(X_n) = r(X)_n$ .* Comme l'endomorphisme  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)$  de  $\mathfrak{g}$  induit, après passage au quotient, l'endomorphisme  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X))$  de  $r(\mathfrak{g})$ , on a  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X_s)) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X))_s$  et  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X_n)) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X))_n$ . Par ailleurs, on sait que  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(r(X)_s) = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(r(X))_s$  et  $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(r(X)_n) = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(r(X))_n$ , ce qui par restriction de ces endomorphismes à  $r(\mathfrak{g})$  donne  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X)_s) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X))_s$  et  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X)_n) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X))_n$ . Il s'ensuit que

$$\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X_s)) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X)_s) \text{ et } \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X_n)) = \text{ad}_{r(\mathfrak{g})}(r(X)_n),$$

mais puisque  $\text{ad}_{r(\mathfrak{g})}$  est injective, on obtient  $r(X_s) = r(X)_s$  et  $r(X_n) = r(X)_n$  comme voulu.  $\square$

**DÉFINITION.** – Un élément  $X$  d'une algèbre semi-simple  $\mathfrak{g}$  sera dit semi-simple si  $X = X_s$ , et nilpotent si  $X = X_n$ .

Concrètement, la preuve du théorème montre que  $X$  est semi-simple si et seulement si  $\text{ad}_X$  est diagonalisable, et  $X$  est nilpotent si et seulement si  $\text{ad}_X$  est un endomorphisme nilpotent. Elle montre aussi que pour une sous-algèbre semi-simple de  $\mathfrak{gl}_n(K)$ , par exemple  $\mathfrak{so}_n$ ,  $\mathfrak{sp}_n$  ou  $\mathfrak{sl}_n$ , un élément est semi-simple, resp. nilpotent, si et seulement si il est diagonalisable, resp. nilpotent, en tant que matrice.

*Exercice.* – Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  égale à son normalisateur :  $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}, [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ . Montrer que  $\mathfrak{h}$  est stable par décomposition de Jordan.

## 3 Structure des algèbres de Lie semi-simples

Dans toute cette partie,  $K$  désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

### 3.1 Sous-algèbres de Cartan et racines

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie. Si  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de Lie, on note  $N(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g}, \text{ad}_X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$  son normalisateur, qui est aussi une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  (le

vérifier).

DÉFINITION. – Une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre nilpotente  $\mathfrak{h}$  telle que  $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ .

Nous allons montrer que de telles sous-algèbres existent bel et bien. Pour  $X \in \mathfrak{g}$ , notons  $\mathfrak{g}_{X,0} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\text{ad}_X)^n \subset \mathfrak{g}$  l'espace caractéristique de  $\text{ad}_X$  pour la valeur propre 0. Notons que  $\dim_K(\mathfrak{g}_{X,0})$  est la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de  $\text{ad}_X$ . On dira que  $X$  est *quasi-régulier* si  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est minimal, pour l'inclusion, parmi tous les  $\mathfrak{g}_{Z,0}$  où  $Z \in \mathfrak{g}$ .

PROPOSITION. – Si  $X$  est quasi-régulier,  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Inversement toute sous-algèbre de Cartan est de cette forme.

Démonstration. i) Notons que  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est toujours une sous-algèbre de Lie. Cela découle en effet de la formule (à prouver par récurrence)

$$(\text{ad}_X)^n([Y, Z]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad}_X)^k(Y), (\text{ad}_X)^{n-k}(Z)].$$

De plus,  $X \in \mathfrak{g}_{X,0}$ , donc  $\text{ad}_X(N(\mathfrak{g}_{X,0})) \subset \mathfrak{g}_{X,0}$ . Il s'ensuit que  $(\text{ad}_X)^{\dim(\mathfrak{g}_{X,0})+1}(N(\mathfrak{g}_{X,0})) = 0$ , donc  $N(\mathfrak{g}_{X,0}) \subset \mathfrak{g}_{X,0}$  et finalement  $N(\mathfrak{g}_{X,0}) = \mathfrak{g}_{X,0}$ .

ii) Supposons maintenant  $X$  quasi-régulier et montrons que  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est nilpotente. Il suffit de montrer que pour tout  $Y \in \mathfrak{g}_{X,0}$ , l'endomorphisme  $(\text{ad}_Y)|_{\mathfrak{g}_{X,0}}$  est nilpotent. Posons  $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_{X,0}$  et  $r := \dim(\mathfrak{g}_{X,0})$  pour simplifier les notations. Nous noterons  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}} \in K[T]$  le polynôme caractéristique de  $\text{ad}_Y$  dans  $\text{End}_K(\mathfrak{g})$ . Comme  $\text{ad}_Y$  stabilise  $\mathfrak{h}$ , on a une factorisation  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}} = \Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}} \Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  et nous voulons prouver que  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}} = T^r$ . Fixons une base  $X_1, \dots, X_r$  de  $\mathfrak{h}$  et écrivons  $Y = \sum_i y_i X_i$  avec  $y_i \in K$ . Alors il existe des polynômes  $\Phi^{\mathfrak{g}}$ ,  $\Phi^{\mathfrak{h}}$  et  $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  dans  $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$ , uniques puisque  $K$  est infini, qui par spécialisation  $Y_i \mapsto y_i$  donnent  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}}$ ,  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}}$  et  $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ . On a aussi une factorisation  $\Phi^{\mathfrak{g}} = \Phi^{\mathfrak{h}} \Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  dans l'anneau  $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$  qui est *factoriel*. Nous devons montrer que  $\Phi^{\mathfrak{h}} = T^r$ . Notons  $\text{ord}_T(f)$  la  $T$ -valuation d'un polynôme  $f$  (*i.e.* le plus grand entier  $k$  tel que  $T^k$  divise  $f$ ). Puisque  $\Phi^{\mathfrak{h}}$  est un polynôme monique de degré  $r$  en  $T$  (à coefficients dans  $K[Y_1, \dots, Y_r]$ ), il suffit de prouver que  $\text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{h}}) = r$ . Remarquons que par définition de  $\mathfrak{h}$ ,  $T$  ne divise pas  $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  dans  $K[T]$ . Comme  $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  est une spécialisation de  $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ , il s'ensuit que  $T$  ne divise pas  $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  dans  $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$ , et donc  $\text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{h}}) = \text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{g}})$ . Puisque  $K$  est infini, on peut trouver une spécialisation  $Y_i \mapsto z_i$  telle que, en notant  $Z = \sum_i z_i X_i$ , on ait  $\text{ord}_T(\Phi_{\text{ad}_Z}^{\mathfrak{h}}) = \text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{h}})$  et  $\text{ord}_T(\Phi_{\text{ad}_Z}^{\mathfrak{g}}) = \text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{g}})$ . L'égalité  $\text{ord}_T(\Phi_{\text{ad}_Z}^{\mathfrak{h}}) = \text{ord}_T(\Phi_{\text{ad}_Z}^{\mathfrak{g}})$  implique alors que  $\mathfrak{g}_{Z,0} \subset \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{X,0}$ . Mais puisque  $X$  est régulier, il s'ensuit que  $\mathfrak{g}_{Z,0} = \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{X,0}$  et donc  $\text{ord}_T(\Phi_{\text{ad}_Z}^{\mathfrak{g}}) = r$  et finalement  $\text{ord}_T(\Phi^{\mathfrak{h}}) = r$  comme voulu.

iii) Soit maintenant  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Fixons une base  $X_1, \dots, X_r$  de  $\mathfrak{h}$  et considérons la factorisation  $\Phi^{\mathfrak{g}} = \Phi^{\mathfrak{h}} \Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$  dans  $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$  comme ci-dessus. Comme  $\mathfrak{h}$  est nilpotente, on sait que  $\Phi^{\mathfrak{h}} = T^r$ . De plus, si  $T$  divisait  $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ , alors 0 serait un poids de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , et par le théorème de Engel,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  aurait un élément non nul  $\bar{Z}$  annulé par  $\mathfrak{h}$ .

Cela signifie que si  $Z \in \mathfrak{g}$  est une préimage de  $\bar{Z}$ , alors  $Z \notin \mathfrak{h}$  et  $[\mathfrak{h}, Z] \subset \mathfrak{h}$ . Mais alors  $Z$  normalise  $\mathfrak{h}$  et contredit l'hypothèse  $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$ . Donc  $T$  ne divise pas  $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ . En spécialisant convenablement, on obtient un élément  $X \in \mathfrak{h}$  tel que  $T$  ne divise pas  $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ . Ceci implique que  $\mathfrak{g}_{X,0} \subset \mathfrak{h}$ . Comme  $\mathfrak{h}$  est nilpotente, on a aussi  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{X,0}$  et finalement  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{X,0}$ .  $\square$

L'existence d'une sous-algèbre de Cartan étant maintenant acquise, on s'intéresse à son "unicité à conjugaison près". Remarquons qu'il n'est même pas clair a priori que les sous-algèbres de Cartan aient toutes la même dimension.

**DÉFINITION.** – On appelle rang de  $\mathfrak{g}$  l'entier  $\text{rk}(\mathfrak{g}) := \min_{X \in \mathfrak{g}} (\dim_K(\mathfrak{g}_{X,0}))$ . Un élément  $X \in \mathfrak{g}$  est dit régulier si  $\dim(\mathfrak{g}_{X,0}) = \text{rk}(\mathfrak{g})$ .

Un élément régulier est donc quasi-régulier, et la sous-algèbre de Cartan associée  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est de dimension  $r = \text{rk}(\mathfrak{g})$ .

*Exercice.* – Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$ , et  $\mathfrak{b}$ , resp.  $\mathfrak{b}^{\text{nilp}}$ , la sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures, resp. triangulaires supérieures nilpotentes.

- i) En utilisant que  $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}$ , montrer que  $\text{rk}(\mathfrak{g}) \geq n$ .
- ii) Si  $X = \sum_{i=1}^n x_i E_{ii}$  avec les  $x_i$  tous distincts, montrer que  $\mathfrak{g}_{X,0}$  est la sous-algèbre des matrices diagonales. En conclure que  $\text{rk}(\mathfrak{g}) = n$ . Montrer aussi que  $\text{rk}(\mathfrak{sl}_n(K)) = n-1$ .
- iii) Montrer que  $X \in \mathfrak{gl}_n(K)$  est régulier si et seulement si toutes ses valeurs propres sont distinctes.

**LEMME.** – L'ensemble  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  des éléments réguliers de  $\mathfrak{g}$  est un ouvert de Zariski non vide de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, si  $K = \mathbb{C}$ , c'est un ouvert dense et connexe de  $\mathfrak{g}$  pour la topologie analytique (i.e. de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie).

*Démonstration.* Si, comme dans la preuve précédente, on choisit une base de  $\mathfrak{g}$  et on considère la fonction "polynôme caractéristique"  $X \mapsto \Phi_{\text{ad}_X}$  comme un élément  $\Phi$  de  $K[Y_1, \dots, Y_{\dim \mathfrak{g}}, T]$ , alors  $r$  n'est autre que la  $T$ -valuation de  $\Phi$ , de sorte qu'il existe un polynôme non-nul  $a_r = a_r(Y_1, \dots, Y_{\dim \mathfrak{g}}) \in K[Y_1, \dots, Y_{\dim \mathfrak{g}}]$  tel que

$$\Phi \equiv a_r T^r \text{ modulo } (T^{r+1}).$$

Un élément  $X$  est alors régulier si et seulement si  $a_r(X) \neq 0$ , où  $a_r(X)$  désigne le polynôme  $a_r$  évalué en les coordonnées de  $X$  dans la base choisie. Ainsi,  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est un ouvert de Zariski, et est non vide puisque  $K$  est algébriquement clos (Nullstellensatz). Lorsque  $K = \mathbb{C}$ , il est, comme tout ouvert de Zariski d'un espace affine, ouvert dense et connexe par arcs pour la topologie analytique.  $\square$

**THÉORÈME.** – Supposons  $K = \mathbb{C}$  et notons  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  le sous-groupe fermé de  $\text{Aut } \mathfrak{g}$  engendré par les  $\exp(\text{ad}_X)$  pour  $X \in \mathfrak{g}$ . Alors toutes les sous-algèbres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  sont conjuguées sous  $\text{Int}(\mathfrak{g})$ .

*Remarque.* – Ce théorème est valable sur n'importe quel  $K$  algébriquement clos de caractéristique nulle en remplaçant  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  par le sous-groupe engendré par les  $\exp(\text{ad}_X)$  pour  $\text{ad}_X$  nilpotent (de sorte que l'exponentielle est bien définie). La preuve est alors élémentaire, mais longue et ardue. Dans le cas  $K = \mathbb{C}$  nous allons donner une preuve assez courte, mais qui utilise un peu de géométrie différentielle.

*Remarque.* – Le théorème implique aussi que tout élément quasi-régulier est régulier.

*Démonstration.* Le point crucial est le suivant. Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan, et  $\mathfrak{h}^{\text{qreg}}$  l'ensemble de ses éléments quasi-réguliers, qui est un ouvert de Zariski (et donc un ouvert analytique) d'après la fin de la preuve de la proposition précédente (c'est le lieu des points où  $T$  ne divise pas  $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ ). Notons simplement  $G := \text{Int}(\mathfrak{g})$ , qui est un sous-groupe de Lie de  $\text{GL}(\mathfrak{g})$ , puisque fermé. Alors

$$\text{l'application } G \times \mathfrak{h}^{\text{qreg}} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (g, X) \mapsto g \cdot X \text{ est submersive.}$$

Admettons-le pour l'instant. Une première conséquence est que l'image de cette application est ouverte, et intersecte donc non trivialement l'ouvert dense  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{h}^{\text{reg}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est non vide, et donc, puisque ouvert de Zariski, est un ouvert dense de  $\mathfrak{h}$ . On considère alors la relation d'équivalence sur  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  définie par

$$X \sim Y \text{ si } \mathfrak{g}_{X,0} \text{ et } \mathfrak{g}_{Y,0} \text{ sont conjuguées}$$

Pour  $X \in \mathfrak{h}^{\text{reg}}$ , la submersivité ci-dessus montre qu'il existe un voisinage ouvert de  $X$  dans  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  formé d'éléments équivalents à  $X$ . Ainsi, les classes d'équivalence de la relation ci-dessus sont *ouvertes*. Mais puisque  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est connexe, il n'y a qu'une classe d'équivalence, et le théorème s'ensuit.

Reste à prouver la submersivité ci-dessus. Grâce aux translations sous  $G$ , il suffit de prouver la surjectivité de l'application tangente aux points  $(e, X)$  pour  $X \in \mathfrak{h}^{\text{qreg}}$ . Par définition, l'espace tangent  $\text{Lie}(G)$  de  $G$  en  $e$  est la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  engendrée par les  $\text{ad}_Y$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ . On a donc  $\text{Lie}(G) = \text{ad}(\mathfrak{g})$ . Toujours par définition, l'application tangente est alors donnée par

$$f : \text{ad}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (\text{ad}_Y, H) \mapsto \text{ad}_Y(X) + H = -\text{ad}_X(Y) + H.$$

Son image contient donc  $\mathfrak{h}$ . De plus, par définition de  $\mathfrak{h}^{\text{qreg}}$ ,  $\text{ad}_X$  agit de façon inversible sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , et donc l'image de  $f$  se surjecte sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Il s'ensuit que  $f$  est surjective.  $\square$

*Exemple.* – Dans  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , toute sous-algèbre de Cartan est conjuguée, sous  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ , à la sous-algèbre des matrices diagonalisables.

