TD Algèbre 1811

<u>k alg clos</u> V k-ev de dim n

$u \in \mathrm{End}_k(V)$

Réduction de Jordan $\rightsquigarrow$ $\exists$ base $e_1 \cdots e_n$ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{n_1}\ \overbrace{\quad}^{n_2}\ \cdots\ \overbrace{\quad}^{n_r} \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda_2 & * & \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_r & * & \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_r \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ $\quad \chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{n_i}$

λ_i distincts

$* = 0, 1$

Une <u>preuve</u>: on munit V d'une structure de $k[X]$-module

$\leftrightarrow$ $k[X] \to \mathrm{End}_k(V)$

morph de k-algèbres

$X \mapsto u$

$\dim V < \infty \Rightarrow$ $k[X]$-module de torsion

$\overset{\shortparallel}{A}$

Structure des modules de torsion sur anneau principal.

$\Rightarrow \exists!$ $M(=V) \simeq \bigoplus_{k=1}^{s} A/I_k$ $\quad I_1 \subset I_2 \cdots \subset I_s$

$\qquad\qquad (Q_1) \quad (Q_2) \qquad (Q_s)$

$Q_s \mid Q_{s-1} \cdots \mid Q_1$

$\shortparallel$

$\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_{1,i}}$

restes chinois

$Q_k = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_{k,i}}$

$\prod_{i=1} P_i$ irréd

$$V \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{h} {}^{k[X]}/_{(X-\lambda_i)^{m_{i,h}}} \right)$$

$$V \circlearrowleft u \simeq \bigoplus \longmapsto \circlearrowleft \times X$$

Regardons $\times X$ dans ${}^{k[X]}/_{(X-\lambda)^m}$

base : $1, (X-\lambda), \dots, (X-\lambda)^{m-1}$

matrice
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & X-\lambda & \cdots & (X-\lambda)^{m-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ X-\lambda \\ (X-\lambda)^2 \\ \vdots \\ (X-\lambda)^{m-1} \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & 1 \quad \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

" bloc de Jordan "

$\chi_u(X) = (X-\lambda)^n$ on calcule facilement que $(M-\lambda)^n = 0$

$(u-\lambda)^n = 0$

$V \circlearrowleft v \quad \langle v, u(v), \dots u^n(v), \dots \rangle$

$(=$ ss/ $k[X]$-module engendré par $v)$

Si k pas algébriquement clos :

On se ramène : $V \circlearrowleft u \simeq {}^{k[X]}/_{P^m} \circlearrowleft \times X$

où P irréductible $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$

ex : $m=1$ matrice de $\times X$ dans $1, X, \dots, X^{d-1}$ de V

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & X \cdots & X^{d-1} \end{array} \\ 1 & \begin{bmatrix} & & -a_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \\ \\ x^{d-1} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & \vdots \\ & 1 & & \\ & & \ddots & -a_{d-1} \\ & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \text{matrice compagnon de } P$$

On calcule $\chi_u(X) = P(X)$ annule u

<u>$m \geq 1$</u> <u>idem</u> matrice de $(\cdot X) = u$

= matrice compagnon de P^m

$\Rightarrow \chi_u(X) = P^m(X)$ annule u

$U = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\quad a_{ij} \in A$

"matrice universelle" de taille $n \times n$

$\to \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z}[X_{ij}])$ matrice $U_{univ} = (X_{ij})_{i,j}$

$\exists!\ \mathbb{Z}[(X_{ij})_{ij}] \xrightarrow{\varphi} A$ $\qquad \varphi(U_{univ}) = U$

$X_{ij} \longmapsto a_{ij}$ $\qquad \varphi(\chi_{U_{univ}}) = \chi_U$

$\mathbb{Z}[X_{ij}]$ intègre $\overset{\text{cas 1}}{\Rightarrow} \chi_{U_{univ}}(U_{univ}) = 0$

$\underset{\varphi}{\Rightarrow} \chi_U(U) = 0$

M de type fini n générateurs $m_1, \dots, m_n$

Pté univ. des modules libres $\Rightarrow \exists!\ A^n \overset{F}{\twoheadrightarrow} M$ morphisme de A-modules.

$e_i \mapsto m_i$

m_i générateurs $\Rightarrow$ π surjectif.

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, mapsto] & m_i \\ A^n \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\exists ! \tilde{u}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "u"] \\ A^n \arrow[r, two heads, "\pi"] & M \\ \exists f_i \arrow[r, mapsto] & u(m_i) \end{tikzcd}$$

exemple : $A = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\times(1+kn)"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$\hookrightarrow$ Une fois choisis, $\exists! \ \tilde{u} : A^n \to A^n$ tq $\tilde{u}(e_i) = f_i$

$u \circ \pi = \pi \circ \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad P(u) \circ \pi = \pi \circ P(\tilde{u})$
$\forall P \in A[X]$

$u^2 \circ \pi = u \circ \underline{u \circ \pi} = u \circ \underline{\pi \circ \tilde{u}} = \pi \circ \tilde{u} \circ \tilde{u} = \pi \circ \tilde{u}^2$
$\vdots$
$u^n \circ \pi = \pi \circ \tilde{u}^n$

En particulier, si $P = \chi_{\tilde{u}}$, on a $P(\tilde{u}) = 0$ donc
$P(u) \circ \pi = 0$
$\overset{?}{\Rightarrow} P(u) = 0$ car π surjective

---

b, b' entiers sur A $\rightsquigarrow$ $A[b, b'] =$ A-mod de t.f.
(engendré $b^i b'^j$ $\ i \leq \deg f_b$, $j \leq \deg f_{b'}$)

t.f $A[b+b']$
$A[bb']$ $\subset \underbrace{A[b,b']}_{}$ t.f
t.f.

