Exercice 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple.

i. Montrer qu'il y a une seule forme bilinéaire invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$, à un facteur près.

ii. Montrer que la représentation $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ est isomorphe à sa contragrédiente.

Exercice 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est semi-simple. Montrer que $\mathfrak{g}$ est réductive.

Exercice 3. Soit $\Phi \subset V$ un système de racines irréductibles de groupe de Weyl W, et $\langle ., . \rangle$ un produit scalaire W-invariant sur V.

i. Montrer que les longueurs $\|\alpha\|$ des racines prennent au plus 2 valeurs. Quel peut être le rapport entre ces deux longueurs ?

ii. Soit Δ une base de Φ. Montrer que si deux racines simples sont reliées par une seule arête dans le diagramme de Dynkin Φ, alors elles sont conjuguées sous W.

iii. Montrer que W agit transitivement sur les racines de longueur donnée.

Exercice 4. Calculer le groupe de Weyl du groupe G_2.

Exercice 5. Soit $\mathfrak{g}$ simple, $\mathfrak{h}$ sous-algèbre de Cartan, $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ le système de racines associé et Δ une base de Φ. Notons $\mathfrak{n}_+ := \sum_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha$.

i. Montrer que $\mathfrak{n}_+$ est nilpotente et que $\mathfrak{b} := \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$ est résoluble.

ii. Montrer que $N(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

Exercice 6. Soit $(\Phi, V, \Phi^\vee)$ un système de racines. Notons $Q \subset V$ le sous-groupe abélien engendré par Φ et $P := \{v \in V, \alpha^\vee(v) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha^\vee \in \Phi^\vee\}$.

i. Montrer que P et Q sont des réseaux dans V (i.e. des groupes abéliens libres de rang $\dim V$), et que $P \supset Q$.

ii. Montrer que $|P/Q| = |\det C(\Phi)|$ (déterminant de la matrice de Cartan).

iii. Calculer explicitement $|P/Q|$ pour les systèmes de racines classiques.