*Exercice.* – Montrer un énoncé analogue pour  $\mathfrak{sl}_n$  et  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . En déduire que  $\text{rk}(\mathfrak{sp}_{2n}) = n$ . Pour  $\mathfrak{so}_n$ , la sous-algèbre des matrices diagonales est nulle! Mais on peut changer la forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Au lieu de la forme standard, on considère, en dimension paire, la forme  $\psi_{2n}(v, w) = 2 \sum_{i=1}^n v_i w_{i+n}$ , et en dimension impaire la forme  $\psi_{2n+1}(v, w) = 2 \sum_{i=1}^n v_i w_{i+n} + v_{2n+1} w_{2n+1}$ . Alors  $\mathfrak{so}(\psi_m)$  est isomorphe à  $\mathfrak{so}_m$  et on montre que la sous-algèbre des matrices diagonales est une sous-algèbre de Cartan. On constate alors que  $\text{rk}(\mathfrak{so}_{2n}) = \text{rk}(\mathfrak{so}_{2n+1}) = n$ .

**3.1.1 Racines d'une sous-algèbre de Cartan.** Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une sous-algèbre de Cartan. Faisons agir  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathfrak{g}$  par la restriction à  $\mathfrak{h}$  de la représentation adjointe  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$  de  $\mathfrak{g}$ . Pour toute forme linéaire  $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{ab}}^*$ , on a l'espace propre généralisé

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{Y \in \mathfrak{g}, \forall X \in \mathfrak{h}, (\text{ad}_X - \lambda(X))^n(Y) = 0 \text{ pour } n \geq \dim \mathfrak{g}\}.$$

LEMME. – On a  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ , et pour toutes  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{ab}}^*$ , on a  $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ .

*Démonstration.* Puisque  $\mathfrak{h}$  est nilpotente,  $(\text{ad}_X)|_{\mathfrak{h}}$  est nilpotent pour tout  $X \in \mathfrak{h}$  donc  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$ . Réciproquement,  $\mathfrak{h}$  agit par opérateurs nilpotents sur  $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$ . Donc si  $\mathfrak{g}^0 \supsetneq \mathfrak{h}$ , il existe  $X \in \mathfrak{g}^0 \setminus \mathfrak{h}$  dont l'image  $\bar{X}$  dans  $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$  est annihilée par  $\mathfrak{h}$ . Mais cela signifie que  $[\mathfrak{h}, X] \subset \mathfrak{h}$  donc  $X \in N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$  : contradiction.

La deuxième assertion découle de la formule

$$(\text{ad}_X - \lambda(X) - \mu(X))^n([Y, Z]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad}_X - \lambda(X))^k(Y), (\text{ad}_X - \mu(X))^{n-k}(Z)],$$

laissée au lecteur. □

DÉFINITION. – Une racine de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  est un poids non nul de  $\mathfrak{h}$  dans  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$ . Nous noterons  $\Phi$  l'ensemble des racines.

Le théorème sur les représentations d'algèbres nilpotentes nous fournit une décomposition

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

et la proposition précédente nous dit que pour  $\alpha, \beta \in \Phi$ , le crochet  $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta]$  est nul si  $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$ , est contenu dans  $\mathfrak{h}$  si  $\alpha + \beta = 0$ , et dans  $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$  si  $\alpha + \beta \in \Phi$ .

*Exemple.* – Regardons le cas de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$  et  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan des matrices diagonales. La formule  $[\sum x_{ii}E_{ii}, \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}] = \sum_{i,j} (x_{ii} - x_{jj})a_{ij}E_{ij}$  montre que

$$\Phi = \{\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*, 1 \leq i \neq j \leq n\}, \text{ où } \alpha_{ij} \left( \sum_i x_{ii}E_{ii} \right) = x_{ii} - x_{jj}$$

et que  $\mathfrak{g}^{\alpha_{ij}} = \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = KE_{ij}$ . Ainsi les espaces de poids généralisés de  $\mathfrak{h}$  sont des espaces de poids "tout court", et de dimension 1. Nous allons voir que c'est un fait général pour les algèbres semi-simples.

**On suppose dorénavant que  $\mathfrak{g}$  est semi-simple.**

On notera  $\langle X, Y \rangle = B_{\text{ad}}(X, Y)$  la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ , qui est donc *non dégénérée*.

**3.1.2 PROPOSITION.** – Pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple et  $\mathfrak{h}$  sous-algèbre de Cartan, on a :

i) Pour  $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$  telles que  $\alpha + \beta \neq 0$ , on a  $\langle \mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta \rangle = 0$ .

ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$  est non dégénérée.

iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^{-\alpha}}$  induit une dualité entre  $\mathfrak{g}^\alpha$  et  $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ .

*Démonstration.* i) Soit  $\lambda \in \Phi \cup \{0\}$ ,  $X \in \mathfrak{g}^\alpha$  et  $Y \in \mathfrak{g}^\beta$ . Alors  $\text{ad}_X \text{ad}_Y(\mathfrak{g}^\lambda) \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\alpha+\beta}$  et  $\lambda + \alpha + \beta \neq \lambda$ . Il s'ensuit que dans une base subordonnée à la décomposition  $\mathfrak{g} = \bigoplus_\lambda \mathfrak{g}^\lambda$ , la matrice de  $\text{ad}_X \text{ad}_Y$  a une diagonale nulle, donc  $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$ .

ii) Soit  $X \in \mathfrak{h}$ . On a  $X \in \mathfrak{g}^{\alpha, \perp}$  pour toute racine  $\alpha \in \Phi$  d'après le i). Donc si  $X \in \mathfrak{h}^\perp$ , on a  $X \in \mathfrak{g}^\perp$  et donc  $X = 0$ .

iii) Soit  $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ . On a  $X \in \mathfrak{g}^{\beta, \perp}$  pour tout poids  $\beta \neq -\alpha$  d'après le i). Donc si  $X \in \mathfrak{g}^{\perp-\alpha}$ , on a  $X \in \mathfrak{g}^\perp$  et donc  $X = 0$ .  $\square$

*Remarque.* – La non dégénérescence de la restriction de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathfrak{h}$  n'est pas en contradiction avec la nilpotence de  $\mathfrak{h}$ . En effet, comme  $\mathfrak{h}$  n'est pas un idéal, cette restriction n'a a priori (et a posteriori non plus) rien à voir avec la forme de Killing de  $\mathfrak{h}$ .

*Exercice.* – Montrer que l'énoncé de la proposition reste vrai si l'on remplace la forme de Killing par n'importe quelle forme bilinéaire non-dégénérée.

**COROLLAIRE.** – *Mêmes hypothèses.* Alors  $\mathfrak{h}$  est abélienne, formée d'éléments semi-simples, et  $\Phi$  engendre son dual  $\mathfrak{h}^*$ .

*Démonstration.* i) Soit  $\mathcal{V}$  un drapeau de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\text{ad}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$  (puisque  $\mathfrak{h}$  est résoluble). On a donc  $\text{ad}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ . Soit alors  $Y \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ . Pour tout  $X \in \mathfrak{h}$ , on a  $\text{ad}_X \text{ad}_Y \in \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$  donc  $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$ . On a donc  $Y \in \mathfrak{h}^\perp$  et par le ii) de la proposition précédente, il vient  $Y = 0$ . Donc  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$  et  $\mathfrak{h}$  est bien abélienne.

ii) Soit  $X \in \mathfrak{h}$ . On veut montrer  $X = X_s$ , ou encore  $X_n = 0$ . Puisque  $\mathfrak{h}$  est égale à son normalisateur, elle est stable par décomposition de Jordan, et donc  $X_n \in \mathfrak{h}$ . Mais puisque  $\mathfrak{h}$  est abélienne,  $\text{ad}_Y \text{ad}_{X_n}$  est nilpotent, donc de trace nulle, pour tout  $Y \in \mathfrak{h}$ . En d'autres termes,  $X_n \in \mathfrak{h}^\perp$  et donc  $X_n = 0$ .

iii) Soit  $Y$  tel que  $\alpha(Y) = 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ . Alors toutes les valeurs propres de  $\text{ad}_Y$  sont nulles, donc  $\text{ad}_Y$  est nilpotent. Comme ci-dessus, on montre que  $Y \in \mathfrak{h}^\perp$  et le ii) de la proposition nous donne  $Y = 0$ .  $\square$

*Exercice.* – Montrer que ce corollaire est encore vrai pour  $\mathfrak{g}$  réductive, excepté le fait que  $\Phi$  engendre  $\mathfrak{h}^*$ .

*Conséquence :* Puisque chaque  $\text{ad}_X$ ,  $X \in \mathfrak{h}$  est diagonalisable et  $\mathfrak{h}$  est abélienne, l'action adjointe de  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathfrak{g}$  est simultanément diagonalisable.

Ainsi, pour toute racine  $\alpha$ , on a  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}^\alpha$ .

**3.1.3 PROPOSITION.** –  $\forall \alpha \in \Phi$ , on a  $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$  et  $\{n \in \mathbb{Z}, n\alpha \in \Phi\} = \{\pm 1\}$ .

*Démonstration.* Soit  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ . On a donc  $\forall H \in \mathfrak{h}$ ,  $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$ . Choisissons  $F \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $\langle E_\alpha, F \rangle = 1$  et posons  $H'_\alpha := [E_\alpha, F] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$ . Alors pour tout  $H \in \mathfrak{h}$ , on a

$$(*) \quad \langle H, H'_\alpha \rangle = \langle H, [E_\alpha, F] \rangle = \langle [H, E_\alpha], F \rangle = \alpha(H) \langle E_\alpha, F \rangle = \alpha(H).$$



Montrons que  $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ . En effet, le iii) du corollaire ci-dessus assure l'existence de  $\beta$  telle que  $\beta(H'_\alpha) \neq 0$ . Considérons alors  $W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ . Alors  $W$  est stable par  $\text{ad}_{E_\alpha}$  et par  $\text{ad}_F$ , donc aussi par  $\text{ad}_{[E_\alpha, F]} = \text{ad}_{H'_\alpha}$  et on a de plus  $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_W) = \text{tr}([\text{ad}_{E_\alpha}]|_W, [\text{ad}_F]|_W) = 0$ . Or,

$$\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_W) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_{\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta + n\alpha)(H'_\alpha) \dim(\mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}).$$

Puisque  $\beta(H'_\alpha) \neq 0$ , on doit donc avoir  $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ .

Montrons que  $\text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}_{-\alpha}) \subset K.H'_\alpha$ . En effet, pour tout  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  et tout  $H \in \mathfrak{h}$ , on a  $\langle H, [E_\alpha, Y] \rangle = \langle [H, E_\alpha], Y \rangle = \alpha(H) \langle E_\alpha, Y \rangle$ , donc, vu (\*), on a  $[E_\alpha, Y] = \langle E_\alpha, Y \rangle H'_\alpha$ .

Posons maintenant

$$V := K.E_\alpha \oplus K.H'_\alpha \oplus \left( \bigoplus_{n < 0} \mathfrak{g}_{n\alpha} \right).$$

Par construction,  $V$  est stable par  $\text{ad}_F$ , et on vient de voir qu'il est stable aussi par  $\text{ad}_{E_\alpha}$ . Comme ci-dessus, on en déduit qu'il est stable par  $\text{ad}_{H'_\alpha}$  et que  $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_V) = 0$ . Or,  $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_V) = \alpha(H'_\alpha)(1 + \sum_{n < 0} n \dim(\mathfrak{g}_{n\alpha}))$ . Comme  $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$ , on en déduit le théorème.  $\square$

COROLLAIRE. – Pour  $H, H' \in \mathfrak{h}$ , on a  $\langle H, H' \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H) \alpha(H')$ .

Démonstration. Clair puisque  $\text{ad}_H \text{ad}_{H'}(\mathfrak{g}_\alpha) \subset \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$  est de dimension 1.  $\square$

**3.1.4 COROLLAIRE.** – Le  $K$ -espace vectoriel  $\mathfrak{sl}_\alpha := \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}_2(K)$ . Plus précisément :

- Il existe un unique  $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  tel que  $\alpha(H_\alpha) = 2$ ,
- Si l'on fixe  $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ , il existe un unique  $F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$ .

Le triplet  $(E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha)$  est alors un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet.

Démonstration. Avec les notations de la preuve précédente, on a  $\text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = K.H'_\alpha$ , donc  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = K.H'_\alpha$  est de dimension 1. Il existe donc un unique  $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$  tel que  $\alpha(H_\alpha) = 2$ . Explicitement, on a  $H_\alpha = \frac{2H'_\alpha}{\alpha(H'_\alpha)} = \frac{2H'_\alpha}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}$ . Il existe maintenant un unique  $F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle = \frac{2}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}$ . On a alors  $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$  et le triplet  $(E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha)$  est donc un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet.  $\square$

Exemple. – Dans le cas de  $\mathfrak{sl}_n$  et avec les notations de l'exemple précédent, on a  $[\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}_{\alpha_{ji}}] = K(E_{ii} - E_{jj})$  pour tous  $i \neq j$  et  $(E_{ij}, E_{ii} - E_{jj}, E_{ji})$  est un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet.

**3.1.5 PROPOSITION.** – Soit  $\beta \in \Phi$  telle que  $\beta \neq \pm\alpha$ . Alors

- i)  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  et  $\beta - \beta(H_\alpha) \in \Phi$ . De plus,  $\{n \in \mathbb{Z}, \beta + n\alpha \in \Phi\}$  est un intervalle de  $\mathbb{Z}$ .
- ii) Si  $\beta + \alpha \in \Phi$  alors  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

*Démonstration.* Considérons  $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$ . C'est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$  stable par  $\text{ad}_{E_\alpha}$  et  $\text{ad}_{F_\alpha}$  donc une représentation de  $\mathfrak{sl}_\alpha$ . Les poids de  $H_\alpha$  dans  $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$  sont

$$\{\beta(H_\alpha) + 2n, \text{ avec } n \text{ tel que } \mathfrak{g}_{\alpha+n\beta} \neq 0\}.$$

La théorie des représentations de  $\mathfrak{sl}_2(K)$  nous dit que ces poids sont entiers, donc  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ . Elle nous dit aussi que, puisque ces poids ont multiplicité 1 et sont de même parité,  $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$  est une représentation *irréductible* de  $\mathfrak{sl}_\alpha$ , et ses poids sont aussi de la forme  $\{-m, -m+2, \dots, m-2, m\}$ . On en déduit la propriété d'intervalle du i) et aussi que  $-\beta(H_\alpha)$  est un poids, puisque  $\beta(H_\alpha)$  en est un. Donc  $\mathfrak{g}_{\beta-\beta(H_\alpha)\alpha} \neq 0$  et  $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Phi$ .

ii) Supposons  $\mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \neq 0$ . C'est donc l'espace de poids  $\beta(H_\alpha) + 2$  pour  $H_\alpha$ . D'après la structure connue d'une représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}_2$ , on a  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  car  $\mathfrak{g}_\beta$  est l'espace de poids  $\beta(H_\alpha)$  pour  $H_\alpha$ .  $\square$

COROLLAIRE. – Pour  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\Phi \cap K\alpha = \{\pm\alpha\}$ .

