Exercice 1. Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie de dimension finie, avec K de caractéristique 0.

i. Soit $\partial \in \mathrm{End}_K(\mathfrak{g})$ une dérivation de $\mathfrak{g}$, qui est *nilpotente* en tant qu'endomorphisme. Montrer que $\exp(\partial) : X \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!}\partial^k(X)$ définit un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

ii. Soit $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ engendré par les $\exp(\mathrm{ad}_X)$ avec ad_X nilpotent. Montrer qu'il est distingué.

Exercice 2. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension 2 qui n'est pas abélienne. Montrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à la sous-algèbres de $\mathfrak{sl}_2$ formée des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension 3, et $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ son idéal dérivé.

0. Montrer que pour tout $X \in D\mathfrak{g}$, on a $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$.

i. Si $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, montrer que $\mathfrak{g}$ est simple (on pourra utiliser le fait que pour $\dim(\mathfrak{h}) \leqslant 2$ on a $D\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$). En déduire qu'il existe un élément $X \in \mathfrak{g}$ dont les valeurs propres de ad_X ne sont pas toutes nulles, puis montrer que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2$.

ii. Supposons maintenant $D\mathfrak{g}$ de dimension 2.

(a) Soit $\{X, Y\}$ une base de de $D\mathfrak{g}$. Posons $[X, Y] = uX + vY$. Montrer que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = v$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_Y) = -u$. En déduire que $D\mathfrak{g}$ est abélienne.

(b) Soit maintenant $Z \in \mathfrak{g} \setminus D\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathrm{ad}_Z(D\mathfrak{g}) = D\mathfrak{g}$ et en déduire que les valeurs propres λ_1, λ_2 de $\mathrm{ad}_{Z|D\mathfrak{g}}$ sont non nulles.

(c) Supposons que ad_Z est diagonalisable. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_a$ de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ engendrée par les matrices $X := E_{13}$, $Y := E_{23}$ et $Z := E_{11} + aE_{22}$.

(d) Supposons que ad_Z n'est pas diagonalisable. Montrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ engendrée par les matrices $X := E_{13}$, $Y := E_{23}$ et $Z := E_{11} + E_{22} + E_{12}$.

iii. Supposons maintenant $D\mathfrak{g}$ de dimension 1.

(a) Montrer que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

(b) Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}$, montrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{b}_3^{\mathrm{nilp}}$.

(c) Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap D\mathfrak{g} = 0$, montrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{b}_2$.

Exercice 4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre propre. Montrer que le normalisateur $N(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g},\ [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ contient strictement $\mathfrak{h}$.