$A = \mathbb{Z}$ ou A noethérien

Si A pas noethérien $\overbrace{x(b+b')}^{u} \supset \boxed{A[b,b']}$ `` M type fini Ψ_1

$\Rightarrow \exists P \in A[X]$ unitaire
tq $P(x(b+b')) = 0$

$\Rightarrow f(b+b')\cdot 1 = 0 \Rightarrow f(b+b') = 0$

$V \circlearrowleft u \qquad \chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} \qquad \sum m_i = 1$

pol minimal $\quad f_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{r_i} \qquad r_i \leq 1$

On se ramène à $r=1 \rightsquigarrow \chi_u = (X-\lambda)^n \quad f_u = (X-\lambda)^r$

$u \leftrightarrow u-\lambda \rightsquigarrow$ ops $\lambda = 0$

$\Rightarrow u$ nilpotent $\quad \chi_u = X^n \quad f_u = X^r$

unitp $n = \dim \quad r =$ ordre de nilpotence

$$\begin{bmatrix} J_{n_1} & & & \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l} \end{bmatrix} \qquad J_m := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ordre de nilpotence} = m$$

$n_1 \geq n_2 \cdots \geq n_l \qquad n_1 + n_2 \cdots + n_l = n$

ordre de nilpotence $r \iff n_1 = r$

cl. de similitudes de matrices nilpotentes d'ordre $= r$

$\|$

{ "partitions" de $n-r$ avec parts $\leq r$ } $= P(n-r)$

$n-r = \sum_{i=1}^{k} p_i \quad r \geq p_1 \geq p_2 \cdots \geq \cdots$

$p_1 = n_2, \quad p_2 = n_3$

$P(n)$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B\otimes B \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\Delta} \\ B\otimes B & \xrightarrow[\Delta\otimes id]{} & B\otimes B\otimes B \end{array}$$

Δ "coassociatif" si le diagramme commute

(?) $\Leftarrow$

$\forall R$, $G(R)$ monoïde associatif $\quad \in B\otimes B$

$\Delta(b_2) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \otimes \gamma_i$

$$\varphi_1 \cdot \left[(\varphi_2 \cdot \varphi_3)\circ\Delta\right] : B\otimes_A B \longrightarrow R$$

$$b_1\otimes b_2 \longmapsto \varphi_1(b_1)\left[(\varphi_2\cdot\varphi_3)\circ\Delta\right](b_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(b_1)\cdot\varphi_2(\beta_i)\,\varphi_3(\gamma_i)$$

$$= (\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3)\Big(\underbrace{\sum_i b_1\otimes\beta_i\otimes\gamma_i}_{B\otimes B\otimes B}\Big)$$

$$\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3 \quad \| $$

$$(id\otimes\Delta)(b_1\otimes b_2) = b_1\otimes\Delta(b_2)$$

Exemple $\quad B = A[X] \qquad G(R) \stackrel{?}{=} \mathrm{Hom}_{A\text{-}alg}(A[X], R)$

$$= R$$

$$\Delta : A[X] \longrightarrow A[X]\otimes_A A[X] \underset{\Delta\otimes id}{\overset{id\otimes\Delta}{\rightrightarrows}} A[X]\otimes A[X]\otimes A[X]$$

$$X \longmapsto X\otimes 1 + 1\otimes X$$

$$\longrightarrow X\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes(X\otimes 1 + 1\otimes X)$$

coassociatif :

$$\longrightarrow (X\otimes 1 + 1\otimes X)\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X$$

$$= X\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes X\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes X$$

Soit $\varphi_1, \varphi_2 : A[X] \longrightarrow R \quad \leftrightarrow \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in R$

$$\varphi_1 * \varphi_2 = (\varphi_1 \cdot \varphi_2) \circ \Delta \quad \leftrightarrow \quad \varphi_1 * \varphi_2(x) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 (x \otimes 1 + 1 \otimes x)$$
$$= \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$(G(R), *) = (R, +)$$

Exemple. $A[X, X^{-1}]$ $\qquad G(R) = \mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(A[X,X^{-1}], R)$
$$= R^\times$$

$$\Delta : A[X,X^{-1}] \longrightarrow A[X,X^{-1}] \otimes A[X,X^{-1}]$$
$$X \longmapsto X \otimes X$$

Conséquence

$\varphi_1, \varphi_2 : A[X,X^{-1}] \longrightarrow R \quad \leftrightarrow \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in R^\times$

$$\varphi_1 * \varphi_2 \longleftrightarrow \varphi_1 * \varphi_2(x)$$
$$\overset{\shortparallel}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 (x \otimes x)} = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

$$(G(R), *) \simeq (R^\times, \cdot)$$