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $\beta \in \Phi \cap K\alpha$  distincte de  $\alpha$  et  $-\alpha$ . Comme  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ , on a  $\beta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\alpha$ . Écrivons  $\beta = \frac{n}{2}\alpha$  avec  $n$  impair. Alors puisque  $-\beta \in \Phi$  la propriété d'intervalle du i) de la proposition nous assure que  $\frac{1}{2}\alpha \in \Phi$ . Mais d'après la proposition 2.5.5, les seuls multiples de  $\frac{1}{2}\alpha$  dans  $\Phi$  sont  $\pm\frac{1}{2}\alpha$ , d'où une contradiction, puisque  $\alpha \in \Phi$ .  $\square$

**3.1.6 Propriétés de rationalité de  $\Phi$ .** Récapitulons ce que nous avons prouvé jusqu'ici à propos de l'ensemble  $\Phi$  :

- i)  $\Phi$  engendre le  $K$ -espace vectoriel  $\mathfrak{h}^*$ ,
- ii) Pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\Phi \cap K\alpha = \{\pm\alpha\}$
- iii) Pour deux racines  $\beta, \alpha$ , on a  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  et si  $\beta \neq -\alpha$  alors  $\{n \in \mathbb{Z}, \beta + n\alpha \in \Phi\}$  est un intervalle contenant  $-\beta(H_\alpha)$ .

Posons maintenant

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} := \text{Vect}_\mathbb{Q}\{H_\alpha, \alpha \in \Phi\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^* := \text{Vect}_\mathbb{Q}\{\alpha, \alpha \in \Phi\}$$

PROPOSITION. – Avec les notations ci-dessus,

- i)  $\dim_\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_\mathbb{Q}) = \dim_\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*) = \dim_K(\mathfrak{h})$ ,
- ii) la dualité  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow K$  induit une dualité  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ ,
- iii) la forme de Killing induit une forme rationnelle  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ,
- iv) L'extension de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  est définie positive.

*Démonstration.* i) Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  une base de  $\mathfrak{h}^*$  formée d'éléments de  $\Phi$ . Alors les  $H_{\alpha_i}$  sont une  $K$ -base de  $\mathfrak{h}$  (notons que  $\langle H_{\alpha_i}, H \rangle = \frac{\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i} \rangle}{2} \alpha_i(H) = \frac{2}{\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i} \rangle} \alpha_i(H)$ ). Pour  $\alpha \in \Phi$ , écrivons  $H_\alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i H_{\alpha_i}$  avec  $\lambda_i \in K$ . Nous devons montrer que  $\lambda_i \in \mathbb{Q}, \forall i$ . Soit  $M \in M_r(K)$  la matrice  $(\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$ . Alors  $M$  est inversible (puisque  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est non

dégénérée) et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$  est l'unique solution du système linéaire  $M \cdot \lambda = \mu_\alpha$  avec  $\mu_\alpha = (\langle H_{\alpha_1}, H_\alpha \rangle, \dots, \langle H_{\alpha_r}, H_\alpha \rangle) \in K^r$ . Or pour deux racines  $\alpha, \beta$  on a

$$\langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(H_\alpha) \gamma(H_\beta) \in \mathbb{Z},$$

donc  $M \in M_r(\mathbb{Q})$ ,  $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}^r$ , et finalement  $\lambda \in \mathbb{Q}^r$ . Il s'ensuit que les  $H_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$  forment une  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ . On prouve de la même manière que  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  forment une  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ .

ii) la  $K$ -dualité entre  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}^*$  envoie bien  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$  dans  $\mathbb{Q}$  puisque  $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$  pour toutes  $\alpha, \beta \in \Phi$ . Comme  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ , resp.  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*$ , engendrent  $\mathfrak{h}$ , resp.  $\mathfrak{h}^*$ , sur  $K$ , l'accouplement est parfait.

iii) idem. On a vu que  $\langle \mathfrak{h}_\mathbb{Q}, \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \rangle \subset \mathbb{Q}$  et comme  $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$  engendrent  $\mathfrak{h}$ , l'accouplement est non dégénéré.

iv) Comme  $\langle H, H \rangle = \sum_\alpha \alpha(H)^2$ , la forme bilinéaire réelle considérée est positive. Or, on sait qu'elle est non dégénérée, donc elle est aussi définie.  $\square$

## 3.2 Systèmes de racines “abstraites”

**3.2.1 DÉFINITION.**— Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Un système de racines (réduit) dans  $V$  est la donnée de deux ensembles  $\Phi \subset V$  et  $\Phi^\vee \subset V^*$  munis d'une bijection  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$  tels que :

- i)  $\Phi$  est fini, engendre  $V$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $0 \notin \Phi$ ,
- ii)  $\forall \alpha \in \Phi, \alpha^\vee(\Phi) \subset \mathbb{Z}$
- iii)  $\forall \alpha \in \Phi, \alpha^\vee(\alpha) = 2$  et  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$  en posant  $s_\alpha(v) := v - \alpha^\vee(v)\alpha$ .
- iv)  $\forall \alpha \in \Phi, \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$ .

La dimension de  $V$  est le “rang” du système de racines, et  $\alpha^\vee$  est la “coracine” associée à la racine  $\alpha$ .

*Exemple.* – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple ( $K$  alg. clos de car. nulle) et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan,  $\Phi \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^* \subset \mathfrak{h}^*$  l'ensemble des racines et  $\Phi^\vee = \{H_\alpha, \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \subset \mathfrak{h}$ . Alors d'après la proposition précédente,

$$(V := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*, \Phi, \Phi^\vee, \alpha \mapsto \alpha^\vee := H_\alpha)$$

est un système de racines, que nous noterons  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

*Le cas linéaire :*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$  et  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ . Soit  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $e_1^*, \dots, e_n^*$  sa base duale. Alors on peut décrire le système de racine de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  comme ceci :

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ et } V^* = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i^* \in (\mathbb{R}^n)^*, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$$

avec accouplement de dualité induit par l'accouplement entre  $\mathbb{R}^n$  et  $(\mathbb{R}^n)^*$ , et

$$\Phi = \{\alpha_{ij} = (e_i - e_j), 1 \leq i \neq j \leq n\} \text{ et } \Phi^\vee = \{\alpha_{ij}^\vee = (e_i^* - e_j^*), 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

avec bijection évidente. Dans cette description,  $e_i^*$  correspond à la matrice diagonale  $E_{ii}$  (qui est dans  $\mathfrak{gl}_n$ ) et  $e_i$  correspond à la forme linéaire sur  $\mathfrak{h}$  donnée par  $\sum_k \lambda_k E_{kk} \mapsto \lambda_{ii}$ .

*Le cas symplectique :*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(K)$  et  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ . Les matrices diagonales de  $\mathfrak{sp}_{2n}$  sont de la forme  $X = \sum_{i=1}^n x_i (E_{ii} - E_{i+n, i+n})$ . Notons alors  $e_i$  la forme bilinéaire  $X \mapsto x_i$  sur  $\mathfrak{h}$ , et  $V$  l'espace vectoriel de base  $e_1, \dots, e_n$ . On peut vérifier que le système de racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est de la forme suivante :

$$\Phi = \{(\pm e_i \pm e_j), i \neq j, 2e_i\} \text{ et } \Phi^\vee = \{(\pm e_i^* + \pm e_j^*), i \neq j, e_i^*\}$$

avec bijection évidente. Dans cette description, les  $e_i^*$  sont la base duale des  $e_i$  et correspondent donc aux matrices diagonales  $E_{ii} - E_{i+n, i+n}$ .

*Le cas orthogonal impair :*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\psi_{2n+1})$  et  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ . Les matrices diagonales de  $\mathfrak{so}(\psi_{2n+1})$  sont aussi de la forme  $X = \sum_{i=1}^n x_i (E_{ii} - E_{i+n, i+n})$ . Notons alors  $e_i$  la forme bilinéaire  $X \mapsto x_i$  sur  $\mathfrak{h}$ , et  $V$  l'espace vectoriel de base  $e_1, \dots, e_n$ . On peut vérifier que le système de racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est de la forme suivante :

$$\Phi = \{(\pm e_i \pm e_j), i \neq j, e_i\} \text{ et } \Phi^\vee = \{(\pm e_i^* + \pm e_j^*), i \neq j, 2e_i^*\}$$

avec bijection évidente. Dans cette description, les  $e_i^*$  sont la base duale des  $e_i$  et correspondent donc aux matrices diagonales  $E_{ii} - E_{i+n, i+n}$ .

*Le cas orthogonal pair :*  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(\psi_{2n})$ , ( $n > 1$ ) et  $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$ . Les matrices diagonales de  $\mathfrak{so}(\psi_{2n})$  sont toujours de la forme  $X = \sum_{i=1}^n x_i (E_{ii} - E_{i+n, i+n})$ . Notons encore  $e_i$  la forme bilinéaire  $X \mapsto x_i$  sur  $\mathfrak{h}$ , et  $V$  l'espace vectoriel de base  $e_1, \dots, e_n$ . On peut vérifier que le système de racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est de la forme suivante :

$$\Phi = \{(\pm e_i \pm e_j), i \neq j\} \text{ et } \Phi^\vee = \{(\pm e_i^* + \pm e_j^*), i \neq j\}$$

avec bijection évidente. Dans cette description, les  $e_i^*$  sont la base duale des  $e_i$  et correspondent donc aux matrices diagonales  $E_{ii} - E_{i+n, i+n}$ .

**3.2.2 Groupe de Weyl.** Notons que l'endomorphisme  $s_\alpha$  de  $V$  introduit au point iii) de la définition ci-dessus est la *réflexion* d'axe  $\text{Ker}(\alpha^\vee)$  et de direction  $\mathbb{R}\alpha$ . En d'autres termes on a

$$s_\alpha^2 = \text{id}_V, \text{Ker}(s_\alpha + \text{id}_V) = \mathbb{R}\alpha \text{ et } \text{Ker}(s_\alpha - \text{id}_V) = \text{Ker}(\alpha^\vee).$$

DÉFINITION. – *Le sous-groupe  $W \subset \text{GL}(V)$  engendré par les  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$  est appelé groupe de Weyl du système de racines.*

Par l'axiome iii) des systèmes de racines,  $W \cdot \Phi \subset \Phi$ . En fait, puisque  $\Phi$  engendre  $V$ , le morphisme  $W \rightarrow \mathfrak{S}_\Phi$  donnant l'action de  $W$  sur  $\Phi$  est *injectif*. En particulier,  $W$  est *fini*. On sait alors construire des *produits scalaires euclidiens sur  $V$  invariants sous  $W$*  (cf exercice du paragraphe 2.1.8). Pour un tel produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , le groupe de Weyl  $W$  est donc un groupe d'isométries de l'espace euclidien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . En particulier, la réflexion  $s_\alpha$  est alors simplement la réflexion orthogonale d'axe  $\alpha^\perp$ , donc de la forme

$$s_\alpha(v) = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

*Exemple.* – Soit  $\Phi$  le système de racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . On a vu que la forme de Killing induit sur  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$  un produit scalaire euclidien. On peut le transporter par dualité à  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ . Puisque  $\alpha(H) = \frac{2}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} \langle H_\alpha, H \rangle$ , on obtient le produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{4 \langle H_\alpha, H_\beta \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle \langle H_\beta, H_\beta \rangle}.$$

On a alors

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha) \alpha = \beta - \frac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \alpha = \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

ce qui montre que  $s_\alpha$  est la réflexion orthogonale d'axe  $\alpha^\perp$  et donc que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  $W$ -invariant.

*Le cas linéaire :* dans l'exemple de  $\mathfrak{sl}_n(K)$  le produit scalaire obtenu est  $2n$  fois celui induit par le produit euclidien canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . La réflexion  $s_{\alpha_{ij}}$  est donc la restriction à  $V$  de la réflexion orthogonale  $s_{ij}$  de  $\mathbb{R}^n$  d'axe  $H_{ij} = \{(x_k)_k, x_i = x_j\}$ . On a donc  $s_{ij}(e_i) = e_j$  et  $s_{ij}(e_k) = e_k$  pour  $k \neq i, j$ . Cela identifie  $W$  au groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agissant par permutation de la base canonique.

*Les autres cas classiques :* dans chacun des cas  $\mathfrak{sp}_{2n}$ ,  $\mathfrak{so}_{2n} \simeq \mathfrak{so}(\psi_{2n})$  et  $\mathfrak{so}_{2n+1} \simeq \mathfrak{so}(\psi_{2n+1})$ , la forme de Killing induit un multiple (respectivement  $4n+4$ ,  $4n-4$  et  $4n-2$ ) du produit scalaire "canonique" qui fait de  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormée. Pour  $i \neq j$ , la réflexion  $s_{ij}$  associée à  $e_i - e_j$  échange  $e_i$  et  $e_j$  et laisse fixe les autres  $e_k$ , tandis que la réflexion  $s'_{ij}$  associée à  $e_i + e_j$  échange  $e_i$  et  $-e_j$  et laisse fixe les autres  $e_k$ .

Dans les cas *symplectique et orthogonal impair*, la réflexion  $s_i$  associée à  $e_i$  ou  $2e_i$  envoie  $e_i$  sur  $-e_i$  et préserve les autres  $e_k$ . Cela permet d'identifier  $W$  au produit semi-direct  $\mathfrak{S}_n \rtimes \{\pm 1\}^n$ , le groupe des matrices dont chaque ligne et colonne possède un unique élément non nul, qui est un signe.

Dans le cas *orthogonal pair*, on peut vérifier que  $W$  est le sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n \rtimes \{\pm 1\}^n$  formé des matrices dont le nombre de  $-1$  est pair.

**3.2.3 Isomorphismes, somme directes, systèmes réduits.** Soient  $\Phi = (\Phi, V, \Phi^\vee, \alpha \mapsto \alpha^\vee)$  et  $\Phi' = (\Phi', V', \Phi'^\vee, \alpha' \mapsto \alpha'^\vee)$  deux systèmes de racines.

– Un isomorphisme entre  $\Phi$  et  $\Phi'$  est un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $f : V \xrightarrow{\sim} V'$  qui induit une bijection entre  $\Phi$  et  $\Phi'$  et tel que la bijection duale soit compatible avec les applications  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ .

– La somme directe  $\Phi \oplus \Phi'$  est le système de racines  $\Phi \sqcup \Phi'$  dans  $V \oplus V'$  avec pour coracines  $\Phi^\vee \sqcup \Phi'^\vee \subset V^* \oplus V'^* = (V \oplus V')^*$  et la bijection évidente. On voit en particulier que  $W(\Phi \oplus \Phi') = W(\Phi) \times W(\Phi')$ .

On dit qu'un système de racines est *irréductible* s'il n'est pas somme directe de deux systèmes de racines.

*Exercice.* – Soit  $\Phi$  un système de racines, et munissons  $V$  d'un produit scalaire  $W$ -invariant. Montrer que  $\Phi$  est réductible si et seulement si on peut écrire  $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$  avec  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  orthogonaux.

PROPOSITION. – Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple.

- i) Le système de racines  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est indépendant, à isomorphisme près, de la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ . On note  $\Phi(\mathfrak{g})$  sa classe d'isomorphisme.
- ii)  $\Phi(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) = \Phi(\mathfrak{g}_1) \oplus \Phi(\mathfrak{g}_2)$ . De plus,  $\Phi(\mathfrak{g})$  est irréductible si et seulement si  $\mathfrak{g}$  est simple.

*Démonstration.* i) On a vu que si  $\mathfrak{h}'$  est une autre sous-algèbre de Cartan, il existe  $g \in \text{Int}(G)$  tel que  $\mathfrak{h}' = g \cdot \mathfrak{h}$ . Ainsi  $g$  induit un isomorphisme  $K$ -linéaire  $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}'$ . L'isomorphisme dual envoie clairement  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$  sur  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  et l'unicité des  $H_\alpha$  montre que  $g$  envoie  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\vee$  sur  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')^\vee$  en préservant les bijections. Bref,  $g$  induit un isomorphisme  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}') \xrightarrow{\sim} \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

ii) La première assertion est claire et implique que si  $\mathfrak{g}$  n'est pas simple alors  $\Phi(\mathfrak{g})$  n'est pas irréductible. Réciproquement, supposons  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  réductible. Alors en particulier l'ensemble  $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\vee$  des  $H_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$  est union disjointe  $\Phi_1^\vee \sqcup \Phi_2^\vee$  de deux sous-ensembles orthogonaux pour la forme de Killing restreinte à  $\mathfrak{h}$ . On en déduit une décomposition orthogonale  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  où  $\mathfrak{h}_i = \text{Vect}_K(\Phi_i^\vee)$ , Posons alors  $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{h}_1 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1} \mathfrak{g}_\alpha$  et  $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{h}_2 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_2} \mathfrak{g}_\alpha$ . On a donc  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . De plus, pour  $\alpha_1 \in \Phi_1$  et  $\alpha_2 \in \Phi_2$ , on a  $\alpha_1 + \alpha_2 \notin \Phi$  donc  $[\mathfrak{g}_{\alpha_1}, \mathfrak{g}_{\alpha_2}] = 0$ . On constate donc que  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$  et donc que  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  sont des idéaux, montrant que  $\mathfrak{g}$  n'est pas simple.  $\square$

**3.2.4 Dualité.** Fixons un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $V$ . Si l'on identifie  $V^*$  à  $V$  au moyen de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on déduit de la formule

$$s_\alpha(v) = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha = v - \alpha^\vee(v) \alpha$$

que  $\alpha^\vee = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$  (et symétriquement que  $\alpha = \frac{2}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle} \alpha^\vee$ ). On constate donc que  $s_{\alpha^\vee} = s_\alpha$  préserve  $\Phi^\vee$ . On en déduit que

$(\Phi^\vee, \Phi, \alpha^\vee \mapsto \alpha)$  est un système de racines dans  $V^*$ .

On l'appelle *système de racines dual* de  $(\Phi, \Phi^\vee, \alpha \mapsto \alpha^\vee)$ . La discussion ci-dessus montre que l'application  $s_\alpha \mapsto s_{\alpha^\vee}$  induit un isomorphisme des groupes de Weyl  $W(\Phi) \xrightarrow{\sim} W(\Phi^\vee)$ .

*Exemple.* – On peut observer que les systèmes de racines de  $\mathfrak{sp}_{2n}$  et  $\mathfrak{so}_{2n+1}$  sont duaux l'un de l'autre. Par contre, les systèmes de racines de  $\mathfrak{sl}_n$  et  $\mathfrak{so}_{2n}$  sont “auto-duaux”.

**3.2.5 Contraintes sur deux racines.** Donnons-nous deux racines  $\alpha, \beta \in \Phi$  non proportionnelles et non orthogonales. Quittes à remplacer  $\alpha$  par  $-\alpha$  et à échanger  $\alpha$  et  $\beta$ , nous pouvons supposer que

$$\langle \alpha, \beta \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle \alpha, \alpha \rangle \leq \langle \beta, \beta \rangle.$$

On a alors les contraintes suivantes :

$$0 < \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} < 1 \quad \text{avec} \quad \alpha^\vee(\beta) = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \beta^\vee(\alpha) = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$$

qui entraînent les inégalités

$$0 < \alpha^\vee(\beta) \beta^\vee(\alpha) < 4.$$

Ceci ne laisse que trois possibilités :

- i)  $\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = -1$ , auquel cas  $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ . et l'angle  $(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3}$ .
- ii)  $\alpha^\vee(\beta) = -2, \beta^\vee(\alpha) = -1$ , auquel cas  $2\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ . et l'angle  $(\alpha, \beta) = \frac{3\pi}{4}$ .
- iii)  $\alpha^\vee(\beta) = -3, \beta^\vee(\alpha) = -1$ , auquel cas  $3\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$ . et l'angle  $(\alpha, \beta) = \frac{5\pi}{6}$ .

*Exemple.* – Soient  $\alpha = \alpha_{ij}, \beta = \alpha_{kl}$  dans le système de racines de  $\mathfrak{sl}_n$ . On voit que  
 –  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset \Rightarrow \alpha$  et  $\beta$  orthogonales.  
 –  $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1 \Rightarrow$  situation i) (même longueur, et angle  $\frac{2\pi}{3}$ ).

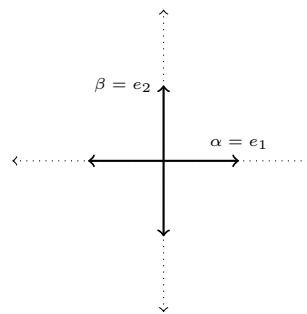
*Exemple.* – Pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ ,  $\alpha = e_i - e_j$  et  $\beta = 2e_j$ , on est dans la situation ii).

*Exercice.* – Vérifier que dans le cas orthogonal pair, on est toujours dans la situation i) dès que  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ . Par contre dans le cas orthogonal impair, la situation ii) peut se produire.

*Remarque.* – Dès que  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$  on a  $\alpha + \beta \in \Phi$ . En effet, on peut supposer  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$  et dans tous les cas ci-dessus, on a  $\alpha + \beta = s_\beta(\alpha)$ .

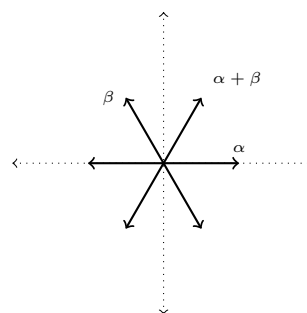
*Application : classification des systèmes de racines de rang 2.* Soit  $\Phi \subset \mathbb{R}^2$  un système de racines de rang 2, et supposons que le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $W$ -invariant. Choisissons  $\alpha, \beta \in \Phi$  non colinéaires de sorte que  $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$  et que  $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$  soit minimal (l'angle entre  $\alpha$  et  $\beta$  est donc le plus ouvert possible, sans être plat). On a alors  $-1 < \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|} \leq 0$ . On peut supposer, après rotation et homothétie, que  $\alpha = e_1$  (vecteur de la base canonique), puis après éventuellement symétrie d'axe  $(e_1)$ , que l'angle  $(\alpha, \beta)$  est entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ . On a alors les possibilités suivantes :

- i) Si  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ , on a  $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ . Quitte à changer le produit scalaire, on voit que  $\Phi$  est isomorphe au système de racines réductible ci-contre, qui n'est autre que celui de  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ .

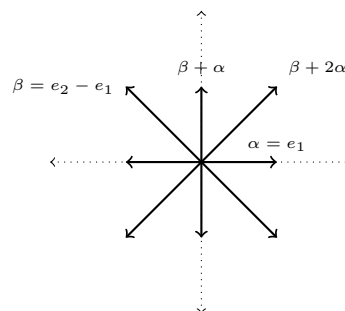


Si  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ , on est dans l'une des trois situations considérées plus haut.

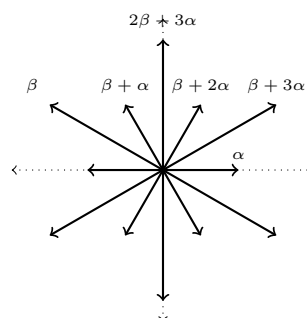
- ii) Lorsque  $\alpha^\vee(\beta) = -1$ ,  $\beta$  a pour coordonnées polaires  $(1, \frac{2\pi}{3})$ . On constate que  $\alpha + \beta$  est aussi racine, de sorte que  $\Phi \supset \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\}$ . De plus, s'il existait une autre racine, cela contredirait la minimalité de  $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ . Cela est plus clair sur la figure ci-contre. Les système de racines obtenu est isomorphe à celui de  $\mathfrak{sl}_3$ .



- iii) Lorsque  $\alpha^\vee(\beta) = -2$ ,  $\beta$  a pour coordonnées polaires  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$  donc  $\beta = e_2 - e_1$ . Grâce aux réflexions  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ , on obtient que  $\Phi \supset \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$ . Comme ci-dessus, s'il y avait une autre racine, elle contredirait la minimalité de  $\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ . Le système de racines obtenu est isomorphe à celui de  $\mathfrak{sp}_4$  et celui de  $\mathfrak{so}_5$ .



- iv) Lorsque  $\alpha^\vee(\beta) = 3$ ,  $\beta$  a pour coordonnées polaires  $(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$ . Grâce aux réflexions  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ , on obtient que  $\Phi \supset \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta + \alpha) \pm (\beta + 2\alpha), \pm(\beta + 3\alpha), \pm(2\beta + 3\alpha)\}$ , et comme ci-dessus, on vérifie qu'on a toutes les racines. Le système de racines obtenu n'est pas celui d'une algèbre de Lie classique.



**3.2.6 Racines simples.** Fixons une forme linéaire  $f \in V^*$  ne s'annulant sur aucune racine. On dit alors que  $\alpha$  est  $f$ -positive (ou positive si pas d'ambiguïté) si  $f(\alpha) > 0$ . On note  $\Phi_+$  l'ensemble des racines  $f$ -positives et  $\Phi_- := -\Phi_+$ . On obtient une partition  $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$  (pas orthogonale !!). On dit que  $\alpha$  est  $f$ -simple (ou simple si pas d'ambiguïté), si  $\alpha$  est positive et n'est pas somme de deux racines positives. On note  $\Delta = \Delta_f$  l'ensemble des racines simples.



*Exemple.* – Pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$ . Prenons la forme linéaire  $f : (x_i)_i \mapsto -\sum_i i x_i$  sur  $\mathbb{R}^n$  et restreignons-la à  $V$ . Alors  $\Phi_+ = \{\alpha_{ij}, i < j\}$ , et  $\Delta = \{\alpha_{i,i+1}, i = 1, \dots, n-1\}$ .

THÉORÈME. – Avec les notations ci-dessus, on a

i)  $\Phi_+ \subset \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$

ii)  $\Delta$  est une base de  $V$ .

*Démonstration.* i) par l'absurde : soit  $\beta \in \Phi^+ \setminus (\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha)$  tel que  $f(\beta)$  soit minimal. Alors  $\beta \notin \Delta$  donc  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  avec  $\beta_i \in \Phi_+$ . Mais alors  $f(\beta_i) < f(\beta)$  donc par minimalité  $\beta_i \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$ , puis  $\beta \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$  : contradiction.

ii) Par le i),  $\Delta$  est génératrice. Il faut montrer qu'elle est libre. Choisissons un produit scalaire  $W$ -invariant et remarquons d'abord que  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$  pour toutes  $\alpha, \beta \in \Delta$  distinctes. En effet si  $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ , on a remarqué dans le paragraphe précédent que  $\alpha - \beta$  est une racine. Si elle est positive alors  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$  contredisant la simplicité de  $\alpha$ , sinon c'est la simplicité de  $\beta$  qui est contredite.

Maintenant, soit  $\sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha = 0$  une relation de dépendance linéaire. Soit

$$\Delta_+ = \{\alpha \in \Delta, \lambda_\alpha \geq 0\} \text{ et } \Delta_- = \Delta \setminus \Delta_+.$$

Ecrivons la relation sous la forme

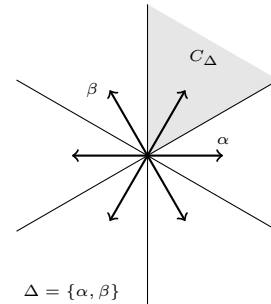
$$\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha \alpha = - \sum_{\beta \in \Delta_-} \lambda_\beta \beta =: v.$$

Alors  $\langle v, v \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta_+, \beta \in \Delta_-} -\lambda_\alpha \lambda_\beta \langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ , donc  $v = 0$ . Il s'ensuit que  $\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha \alpha = 0$  et donc  $\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha f(\alpha) = 0$  si bien que  $\lambda_\alpha = 0, \forall \alpha \in \Delta_+$  et de même  $\lambda_\beta = 0, \forall \beta \in \Delta_-$ .  $\square$

DÉFINITION. – Une base de  $\Phi$  est un ensemble  $\Delta = \Delta_f$  de racines  $f$ -simples pour  $f \in V^*$  comme ci-dessus.

On peut se demander à quelle condition sur  $f$  et  $f'$  on a  $\Delta_f = \Delta_{f'}$ . Pour cela, rappelons que  $f$  est un élément de  $X = V^* \setminus \bigcup_\alpha \text{Ker}(\alpha)$ , le complémentaire dans  $V^*$  d'une réunion d'hyperplans (appelés *murs*). Les composantes connexes de  $X$  sont donc des cônes ouverts convexes appelés *chambres de Weyl* et les éléments  $f, f'$  sont dans la même chambre de Weyl si et seulement si  $f(\alpha)$  et  $f'(\alpha)$  sont du même signe pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ . On en conclut que  $\Delta_f = \Delta_{f'}$  si et seulement si  $f$  et  $f'$  sont dans la même chambre de Weyl.

*Exemple.* – Considérons le système de racines de rang 2 de  $\mathfrak{sl}_3$  vu plus haut et identifions  $V$  et  $V^*$  au moyen du produit scalaire (et donc  $\text{Ker}(\alpha)$  à  $\alpha^\perp$ ). En prenant  $f = \langle e_1 + e_2, \cdot \rangle$ , on obtient comme base  $\Delta_f = \{\alpha, \beta\}$ . La figure montre les murs et la chambre de Weyl  $C_\Delta$  associée à  $\Delta = \Delta_f$ .



On peut observer deux faits intéressants sur cet exemple.

- D’une part,  $W$  est engendré par  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ . En effet, on a remarqué que  $W = \mathfrak{S}_3$  et on sait bien que ce groupe symétrique est engendré par les transpositions  $s_\alpha = (1, 2)$  et  $s_\beta = (2, 3)$ .
- D’autre part, il y a  $6 = 3! = |W|$  chambres de Weyl. En fait, l’action de  $W$  sur  $V^*$  permute les chambres de Weyl de manière simplement transitive. De manière équivalente, son action sur  $\Phi$  permute simplement transitivement les bases de  $\Phi$ .

Nous allons voir que ces deux faits restent vrais en général.

**3.2.7 PROPOSITION.**— *Soit  $\Delta$  une base de  $\Phi$ . Appelons réflexion simple une réflexion  $s_\alpha$  avec  $\alpha \in \Delta$ .*

- i) *Toute racine est l’image d’une racine simple par un produit de réflexions simples.*
- ii) *Le groupe de Weyl est engendré par les réflexions simples.*

Le lemme suivant sera utilisé plusieurs fois.

LEMME. — *Soit  $\alpha \in \Delta$  une racine simple. On a  $s_\alpha(\Phi_+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi_+ \setminus \{\alpha\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  une racine positive distincte de  $\alpha$ . Écrivons-là  $\gamma = \sum_{\beta \in \Delta} n_\beta \beta$  dans la base  $\Delta$ , avec  $n_\beta \in \mathbb{N}$ . On a  $s_\alpha(\gamma) = \sum_{\beta \in \Delta} n'_\beta \beta$  avec  $n'_\beta = n_\beta$  si  $\beta \neq \alpha$  et  $n'_\alpha = n_\alpha - \alpha^\vee(\gamma)$ . Mais puisque  $\gamma \neq \alpha$ , il existe  $\beta$  telle que  $n'_\beta = n_\beta > 0$ . Par le i) du théorème, on en déduit que  $s_\alpha(\gamma)$  n’est pas négative, donc est positive. Par ailleurs on a évidemment  $s_\alpha(\gamma) \neq \alpha$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition.* i) Il suffit de le faire pour  $\gamma$  positive, puisque si  $\gamma = w(\beta)$  alors  $-\gamma = ws_\beta(\beta)$ . Soit donc  $\gamma \in \Phi_+$ . Définissons la *hauteur* de  $\gamma$  comme la somme  $h(\gamma) = \sum_{\beta \in \Delta} n_\beta$  des coordonnées de  $\gamma$  dans la base  $\Delta$ , et raisonnons par récurrence sur  $h(\gamma)$ .

Si  $h(\gamma) = 1$  alors  $\gamma$  est simple et il n’y a rien à prouver. Sinon, on peut trouver  $\alpha \in \Delta$  telle que  $\alpha^\vee(\gamma) > 0$ . En effet, pour un produit scalaire  $W$ -invariant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on a  $\alpha^\vee(\gamma) = \frac{2\langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  et  $\|\gamma\|^2 = \sum_{\beta \in \Delta} n_\beta \langle \gamma, \beta \rangle > 0$ . Mais alors, comme dans le lemme ci-dessus, la racine  $s_\alpha(\gamma)$  est positive et  $h(s_\alpha(\gamma)) = h(\gamma) - \alpha^\vee(\gamma) < h(\gamma)$ . On peut donc conclure par récurrence sur la hauteur.

ii) Par définition,  $W$  est engendré par toutes les réflexions  $s_\gamma$ ,  $\gamma \in \Phi$ . Par le i), on peut écrire  $\gamma = w(\alpha)$  avec  $w$  un produit de réflexions simples et  $\alpha \in \Delta$ . Puisque  $s_\gamma$  est, pour un produit scalaire  $W$ -invariant, la réflexion orthogonale d’axe  $\gamma^\perp$ , on a alors  $s_\gamma = ws_\alpha w^{-1}$ . Donc  $s_\gamma$  est bien un produit de réflexions simples.  $\square$

**3.2.8 THÉORÈME.**— *L’action de  $W$  sur  $\Phi$  permute simplement transitivement les bases de  $\Phi$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d’abord que si  $\Delta = \Delta_f$ , l’ensemble  $w(\Delta) = \Delta_{w^*(f)}$  est encore une base de  $\Phi$ . L’action de  $W$  permute donc bien les bases de  $\Phi$ .

i) Montrons d’abord que cette action est transitive. Soit  $\Delta'$  une autre base de  $\Phi$ . Nous allons montrer que  $\Delta' \in W.\Delta$  par récurrence sur le cardinal  $d(\Delta') = |\Phi_+(\Delta) \cap \Phi_-(\Delta')|$ . Si

$d(\Delta') = 0$  on a  $\Delta = \Delta'$  donc l'assertion est alors claire. Supposons donc  $d(\Delta') > 0$ , i.e.  $\Phi_+(\Delta) \cap \Phi_-(\Delta') \neq \emptyset$ . Alors on a aussi  $\Phi_-(\Delta) \cap \Delta' \neq \emptyset$  (car sinon on aurait  $\Delta' \subset \Phi_+(\Delta)$  donc  $\Phi_+(\Delta') = \Phi_+(\Delta)$  et finalement  $\Delta' = \Delta$ ) Choisissons donc  $\alpha' \in \Phi_-(\Delta) \cap \Delta'$ . D'après le dernier lemme ci-dessus, on a  $s_{\alpha'}(\Phi_-(\Delta')) = \Phi_-(\Delta') \setminus \{-\alpha'\} \cup \{\alpha'\}$ . Or on a aussi  $s_{\alpha'}(\Phi_-(\Delta')) = \Phi_-(s_{\alpha'}(\Delta'))$ , donc  $\Phi_+(\Delta) \cap \Phi_-(s_{\alpha'}(\Delta')) = \Phi_+(\Delta) \cap \Phi_-(\Delta') \setminus \{-\alpha'\}$  et finalement  $d(s_{\alpha'}(\Delta')) = d(\Delta') - 1$ . Par l'hypothèse de récurrence, il existe  $w \in W$  tel que  $s_{\alpha'}(\Delta') = w(\Delta)$ , ce qui nous donne  $\Delta' = s_{\alpha'}w(\Delta)$  comme voulu.

ii) Soit maintenant  $w \in W$ ,  $w \neq 1$ . Écrivons-le comme un produit  $s_1s_2 \cdots s_l$  de réflexions simples avec  $l$  minimal. Notons  $\alpha_i \in \Delta$  la racine simple telle que  $s_i = s_{\alpha_i}$ . Nous allons montrer que  $w(\alpha_l) \in \Phi_-$ , ce qui implique que  $w(\Delta) \neq \Delta$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons que  $w(\alpha_l) \in \Phi_+$ . Notons alors  $j$  le plus grand entier  $i$  tel que  $\beta_i := s_i s_{i+1} \cdots s_l(\alpha_l) \in \Phi_+$ . Puisque  $s_l(\alpha_l) \in \Phi_-$ , on a  $j < l$  donc  $\beta_{j+1}$  est bien définie et négative. Puisque  $\beta_{j+1} = s_j(\beta_j)$  et  $\beta_j \in \Phi_+$  le dernier lemme ci-dessus assure que  $\beta_j = \alpha_j$ . Il s'ensuit que  $s_{\beta_j} = (s_j \cdots s_l)s_{\alpha_l}(s_j \cdots s_l)^{-1}$ , ce que l'on peut réécrire :  $s_{j+1} \cdots s_l = s_j \cdots s_{l-1}$ . Mais alors on obtient  $w = s_1 \cdots s_{j-1}s_{j+1} \cdots s_{l-1}$ , une expression de longueur  $l - 2$  qui contredit la minimalité de  $l$ .  $\square$

*Exercice.* – Vérifier que  $\{(e_i - e_{i+1}), i = 1, \dots, n-1\} \cup \{e_n\}$  est une base du système de racines de  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ , tandis que  $\{(e_i - e_{i+1}), i = 1, \dots, n-1\} \cup \{2e_n\}$  est une base de celui de  $\mathfrak{sp}_{2n}$ . Trouver une base de celui de  $\mathfrak{so}_{2n}$ .

*Exercice.* – Soit  $\Phi$  un système de racines et  $\Delta$  une base de  $\Phi$ , dont on se donne une partition  $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ .

- i) Notons  $V_i := \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta_i)$  et  $\Phi_i := \Phi \cap V_i$ . Montrer que  $\Phi_i$  est un système de racines dans  $V_i$  (compléter les objets), de groupe de Weyl  $W_i$  le groupe engendré par les  $s_{\alpha}, \alpha \in \Delta_i$ .
- ii) Supposons dorénavant que  $\Delta_1 \perp \Delta_2$ , pour un produit scalaire  $W$ -invariant. Montrer que  $W = W_1 \times W_2$  et que  $W_2$  agit trivialement sur  $\Delta_1$ .
- iii) Toujours sous l'hypothèse  $\Delta_1 \perp \Delta_2$ , montrer que  $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ , [On pourra utiliser le i) de la proposition 3.2.7 ci-dessus] et en conclure que  $\Phi$  est somme directe des systèmes de racines  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

*Exercice.* – Soit  $\Phi$  un système de racines et  $\Delta$  une base de  $\Phi$ , et supposons fixé un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $V$ . On définit une relation d'ordre *partiel* sur  $\Phi$  en déclarant que  $\gamma \preceq \gamma'$  si  $\gamma' - \gamma \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$ . Soit  $\beta$  une racine maximale pour cet ordre.

- i) Vérifier que  $\beta$  est positive et montrer que pour toute  $\alpha \in \Delta$  on a  $\langle \beta, \alpha \rangle \geq 0$ .
- ii) Écrivons  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\alpha}\alpha$  et notons  $\Delta_1 := \{\alpha, n_{\alpha} = 0\}$  et  $\Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_1$ . Montrer que  $\Delta_1 \perp \Delta_2$ .
- iii) Montrer que si  $\langle \gamma, \gamma' \rangle > 0$ , alors  $\gamma \preceq \gamma'$  ou  $\gamma' \preceq \gamma$ . [Remarquer d'abord que dans cette situation,  $\gamma - \gamma' \in \Phi$ ]
- iv) On suppose dorénavant que  $\Phi$  est irréductible, et donc, d'après l'exercice précédent, que  $\Delta$  n'est pas union disjointe de deux sous-ensembles propres orthogonaux. Montrer

que  $\beta$  est l'unique élément maximal de  $\Phi$  (on l'appelle la "plus grande racine"). [Si  $\beta'$  est une autre racine maximale, utiliser i) et ii) pour prouver  $\langle \beta', \beta \rangle > 0$ , puis iii) pour conclure que  $\beta = \beta'$ .]

### 3.3 Classification des algèbres de Lie semi-simples

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan,  $\Phi$  le système de racines de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Fixons une base  $\Delta$  de  $\Phi$ .

**3.3.1 PROPOSITION.**— *Pour chaque  $\alpha \in \Delta$  choisissons un générateur  $E_\alpha$  de la droite  $\mathfrak{g}_\alpha$  et notons  $F_\alpha$  l'unique élément de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  tel que  $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est engendrée par les éléments  $E_\alpha$  et  $F_\alpha$  pour  $\alpha$  parcourant  $\Delta$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathfrak{g}'$  la sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  engendrée par les  $E_\alpha$  et les  $F_\alpha$ . Elle contient les  $H_\alpha$  qui forment une base de  $\mathfrak{h}$ , donc elle contient  $\mathfrak{h}$ . Pour  $\gamma$  positive, montrons par récurrence sur la hauteur  $h(\gamma)$  que  $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{g}'$ . Si  $h(\gamma) = 1$ ,  $\gamma$  est simple donc c'est vrai par construction. Sinon, comme dans la preuve de la proposition 3.2.7, il existe  $\alpha \in \Delta$  telle que  $\langle \alpha, \gamma \rangle > 0$ , auquel cas  $\beta := \gamma - \alpha \in \Phi$  est de hauteur  $h(\beta) = h(\gamma) - 1$ . Par récurrence, on a  $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}'$ . Mais alors, d'après la proposition 3.1.5, on a  $\mathfrak{g}_\gamma = [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}'$ . De même on montre  $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}'$  pour  $\beta$  négative.  $\square$

**3.3.2 COROLLAIRE.**— *Soit  $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', \Phi', \Delta', E'_\alpha$  des données comme ci-dessus. Supposons aussi donné un isomorphisme de systèmes de racines  $f : \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \Phi(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$  tel que  $f(\Delta) = \Delta'$ . Alors il existe un unique isomorphisme de  $K$  algèbres de Lie  $f : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$  tel que  $f(E_\alpha) = E'_{f(\alpha)}$  et  $f(H_\alpha) = H'_{f(\alpha)}$  pour toute racine simple  $\alpha \in \Delta$ .*

*Démonstration.* Si un tel isomorphisme existe il doit aussi envoyer les  $F_\alpha$  sur les  $F'_{f(\alpha)}$  (puisque  $F$  est déterminé par l'égalité  $[E, F] = H$ ). Par la proposition précédente, ceci assure l'unicité de cet isomorphisme.

Pour prouver l'existence, on peut supposer que  $\Phi$  est irréductible, i.e. que  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont simples (exercice : s'en convaincre). Considérons alors la sous-algèbre  $\mathfrak{g}''$  de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  engendrée par les  $E''_\alpha := (E_\alpha, E'_{f(\alpha)})$  et les  $F''_\alpha := (F_\alpha, F'_{f(\alpha)})$ . Nous allons montrer que les projections  $\mathfrak{g}'' \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'' \xrightarrow{\pi_2} \mathfrak{g}'$  sont des isomorphismes de  $K$ -algèbres de Lie. Si c'est bien le cas, l'isomorphisme  $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$  satisfera les requêtes de l'énoncé.

Notons que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont évidemment des morphismes de  $K$ -algèbres de Lie et qu'ils sont surjectifs par la proposition précédente. Reste à voir qu'ils sont injectifs. Le noyau  $\text{Ker}(\pi_1) = \mathfrak{g}'' \cap (0 \oplus \mathfrak{g}')$  est un idéal de  $0 \oplus \mathfrak{g}'$  (le vérifier), donc puisque  $\mathfrak{g}'$  est simple, il est non nul si et seulement si  $\mathfrak{g}''$  contient  $\mathfrak{g}' = 0 \oplus \mathfrak{g}'$ , ce qui équivaut aussi à ce que  $\mathfrak{g}''$  contienne  $\mathfrak{g} \oplus 0$ , vu la définition de  $\mathfrak{g}''$ , et qui est donc encore équivalent à  $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ . Bref, il nous suffit de montrer que  $\mathfrak{g}'' \neq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ .

Soit  $\gamma$  la plus grande racine de  $\Phi$  (cf exercice ci-dessus). Alors  $\gamma' = f(\gamma)$  est la plus grande racine de  $\Phi'$ . Choisissons  $X \in \mathfrak{g}_\gamma \setminus \{0\}$  et  $X' \in \mathfrak{g}'_{\gamma'} \setminus \{0\}$ , posons  $X'' := (X, X') \in$

$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ , et considérons le sous- $K$ -espace vectoriel  $V$  de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$  engendré par tous les éléments de la forme  $\text{ad}_{F''_{\alpha_m}} \text{ad}_{F''_{\alpha_{m-1}}} \cdots \text{ad}_{F''_{\alpha_1}}(X'')$  où  $m \in \mathbb{N}$  et  $\alpha_i \in \Delta$ . Par définition, on voit que

- i)  $V \cap (\mathfrak{g}_\gamma \oplus \mathfrak{g}'_{\gamma'}) = K.X''$  et donc  $V \neq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ .
- ii)  $V$  est stable par les  $\text{ad}_{F''_\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ .

Montrons que  $V$  est aussi stable par les  $\text{ad}_{E''_\alpha}$ . Pour cela, remarquons que  $\text{ad}_{E''_\alpha}$  commute à  $\text{ad}_{F''_\beta}$  dès que  $\alpha \neq \beta$ , puisqu'alors  $[E''_\alpha, F''_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\beta} \oplus \mathfrak{g}'_{f(\alpha)-f(\beta)} = 0$  car  $\alpha - \beta$  n'est pas une racine. Ainsi, en utilisant que  $\text{ad}_{E''_\alpha} \text{ad}_{F''_\alpha} = \text{ad}_{F''_\alpha} \text{ad}_{E''_\alpha} + \text{ad}_{[E''_\alpha, F''_\alpha]}$  et que  $\text{ad}_{E''_\alpha}(X'') = 0$  (car  $\gamma + \alpha$  n'est pas une racine par maximalité de  $\gamma$ ), on se ramène par un argument inductif à montrer que  $V$  est stable par les  $\text{ad}_{H''_\alpha}$  où  $H''_\alpha = [E''_\alpha, F''_\alpha]$ . Mais cela découle du même argument inductif basé sur l'égalité  $\text{ad}_{H''_\alpha} \text{ad}_{F''_\beta} = \text{ad}_{F''_\beta} \text{ad}_{H''_\alpha} + \alpha^\vee(\beta) \text{ad}_{F''_\beta}$  et le fait que  $X''$  est propre pour  $\text{ad}_{H''_\alpha}$ .

Ainsi  $V$  est stable sous  $\text{ad}(\mathfrak{g}'')$ . Si on avait  $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ ,  $V$  serait donc un idéal propre de  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}''$ . En particulier  $V$  serait semi-simple, donc  $V = [V, V] = [V, \mathfrak{g}] \oplus [V, \mathfrak{g}']$  avec  $[V, \mathfrak{g}] = 0$  ou  $[V, \mathfrak{g}'] = 0$ , et donc  $V \subset \mathfrak{g}$  ou  $V \subset \mathfrak{g}'$ , ce qui n'est pas le cas puisque  $X'' \notin \mathfrak{g} \cup \mathfrak{g}'$ .  $\square$

**3.3.3 Vers une classification.** Ce corollaire donne une stratégie possible pour classifier toutes les  $K$ -algèbres de Lie simples.

- i) Classifier tous les systèmes de racines irréductibles.
- ii) Déterminer lesquels apparaissent bien comme systèmes de racines d'une algèbre de Lie simple.

Nous allons traiter i) plus loin. Le point ii) a une réponse agréable : *tous* les systèmes de racines "abstraits" apparaissent dans les algèbres de Lie simples (on voit d'ailleurs ainsi que la classification ne dépend pas du corps  $K$  supposé algébriquement clos de caractéristique nulle.) En fait, on a de la chance : la classification des systèmes de racines fait apparaître 4 familles infinies qui correspondent à des algèbres déjà connues ( $\mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{so}_{2n+1}$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}$  et  $\mathfrak{so}_{2n}$ ) et un nombre fini d'autres possibilités pour lesquelles il est donc envisageable de construire "à la main" les algèbres de Lie correspondantes.

**3.3.4 Générateurs et relations.** Cependant, la proposition précédente suggère une autre manière, plus conceptuelle et plus uniforme, de construire l'algèbre de Lie associée à un système de racines : par *générateurs et relations*. La proposition nous fournit des générateurs  $E_\alpha, F_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ . Pour écrire les relations connues entre ces générateurs, il est plus agréable d'introduire aussi les  $H_\alpha$ . Ces relations s'écrivent alors

$$(R0) \quad [H_\alpha, H_\beta] = 0,$$

$$(R1) \quad [E_\alpha, F_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha$$

$$(R2) \quad [H_\alpha, E_\beta] = \alpha^\vee(\beta) E_\beta \text{ et } [H_\alpha, F_\beta] = -\alpha^\vee(\beta) F_\beta.$$

Considérons alors l'algèbre  $\mathfrak{g}_0(\Phi)$  de générateurs  $E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  soumis aux relations (R0), (R1) et (R2). Techniquement, c'est le quotient de l'algèbre de Lie libre sur  $\{E_\alpha, F_\alpha, H_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  par l'idéal engendré par les éléments  $[H_\alpha, H_\beta]$ ,  $[E_\alpha, F_\beta] - \delta_{\alpha\beta} H_\alpha$ ,  $[H_\alpha, E_\beta] - \alpha^\vee(\beta) E_\beta$  et  $[H_\alpha, F_\beta] + \alpha^\vee(\beta) F_\beta$ . On peut montrer (cf le livre de Humphreys, 18.2 par exemple) que les  $H_\alpha$  y engendrent une sous-algèbre abélienne  $\mathfrak{h}$  de la bonne dimension et que

$\mathfrak{g}_0(\Phi)$  est somme de ses sous-espaces de poids pour  $\mathfrak{h}$ . Mais en général, l'ensemble des poids est *infini*, et  $\mathfrak{g}_0(\Phi)$  n'est donc pas l'algèbre cherchée. Il nous manque donc des relations imposant que l'ensemble des poids non nuls dans le quotient soit bien  $\Phi$ .

Pour en trouver, rappelons que pour  $\alpha, \beta \in \Delta$  on  $\beta - \alpha \notin \Phi$ . Par conséquent on a aussi  $s_\alpha(\beta - \alpha) = \beta + (-\alpha^\vee(\beta) + 1)\alpha \notin \Phi$ . Il s'ensuit que dans une éventuelle algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de système de racines  $\Phi$ , on doit avoir les relations (dites relations de Serre) :

$$(S) \quad (\text{ad}_{E_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_\beta) = 0 \text{ et } (\text{ad}_{F_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_{-\beta}) = 0.$$

Serre a alors montré que ces nouvelles relations suffisent à construire l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\Phi)$  désirée. Plus précisément :

THÉORÈME. – (*Construction des  $K$ -algèbres de Lie semi-simples*)

i) Soit  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan,  $\Phi$  le système de racines de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Fixons une base  $\Delta$  de  $\Phi$  et rappelons que  $\alpha^\vee(\beta) = \beta(H_\alpha)$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est engendrée par les  $E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ , avec pour seules relations :

$$(a) \quad [H_\alpha, H_\beta] = 0,$$

$$(b) \quad [E_\alpha, F_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha$$

$$(c) \quad [H_\alpha, E_\beta] = \alpha^\vee(\beta) E_\beta \text{ et } [H_\alpha, F_\beta] = -\alpha^\vee(\beta) F_\beta,$$

$$(d) \quad (\text{ad}_{E_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_\beta) = 0 \text{ et } (\text{ad}_{F_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_{-\beta}) = 0$$

pour  $\alpha, \beta \in \Delta$ .

ii) Soit  $(V, \Phi, \Phi^\vee)$  un système de racines (réduit) et  $\Delta$  une base de  $\Phi$ . Alors la présentation ci-dessus définit une  $K$ -algèbre de Lie semi-simple.

iii) Les procédés décrits ci-dessus induisent une bijection

$$\{ K\text{-algèbres de Lie semi-simples} \}_{/\text{isom}} \leftrightarrow \{ \text{Systèmes de racines (réduits)} \}_{/\text{isom}}.$$

On pourra consulter les livres de Serre, Carter ou Humphreys pour une preuve de ce résultat.

**3.3.5 Automorphismes.** Soit  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi, \Delta, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  comme plus haut. Une autre conséquence du corollaire 3.3.2 (ou du théorème ci-dessus), est que *tout automorphisme de  $\Phi$  induit un automorphisme de  $\mathfrak{g}$*

*Exemple.* – Considérons l'automorphisme  $\theta : \alpha \mapsto -\alpha$  de  $\Phi$ . On a donc  $\theta(\Delta) = -\Delta$ . Posons  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}, \Phi' = \Phi, \Delta' = -\Delta$  et  $E'_{-\alpha} := -F_\alpha$ . Le corollaire 3.3.2 nous assure alors l'existence d'un unique automorphisme  $\theta$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $E_\alpha \mapsto -F_\alpha$  et  $H_\alpha \mapsto -H_\alpha$ . Cet automorphisme envoie donc aussi  $F_\alpha$  sur  $E_\alpha$ , et par conséquent *est une involution de  $\mathfrak{g}$* .

Par exemple dans le cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ , on a  $\theta(X) = -{}^t X$  (transposée). Cet automorphisme n'est pas intérieur sauf si  $n = 2$ .

## 3.4 Classification des systèmes de racines

Que l'on utilise le théorème de Serre ci-dessus, ou que l'on se contente du corollaire 3.3.2, il nous faut maintenant classifier les systèmes de racines irréductibles. Cela passe par

deux invariants associés à un système de racine  $\Phi$  : sa matrice de Cartan et son diagramme de Dynkin.

**3.4.1 DÉFINITION.** (Matrice de Cartan)– Soit  $\Delta$  un ensemble fini. Une matrice de Cartan sur  $\Delta$  est une collection d'entiers  $c_{\alpha,\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \Delta$  telle que

(C1)  $c_{\alpha,\alpha} = 2$  et  $c_{\alpha,\beta} \in \{0, -1, -2, -3\}$  si  $\alpha \neq \beta$ .

(C2)  $c_{\alpha,\beta} = 0 \Rightarrow c_{\beta,\alpha} = 0$ .

(C3) la forme quadratique  $Q(x) = \sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} \sqrt{c_{\alpha,\beta} c_{\beta,\alpha}} x_{\alpha} x_{\beta}$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{\Delta}$  est définie positive.

On dit que deux matrices de Cartan, l'une sur  $\Delta$ , l'autre sur  $\Delta'$  sont équivalentes s'il existe une bijection  $\alpha \mapsto \alpha'$  de  $\Delta$  sur  $\Delta'$  telle que  $c_{\alpha',\beta'} = c_{\alpha,\beta}$  pour tous  $\alpha, \beta \in \Delta$ .

On peut obtenir une “vraie” matrice de taille  $r \times r$ ,  $r = |\Delta|$  en ordonnant l'ensemble  $\Delta$ . La “vraie” matrice est alors définie à permutation près de la base (i.e. conjugaison par une matrice permutation).

LEMME. – Soit  $\Phi$  un système de racines.

- i) Si  $\Delta$  est une base de  $\Phi$ , les  $c_{\alpha,\beta} := \alpha^{\vee}(\beta)$  forment une matrice de Cartan  $C(\Phi, \Delta)$ .
- ii) Si  $\Delta'$  est une autre base,  $C(\Phi, \Delta)$  et  $C(\Phi, \Delta')$  sont équivalentes.
- iii)  $\Phi$  est déterminé, à isomorphisme près par  $C(\Phi)$ .
- iv)  $\Phi$  est réductible si et seulement si  $C(\Phi)$  est (équivalente à) une matrice diagonale par blocs, avec au moins 2 blocs.
- v)  $C(\Phi^{\vee})$  est la transposée de  $C(\Phi)$ .

*Démonstration.* i) On a déjà vu que la matrice  $C(\Phi, \Delta)$  satisfait la propriété (C1) d'une matrice de Cartan. Pour voir la propriété (C2), il suffit de rappeler que  $\alpha^{\vee}(\beta) = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}$  pour un produit scalaire  $W$ -invariant sur  $V$ , puis d'utiliser la symétrie de ce produit scalaire. Pour la propriété (C3), on utilise à nouveau ce produit scalaire et cette égalité. Appliquée aussi à  $\beta^{\vee}$ , cette égalité nous dit que  $\alpha^{\vee}(\beta)\beta^{\vee}(\alpha) = 4 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2}$ , mais puisqu'on sait que  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ , on en tire que  $\sqrt{\alpha^{\vee}(\beta)\beta^{\vee}(\alpha)} = -2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$ . Il s'ensuit que pour tout  $x = \sum x_{\alpha} \alpha$ , on a  $Q(x) = \|y\|^2$  si l'on pose  $y = \sum_{\alpha} \frac{x_{\alpha}}{\|\alpha\|} \alpha$ . Ceci montre que  $Q$  est définie positive.

ii) L'unique  $w \in W$  tel que  $w(\Delta) = \Delta'$  permet d'identifier  $C(\Phi, \Delta)$  et  $C(\Phi, \Delta')$  puisque  $c_{w(\alpha), w(\beta)} = 2 \frac{\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle}{\|w(\alpha)\|^2} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} = c_{\alpha,\beta}$ .

iii) Il s'agit de voir comment retrouver  $\Phi$  à partir de  $\Delta$  et des  $c_{\alpha,\beta}$ . Or, les  $c_{\alpha,\beta}$  déterminent les réflexions  $s_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ , on sait que ces réflexions engendrent le groupe de Weyl  $W$ , et on sait que  $W.\Delta = \Phi$ .

iv) Le sens direct est clair. Supposons donc  $C(\Phi, \Delta)$  équivalente à une matrice diagonale par blocs. Cela signifie qu'on peut partitionner  $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$  de sorte que  $c_{\alpha,\beta} = 0$  si  $\alpha \in \Delta_1$  et  $\beta \in \Delta_2$ . On a donc  $\Delta_1 \perp \Delta_2$  pour tout produit scalaire  $W$ -invariant, et on a vu dans un exercice plus haut que  $\Phi$  est alors réductible.

v) est clair. □

*Exemple.* – La matrice de Cartan de  $\Phi(\mathfrak{sl}_n)$  dans la base des  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  est : (par convention ce qui n'est pas rempli est nul)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les matrices de Cartan de  $\Phi(\mathfrak{so}_{2n+1})$  et  $\Phi(\mathfrak{sp}_{2n})$  dans la base des  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$  ( $i \leq n-1$ ) et  $\alpha_n = e_i$ , resp.  $2e_i$  sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}$$

*Exercice.* – Trouver une base de  $\Phi(\mathfrak{so}_{2n})$  dans laquelle la matrice de Cartan est de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & -1 \\ & & \ddots & -1 & 2 \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}$$

*Exercice.* – Trouver une base du système de racines de rang 2 non-classique du paragraphe 3.2.5, et écrire sa matrice de Cartan.

La propriété iii) de ce lemme nous suggère de classifier les matrices de Cartan. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant et d'un invariant de la matrice appelé *graphe (ou diagramme) de Dynkin*.

**3.4.2 LEMME.** – Soit  $C = (c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \Delta}$  une matrice de Cartan sur un ensemble  $\Delta$ .

- i) Si  $\Delta' \subset \Delta$ , la matrice  $C' = (c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \Delta'}$  extraite de  $C$  est une matrice de Cartan sur  $\Delta'$ .
- ii) Si  $c_{\alpha,\beta} < 0$ , alors  $c_{\alpha,\beta} = -1$  ou  $c_{\beta,\alpha} = -1$ .
- iii) Soit  $C' = (c'_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in \Delta}$  une matrice telle que  $c'_{\alpha,\beta} \geq c_{\alpha,\beta}$  pour tout  $\alpha, \beta$ . Si  $C'$  satisfait les propriétés (C1) et (C2),  $C'$  est une matrice de Cartan.

*Démonstration.* i) est clair. Appliquons le à  $\Delta' = \{\alpha, \beta\}$  avec  $\alpha, \beta$  telles que  $c_{\alpha,\beta} < 0$ . Le discriminant de la forme bilinéaire  $Q'$  sur  $\mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$  est  $c_{\alpha,\beta}c_{\beta,\alpha} - 4$ . Pour que  $Q'$  soit définie,



il faut que ce discriminant soit  $< 0$ . On en déduit que  $0 < c_{\alpha,\beta}c_{\beta,\alpha} < 4$ , ce qui, vu les contraintes sur les  $c_{\alpha,\beta}$ , impose que  $c_{\alpha,\beta} = -1$  ou  $c_{\beta,\alpha} = -1$ .

Pour iii), notons  $Q'$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^\Delta$  associée à  $C'$ . Pour  $x = \sum_{\alpha} x_{\alpha}\alpha \in \mathbb{R}^\Delta$ , notons  $|x| := \sum_{\alpha} |x_{\alpha}|\alpha$ . Alors  $Q'(x) \geq Q'(|x|) \geq Q(|x|)$ . On en conclut que  $Q'$  est définie positive.  $\square$

**3.4.3 DÉFINITION.**— *Un diagramme  $\Gamma$  sur un ensemble  $\Delta$  est un graphe partiellement orienté du type suivant*

- l'ensemble des sommets est  $\Delta$ .
- Pour  $\alpha \neq \beta \in \Delta$ , le nombre d'arêtes reliant  $\alpha$  et  $\beta$  est noté  $n_{\alpha\beta}$ .
- Si  $n_{\alpha\beta} > 1$ , on se donne une orientation  $\alpha \rightarrow \beta$  ou  $\beta \rightarrow \alpha$  commune à ces  $n_{\alpha\beta}$  arêtes.

*Le diagramme est dit de Dynkin si la forme quadratique  $Q(x) = \sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha \neq \beta} \sqrt{n_{\alpha\beta}} x_{\alpha} x_{\beta}$  sur  $\mathbb{R}^\Delta$  est définie positive.*

Remarquer que le fait que  $\Gamma$  est de Dynkin ou pas ne dépend pas des éventuelles orientations. Voici le lien entre matrices et diagrammes.

Soit  $C = (c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$  une matrice de Cartan sur  $\Delta$ . On lui associe un diagramme  $\Gamma(C)$  sur  $\Delta$  en posant  $n_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta}c_{\beta,\alpha}$ . Si  $n_{\alpha\beta} > 1$  et  $|c_{\alpha,\beta}| = 1$ , on oriente les arêtes de  $\alpha$  vers  $\beta$ . (Noter que par le lemme précédent, on sait que  $|c_{\alpha,\beta}| = 1$  ou  $|c_{\beta,\alpha}| = 1$ ).

Réciproquement, on associe à un diagramme  $\Gamma$  la matrice  $C(\Gamma)$  définie par  $c_{\alpha,\alpha} = 2$  et

- $c_{\alpha,\beta} = -n_{\alpha\beta}$  si  $n_{\alpha,\beta} < 2$  ou  $\beta \rightarrow \alpha$
- $c_{\alpha,\beta} = -1$  si  $n_{\alpha,\beta} \geq 2$  et  $\alpha \rightarrow \beta$ .

Si  $\Gamma$  est un diagramme de Dynkin, alors  $C(\Gamma)$  est une matrice de Cartan (noter que le caractère défini de  $Q$  implique que  $n_{\alpha\beta} < 4$  comme dans le lemme ci-dessus).

**LEMME.** – *Ces constructions définissent des bijections réciproques entre matrices de Cartan et diagrammes de Dynkin. De plus, on a les propriétés suivantes :*


- les composantes connexes de  $\Gamma(C)$  sont en bijection avec les “blocs diagonaux” de  $C$ . En particulier, si  $C = C(\Phi)$ , alors  $\Phi$  est irréductible si et seulement si  $\Gamma(C)$  est connexe.
- le diagramme de  ${}^tC$  s'obtient en renversant les orientations.
- Si  $C'$  est extraite de  $C$ , alors  $\Gamma(C')$  est extrait de  $\Gamma(C)$  (en un sens évident).
- Les matrices  $C'$  comme dans le iii) du lemme précédent correspondent aux diagrammes obtenus en effaçant des arêtes de  $\Gamma(C)$ .

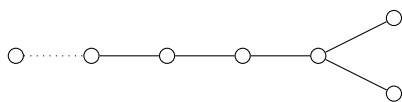
*Démonstration.* Laissée au lecteur.  $\square$

*Exemple.* – Voici les diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie classiques.

$A_n$        $\circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$       C'est le diagramme de Dynkin de  $\Phi(\mathfrak{sl}_{n+1})$ , avec  $n$  sommets.

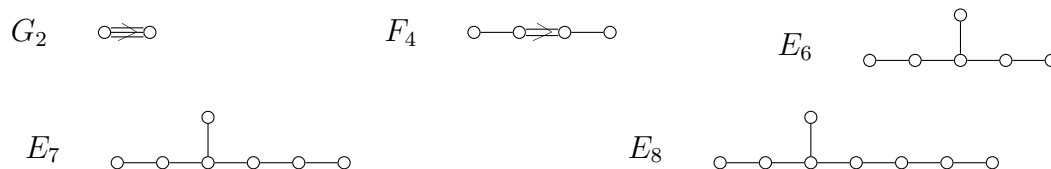
$B_n$        $\circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \rightrightarrows \circ$       C'est le diagramme de Dynkin de  $\Phi(\mathfrak{so}_{2n+1})$ , avec  $n$  sommets.

$C_n$   C'est le diagramme de Dynkin de  $\Phi(\mathfrak{sp}_{2n})$ , avec  $n$  sommets.

$D_n$   C'est le diagramme de Dynkin de  $\Phi(\mathfrak{so}_{2n})$ , avec  $n > 1$  sommets ( $\mathfrak{so}_2$  n'est pas simple).  
Noter que  $D_2 = A_1 \sqcup A_1$  est non-connecté.

On est donc amené à classifier les diagrammes de Dynkin. Le théorème de classification est le suivant.

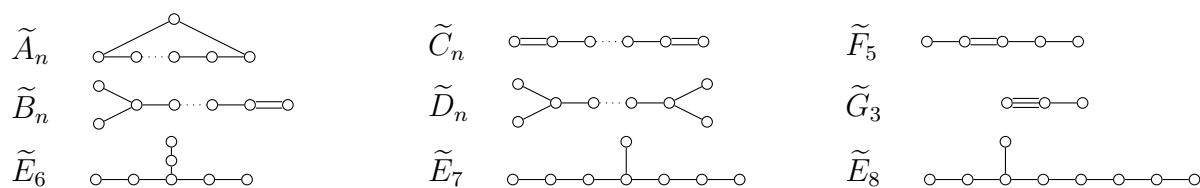
**3.4.4 THÉORÈME.**— *Tout diagramme de Dynkin connexe est de l'un des types "classiques"  $A_n, B_n, C_n, D_n (n > 2)$ , ou de l'un des types "exceptionnels" suivants :*



*Démonstration.* Elle repose sur le fait que tout diagramme extrait d'un diagramme de Dynkin doit être de Dynkin (cf les deux derniers lemmes). La stratégie consiste donc en deux étapes :

- (a) Exhiber une liste de diagrammes "interdits" dont la forme bilinéaire associée est dégénérée.
- (b) Montrer que si un diagramme ne contient pas un diagramme "interdit", alors il est du type décrit dans le i) du théorème.

(a) Voici la liste des diagrammes "interdits" utilisés (l'indice dans la notation est le nombre de sommets - 1).



Pour voir qu'ils sont bien interdits, il suffit d'exhiber un vecteur isotrope pour la forme quadratique associée. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les vecteurs suivants conviennent :

$$\begin{array}{lll} \tilde{A}_n : & (1, 1, \dots, 1) & \tilde{C}_n : & (1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, 1) & \tilde{F}_5 : & (1, 2, 3, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \tilde{B}_n : & (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, 1) & \tilde{D}_n : & (1, 1, 2, \dots, 2, 1, 1) & \tilde{G}_3 : & (\sqrt{3}, 2, 1) \\ \tilde{E}_6 : & \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} & \tilde{E}_7 : & \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} & \tilde{E}_8 : & \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} - \frac{4}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \end{array}$$

(b) Reste à voir que si un diagramme  $\Gamma$  ne contient aucun diagramme interdit, alors il est d'un des types décrits dans le théorème. C'est une vérification élémentaire. Traitons par exemple le cas où  $\Gamma$  n'a que des arêtes simples.

- Si  $\Gamma$  n'a pas de bifurcation (sommet ayant au moins 3 voisins), alors le diagramme interdit  $\tilde{A}_n$  nous dit que  $\Gamma$  est de type  $A_n$ .
- Soit  $\alpha$  un sommet ayant au moins 3 voisins. Le diagramme interdit  $\tilde{D}_4$  nous dit que  $\alpha$  a exactement 3 voisins, et le diagramme interdit  $\tilde{D}_n$  nous dit que  $\alpha$  est l'unique point de bifurcation. On a donc 3 branches  $b_1, b_2, b_3$  qui partent de  $\alpha$  et le diagramme interdit  $\tilde{A}_n$  nous dit que ces branches sont bien distinctes.
- Le diagramme interdit  $\tilde{E}_6$  nous dit que l'une de ces branches, disons  $b_1$ , ne possède qu'un seul sommet (en plus de  $\alpha$ ).
- Le diagramme interdit  $\tilde{E}_7$  nous dit que l'une des deux autres branches, disons  $b_2$  possède au plus deux sommets (en plus de  $\alpha$ ). Nous supposons sans perte de généralité que  $b_3$  est au moins aussi longue que  $b_2$ .
- Si  $b_2$  possède 2 sommets, le diagramme interdit  $\tilde{E}_8$  nous dit que  $\Gamma$  est  $E_6, E_7$  ou  $E_8$ .
- Si  $b_2$  ne possède qu'1 sommet, alors  $\Gamma$  est de type  $D_n$ .

Les cas où  $\Gamma$  possède des arêtes doubles ou triples sont laissés au lecteur.  $\square$

*Remarque.* – Les diagrammes “interdits” utilisés ci-dessus sont eux-aussi remarquables. Ils sont les seuls, en plus des diagrammes de Dynkin, pour lesquels la forme quadratique  $Q$  est *positive* (à défaut d'être définie positive). Ces diagrammes correspondent à des “systèmes de racines affines”, lesquels classifient certaines algèbres de Lie de dimension infinie dites “algèbres de Lie affines”. Etant donné un tel diagramme, l'algèbre de Lie affine correspondante est définie par générateurs et relations exactement comme dans le théorème de Serre.

Réciproquement, il n'est pas encore clair que tous les diagrammes de Dynkin (ou de manière équivalente, toutes les matrices de Cartan) proviennent de systèmes de racines. C'est l'objet du complément ci-dessous.

**3.4.5 THÉORÈME.** – *Chacun des diagrammes du théorème précédent est le diagramme de Dynkin d'un système de racines réduit irréductible. De plus, ces systèmes sont 2 à 2 non isomorphes à l'exception de  $A_1 = B_1 = C_1$ ,  $B_2 = C_2$  et  $A_3 = D_3$ .*

*Démonstration.* L'existence d'un système de racines correspondant a déjà été vue dans les cas classiques  $A_n, B_n, C_n$  et  $D_n$ . De plus, on voit immédiatement que le graphe  $G_2$  correspond au système de racines de rang 2 de cardinal 12 vu au paragraphe 3.2.5.

Dans  $\mathbb{R}^4$  euclidien, on peut vérifier que l'ensemble

$$\Phi := \{(\pm e_i \pm e_j), i \neq j\} \cup \{\pm e_i\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}$$

est un système de racines de type  $F_4$ , avec comme base  $\{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, e_1 - e_2 - e_3 - e_4\}$  (par exemple).

Dans  $\mathbb{R}^8$  euclidien, on peut vérifier que l'ensemble

$$\Phi := \{(\pm e_i \pm e_j), i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8) \right\}^+$$

où dans l'ensemble de droite on n'autorise qu'un nombre pair de signes  $-1$ , est un système de racines de type  $E_8$ , dont une base est donnée par  $\alpha_1 = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$ ,  $\alpha_2 = e_1 + e_2$ ,  $\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}$ ,  $i = 3, \dots, 8$ .

Puisque les diagrammes  $E_7$  et  $E_6$  sont contenus dans celui de  $E_8$ , cela assure l'existence des systèmes de racines correspondants : il suffit de prendre le sous-système de racines engendré par les racines simples correspondant. En l'occurrence, avec les notations ci-dessus, il s'agit des racines simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ , et pour  $E_i$ ,  $i = 6$  ou  $7$ .

Enfin, on a déjà vu que le procédé  $\Phi \mapsto C \mapsto \Gamma$  est injectif (sur les classes d'isomorphismes de systèmes de racines), donc le dernier point de l'énoncé est clair.  $\square$

*Remarque.* – Grâce au théorème de présentation de Serre, les identités “exceptionnelles” de diagrammes de Dynkin dans le ii) du théorème se traduisent en isomorphismes “exceptionnels”  $\mathfrak{sl}_2(K) \simeq \mathfrak{sp}_2(K) \simeq \mathfrak{so}_3(K)$ ,  $\mathfrak{so}_5(K) \simeq \mathfrak{sp}_4(K)$ , et  $\mathfrak{sl}_4(K) \simeq \mathfrak{so}_6(K)$ . L'identité  $D_2 = A_1 \sqcup A_1$  reflète un isomorphisme  $\mathfrak{so}_4(K) \simeq \mathfrak{sl}_2(K) \oplus \mathfrak{sl}_2(K)$ . On prendra garde au fait que certains de ces isomorphismes ne sont pas valables sur un corps non algébriquement clos. Par exemple  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \neq \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$  !

*Exercice.* – Notons  $\mathfrak{g}(\Gamma)$  l'algèbre de Lie associée au système de racines  $\Phi(\Gamma)$ . Montrer que si  $\Gamma'$  est un diagramme de Dynkin obtenu à partir de  $\Gamma$  en effaçant des sommets (et les arêtes en partant), alors on peut plonger  $\mathfrak{g}(\Gamma')$  dans  $\mathfrak{g}(\Gamma)$ . En déduire que toute algèbre de Lie classique de rang  $n$  contient une sous-algèbre isomorphe à  $\mathfrak{sl}_n$ .

*Exercice.* – Soit  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Phi, \Delta$  comme d'habitude, et notons  $\mathfrak{n}_+ := \bigoplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha$ . Construire un homomorphisme du groupe d'automorphismes du diagramme de Dynkin de  $\mathfrak{g}$  vers le sous-groupe des automorphismes de  $\mathfrak{g}$  qui stabilisent  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{n}_+$ .

Expliciter  $\text{Aut}(\Gamma(\mathfrak{g}))$  et l'image du morphisme obtenu dans le cas de  $\mathfrak{sl}_n$ .

## 4 Représentations des algèbres de Lie semi-simples

On a vu que les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  sont complètement réductibles. Cela signifie qu'il suffit de classifier les irréductibles pour comprendre toute la théorie des représentations de dimension finie de  $\mathfrak{g}$ . Mais pour arriver à cette classification, nous allons aussi considérer certaines représentations de dimension infinie.

### 4.1 Modules de plus haut poids

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan,  $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$  l'ensemble des racines, et  $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee = H_\alpha, \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}$  l'ensemble des coracines.

Pour une représentation  $V$  de  $\mathfrak{g}$  et  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , on note comme d'habitude

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall H \in \mathfrak{h}, H.v = \lambda(H)v\},$$

et on dit que  $\lambda$  est un poids de  $V$  si  $V_\lambda \neq 0$ . On rappelle que pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\mathfrak{g}_\alpha.V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ . On notera  $P(V)$  l'ensemble des poids de  $V$ . On dit que  $V$  est *somme de ses sous-espaces de poids* si  $V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$ .

*Exercice.* – Montrer que si  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids, alors toute sous-représentation de  $V$  et tout quotient de  $V$  a la même propriété. (On ne suppose pas  $V$  de dimension finie).

On note aussi  $P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^*, \lambda(\Phi^\vee) \subset \mathbb{Z}\}$ . C'est un groupe abélien libre de rang  $\dim \mathfrak{h}$  appelé "réseau des poids entiers" de  $\Phi$ .

**4.1.1 PROPOSITION.** – *Supposons  $(V, r)$  de dimension finie. Alors  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids, et  $P(V) \subset P$ .*

*Démonstration.* On a vu que  $\mathfrak{h}$  est formée d'éléments semi-simples de  $\mathfrak{g}$ , donc  $r(\mathfrak{h})$  est formée d'éléments diagonalisables de  $\mathfrak{gl}(V)$ . Comme  $r(\mathfrak{h})$  est une sous-algèbre commutative, ces éléments sont simultanément diagonalisables, d'où la première assertion. Pour la seconde, soit  $\alpha \in \Phi$  et  $\mathfrak{sl}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus K.H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ . On sait qu'il existe un isomorphisme  $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_\alpha$  qui envoie  $H$  sur  $H_\alpha$ . Les poids de  $H$  dans  $V$  vue comme représentation de  $\mathfrak{sl}_2$  via cet isomorphisme sont les  $\lambda(H_\alpha) = \alpha^\vee(\lambda)$ , pour  $\lambda \in P(V)$ . Mais la théorie des représentations de  $\mathfrak{sl}_2$  nous dit que ces poids sont entiers.  $\square$

Fixons maintenant une base  $\Delta$  de  $\Phi$  et notons  $\Phi_+$  l'ensemble des racines positives associé. On a une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  avec  $\mathfrak{n}_\pm = \sum_{\alpha \in \Phi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ .

**4.1.2 DÉFINITION.** – *Un vecteur  $v \in V$  sera dit primitif de poids  $\lambda$  si  $v \in V_\lambda$  et si  $\mathfrak{n}_+.v = 0$ .*

*Exercice.* – Montrer que c'est équivalent à demander que  $\mathfrak{g}_\alpha.v = 0$  pour  $\alpha \in \Delta$ .

Lorsque  $V$  est de dimension finie, la finitude de  $P(V)$  et l'inclusion  $\mathfrak{g}_\alpha.V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$  assurent l'existence de vecteurs primitifs dans  $V$ . Si  $V$  est de plus irréductible, on voit que  $V$  est engendrée par un vecteur primitif. Ceci conduit à la notion de représentation "de plus haut poids".

**4.1.3 DÉFINITION.** – *Une représentation  $V$  (pas nécessairement de dimension finie) est dite de plus haut poids si elle est engendrée par un vecteur  $v$  primitif. Dans ce cas, on dit que  $v$  est un "vecteur de plus haut poids", et que le poids  $\lambda$  de  $v$  est un "plus haut poids de  $V$ ".*

La terminologie est expliquée par le i) du résultat suivant.

**4.1.4 PROPOSITION.** – *Soit  $V$  une représentation de plus haut poids  $\lambda$ .*

- i)  $P(V) \subset \lambda - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$ . En d'autres termes,  $\lambda$  est le plus grand élément de  $P(V)$  pour l'ordre (partiel) sur  $\mathfrak{h}^*$  défini par  $\lambda' \preccurlyeq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \lambda' \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$ .
- ii)  $V = \sum_{\mu \in P(V)} V_\mu$ , i.e.  $V$  est somme de ses sous-espaces de poids.
- iii) Chaque  $V_\mu$  est de dimension finie et  $\dim V_\lambda = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ . Si l'on étend la représentation  $V$  à l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ , la droite  $Kv$  est stable sous  $\mathcal{U}\mathfrak{b}$ . Par ailleurs, si l'on choisit pour chaque  $\alpha \in \Phi_+$  un élément non nul  $F_\alpha$  de  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ , le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt nous dit que  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ , en tant que  $\mathcal{U}\mathfrak{b}$ -module à droite, est engendré par les éléments de la forme  $F_{\alpha_s} F_{\alpha_{s-1}} \cdots F_{\alpha_1} \mathcal{U}\mathfrak{b}$  où  $s \in \mathbb{N}$  et  $(\alpha_i)_i \in (\Phi_+)^s$  (si  $s = 0$ , on convient que ce produit est 1). En d'autres termes, on a

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} = \sum_{s \in \mathbb{N}} \sum_{(\alpha_i)_i \in (\Phi_+)^s} F_{\alpha_s} F_{\alpha_{s-1}} \cdots F_{\alpha_1} \mathcal{U}\mathfrak{b}.$$

On en conclut que  $V$ , en tant que  $K$ -espace vectoriel, est engendré par les vecteurs de la forme  $F_{\alpha_s} F_{\alpha_{s-1}} \cdots F_{\alpha_1} v$ . Or un tel vecteur est de poids  $\lambda - \sum_{i=1}^s \alpha_i$ . On en déduit le i) et le ii), ainsi que  $\dim(V_\lambda) = 1$ . Pour voir la finitude de  $\dim V_\mu$  il suffit de remarquer qu'il y a un nombre fini de suites  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  telles que  $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^s \alpha_i$ .  $\square$

*Remarque.* – Une représentation de plus haut poids  $V$  est indécomposable. En effet, si  $V = V_1 \oplus V_2$  (décomposition stable sous  $\mathfrak{g}$ ), alors  $V_\lambda = V_{1,\lambda} \oplus V_{2,\lambda}$ . Mais puisque  $\dim(V_\lambda) = 1$ , il y a un  $i = 1$  ou  $2$  tel que  $V_\lambda = V_{i,\lambda}$ . Or,  $V$  est engendré par  $V_\lambda$ , donc  $V \subset V_i$ .

**4.1.5 Modules de Verma.** La preuve ci-dessus suggère la définition d'une représentation de plus haut poids "universelle". Posons en effet

$$M(\lambda) := \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{U}\mathfrak{b}} K_\lambda.$$

C'est le  $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -module "induit" du  $\mathcal{U}\mathfrak{b}$ -module de dimension 1 donné par la forme linéaire  $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda} K$ . Par propriété d'adjonction du produit tensoriel on a pour toute représentation  $V$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(K_\lambda, V) = \{v \in V_\lambda, n_+ v = 0\}.$$

On voit en particulier que toute représentation de plus haut poids  $\lambda$  est quotient de  $M(\lambda)$ . Ce dernier est appelé "module de Verma de poids  $\lambda$ ".

**4.1.6 THÉORÈME.** – (Ici les représentations peuvent être de dimension infinie).

- i) Pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , il existe une représentation irréductible  $V(\lambda)$  de plus haut poids  $\lambda$ , unique à isomorphisme près.
- ii) Si  $V(\lambda) \simeq V(\lambda')$ , alors  $\lambda = \lambda'$ .

*Démonstration.* ii) Supposons  $V(\lambda) \simeq V(\lambda') =: V$ . Alors  $P(V) \subset \lambda - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$ , donc  $\lambda' \preccurlyeq \lambda$ . Mais on a aussi  $P(V) \subset \lambda' - \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$  donc  $\lambda \preccurlyeq \lambda'$ . Il s'ensuit que  $\lambda = \lambda'$ .

i) Soit  $V$  une représentation de plus haut poids  $\lambda$ , par exemple  $V = M(\lambda)$ . Soient  $W_1, W_2$  deux sous- $\mathfrak{g}$ -modules stricts de  $V$ . D'après la proposition ci-dessus,  $V$  est somme

de ses sous-espaces de poids, donc d'après un exercice plus haut, chaque  $W_i$  est somme de ses sous-espaces de poids. Puisque  $W_i$  est strict, on a donc  $W_i \subset \sum_{\mu \prec \lambda} V_\mu$ , et par conséquent la somme  $W = W_1 + W_2$  est aussi contenue dans  $\sum_{\mu \prec \lambda} V_\mu$  et donc est un sous  $\mathfrak{g}$ -module *strict* de  $V$ . On peut donc considérer le plus grand sous-module strict  $U$  de  $V$ . Explicitement, on a  $U = \sum_{W \subsetneq V} W$ , qui vérifie  $U \subsetneq V$ . Mais alors le quotient  $\bar{V} := V/U$  est *non nul, de plus haut poids*  $\lambda$  (avec pour vecteur primitif l'image d'un vecteur primitif de  $V$ ) et *irréductible*, puisque si  $\bar{W} \subset \bar{V}$  est non nul, alors l'image réciproque  $W$  de  $\bar{W}$  dans  $V$  contient strictement  $U$  donc est égale à  $V$ . De plus, la construction montre que  $\bar{V}$  est l'*unique* quotient irréductible de  $V$  (car la projection  $V \rightarrow \bar{V}$  se factorise par tout morphisme surjectif non nul  $V \rightarrow V'$ ).

Reste à voir que tous les modules simples de plus haut poids  $\lambda$  sont isomorphes. Mais comme on vient de le voir au-dessus du théorème, un tel module est quotient de  $M(\lambda)$ , donc isomorphe à l'unique quotient irréductible  $V(\lambda)$  de  $M(\lambda)$  construit ci-dessus.  $\square$

## 4.2 Classification des modules simples de dimension finie

Puisque toutes les représentations irréductibles de dimension finie sont des représentations de plus haut poids, elles sont de la forme  $V(\lambda)$  pour un unique  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Il nous reste donc à déterminer quand  $V(\lambda)$  est de dimension finie. On a vu qu'une condition nécessaire est que  $\lambda \in P$ . Mais ce n'est pas une condition suffisante :

**4.2.1 THÉORÈME.**— *Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  et  $V(\lambda)$  l'unique  $\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ . Alors  $V(\lambda)$  est de dimension finie si et seulement si  $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \alpha \in \Delta$ .*

*Démonstration.* Commençons par la remarque suivante. Soit  $v$  un vecteur primitif de  $V(\lambda)$  et  $\alpha \in \Delta$ . Alors  $v$  engendre un  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module  $V(\lambda, \alpha)$  de plus haut poids  $\lambda(H_\alpha)$ .

i) Si  $V(\lambda)$  est de dimension finie, alors  $V(\lambda, \alpha)$  est aussi de dimension finie, et on sait que le plus haut poids d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -module de dimension finie est un entier naturel, *i.e.*  $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ .

ii) Réciproquement, supposons que  $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N}$  pour toute  $\alpha \in \Delta$ . Notre but est de prouver que  $P(V(\lambda))$  est stable sous l'action de  $W$  et d'appliquer le lemme géométrique ci-dessous qui nous dit que  $P(V(\lambda))$  est alors fini, ce qui nous suffit pour conclure que  $V(\lambda)$  est de dimension finie puisque les  $V(\lambda)_\mu$  le sont.

Puisque  $W$  est engendré par les réflexions simples, il nous suffit de montrer que  $P(V)$  est stable par les  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Notons que si  $\mu \in P(V)$ , alors vu notre hypothèse et la forme de  $P(V)$ , on a  $\mu(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ . Si  $\mu(H_\alpha) = 0$  alors  $s_\alpha(\mu) = \mu$  et on n'a rien à ajouter. Si  $\mu(H_\alpha) > 0$ , on a  $F_\alpha^{\mu(H_\alpha)}(V(\lambda)_\mu) \subset V(\lambda)_{s_\alpha(\mu)}$  et il nous suffirait donc de prouver que  $F_\alpha^{\mu(H_\alpha)}(V(\lambda)_\mu) \neq 0$ . Si  $\mu(H_\alpha) < 0$ , on a  $E_\alpha^{-\mu(H_\alpha)}(V(\lambda)_\mu) \subset V(\lambda)_{s_\alpha(\mu)}$  et il nous suffirait donc de prouver que  $E_\alpha^{-\mu(H_\alpha)}(V(\lambda)_\mu) \neq 0$ . Or on sait que dans une représentation  $W$  de dimension finie de  $\mathfrak{sl}_\alpha$  et pour  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $F_\alpha^m(W_m) = W_{-m}$  et  $E_\alpha^m(W_{-m}) = W_m$ . Il nous suffirait donc, pour conclure que  $s_\alpha(P(V)) = P(V)$ , de montrer que  $V$  est somme de sous  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -modules de dimension finie.

Considérons donc la somme  $V(\lambda)^\alpha$  des sous- $\mathfrak{sl}_\alpha$ -modules de dimension finie de  $V$ , et commençons par remarquer qu'elle est stable par  $\mathfrak{g}$ . En effet, si  $V'$  est un sous  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de

dimension finie, alors  $\sum_{X \in \mathfrak{g}} XV'$  est aussi un sous  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de dimension finie (noter que la somme peut n'être prise que sur une base de  $\mathfrak{g}$ ). On voudrait montrer que  $V(\lambda)^\alpha = V(\lambda)$ . Par irréductibilité de  $V(\lambda)$ , il suffit maintenant de prouver que  $V(\lambda)^\alpha \neq 0$ , donc d'exhiber un sous  $\mathfrak{sl}_\alpha$ -module de dimension finie.

Nous allons prouver que  $V(\lambda, \alpha)$  (défini au début de la preuve) est de dimension finie. Comme  $v$  est propre pour  $\mathfrak{b}_\alpha = KH_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ , on a  $V(\lambda, \alpha) = \text{Vect}_K\{F_\alpha^i v, i \in \mathbb{N}\}$ . Rappelons la formule

$$E_\alpha.F_\alpha^i v = i(\lambda(H_\alpha) - i + 1)F_\alpha^{i-1}v$$

déjà utilisée dans l'étude des représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}_2$  (et facile à prouver par récurrence). Elle montre en particulier que  $E_\alpha.F_\alpha^{\lambda(H_\alpha)+1}(v) = 0$ . Par ailleurs, pour  $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$ , on sait que  $E_\beta$  commute avec  $F_\alpha$  donc  $E_\beta.F_\alpha^{\lambda(H_\alpha)+1}(v) = F_\alpha^{\lambda(H_\alpha)+1}.E_\beta v = 0$  (car  $v$  est primitif). Il s'ensuit que le vecteur  $F_\alpha^{\lambda(H_\alpha)+1}(v)$  est primitif. Or il est de poids  $\lambda' = \lambda - (\lambda(H_\alpha) + 1)\alpha \neq \lambda$ . D'après le ii) du théorème précédent,  $\lambda'$  n'est pas un plus haut poids de  $V(\lambda)$ , donc  $F_\alpha^{\lambda(H_\alpha)+1}(v) = 0$ . Il s'ensuit que  $V(\lambda, \alpha)$  est de dimension finie.  $\square$

LEMME. – Soit  $C := \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R}_+ \alpha \in V$  le cône positif engendré par une base  $\Delta$  d'un système de racines  $\Phi$ . Alors pour tout  $x \in V$ ,  $\cap_{w \in W} w(x - C)$  est compact.

*Démonstration.* Soit  $w_0$  l'unique élément (d'ordre 2) de  $W$  tel que  $w_0(\Delta) = -\Delta$ . Il nous suffira de prouver que  $(x - C) \cap w_0(x - C)$  est compact. Soit  $(\omega_\alpha)_\alpha$  la base duale de  $\Delta$  dans  $V^*$ . On a alors  $w_0(\omega_\alpha) = -\omega_{-w_0(\alpha)}$ . Par définition,

$$x - C = \{v \in V, \forall \alpha \in \Delta, \langle \omega_\alpha, v \rangle \leq \langle \omega_\alpha, x \rangle\}$$

et

$$\begin{aligned} w_0(x - C) &= \{v \in V, \forall \alpha \in \Delta, \langle \omega_\alpha, w_0(v) \rangle \leq \langle \omega_\alpha, x \rangle\} \\ &= \{v \in V, \forall \alpha \in \Delta, \langle -\omega_{-w_0(\alpha)}, v \rangle \leq \langle \omega_\alpha, x \rangle\}, \end{aligned}$$

donc

$$(x - C) \cap w_0(x - C) = \{v \in V, \forall \alpha \in \Delta, \langle -\omega_{-w_0(\alpha)}, x \rangle \leq \langle \omega_\alpha, v \rangle \leq \langle \omega_\alpha, x \rangle\}$$

qui est visiblement compact puisque  $(\omega_\alpha)_\alpha$  est une base de  $V^*$ .  $\square$