TD n°1.

1 Anneaux et algèbres

Exercice 1. Montrer qu'il n'y a pas de morphisme d'anneaux :

a) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$,
b) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$,
c) de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$,
d) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, pour tout $n > 0$.

Exercice 2. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. Montrer que dans ce cas il existe un unique morphisme d'anneau.

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

Exercice 4. Soit k un corps. Montrer qu'une k-algèbre commutative de dimension finie *intègre* est un corps.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On dit que α est un *nombre algébrique* (sous-entendu "sur $\mathbb{Q}$") s'il existe un polynôme non nul $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

a) Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
   i) α est algébrique sur $\mathbb{Q}$,
   ii) les puissances de α sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{Q}$,
   iii) la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[\alpha]$ engendrée par α est de dimension finie,
   iv) la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[\alpha]$ engendrée par α est un corps.
b) Montrer que si α, β sont algébriques, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques, et en déduire que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres complexes algébriques est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Concrètement, comment chercheriez-vous un polynôme annulateur de $\alpha+\beta$, connaissant des polynômes annulateurs f_α et f_β de α et β respectivement ?

Exercice 6. Identifions $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un complexe z est "constructible" si le point sous-jacent de $\mathbb{R}^2$ est "constructible à la règle et au compas" à partir des seuls points 0 de coordonnées $(0, 0)$ et 1 de coordonnées $(1, 0)$. Montrer que l'ensemble des complexes constructibles est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif unitaire.

a) A-t-on toujours $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ pour $f, g \in A[X]$?
b) Montrer que si A est intègre alors $A[X]$ l'est aussi.
c) Montrer que si $f \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire se factorise en $f = gh$ avec $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires, alors $g, h \in \mathbb{Z}[X]$.
d) Montrer que si $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ avec $g \neq 0$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Q}[X]^2$ tel que $f = qg + r$ et $\deg(r) < \deg(g)$. Cette propriété est-elle encore vraie dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 8. Soit $\mathcal{N}$ un monoïde commutatif et $\mathbb{Q}[\mathcal{N}]$ la $\mathbb{Q}$-algèbre associée. On rappelle que $\mathbb{Q}[\mathcal{N}]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base $(e_\nu)_{\nu\in\mathcal{N}}$ dont le produit est déterminé par les égalités $e_\nu e_{\nu'} = e_{\nu+\nu'}$ pour tous $\nu, \nu' \in \mathcal{N}$.

a) Si $\mathcal{N} = \mathbb{N}^n$, rappeler pourquoi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg}}(\mathbb{Q}[\mathcal{N}], A) \simeq A^n$ pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre A et montrer que $\mathbb{Q}[\mathcal{N}] \simeq \mathbb{Q}[X_1, \cdots, X_n]$.
b) Si $\mathcal{N} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg}}(\mathbb{Q}[\mathcal{N}], A) \simeq \mu_n(A) := \{\zeta \in A,\ \zeta^n = 1\}$, puis montrer qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[\mathcal{N}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$ qui envoie l'élément $e_{\overline{1}}$ de la base canonique de $\mathbb{Q}[\mathcal{N}]$ sur $\overline{X}$.

Exercice 9. Soit A un anneau, montrer que l'ensemble R des éléments réguliers de A (c'est-à-dire non diviseurs de 0 dans A) est une partie multiplicative, c'est-à-dire : $1 \in R$ et si r et s sont des éléments de R alors $rs \in R$.

Exercice 10. Polynômes vs fonctions polynomiales. Soit k un corps. Pour tout entier n on peut associer à un polynôme $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ une fonction $k^n \longrightarrow k$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$.

a) Vérifier qu'on obtient ainsi un morphisme de k-algèbres de $k[X_1, \cdots, X_n]$ dans la k-algèbre des fonctions de k^n dans k.
b) Montrer que ce morphisme est injectif si et seulement si k est infini.

2 Idéaux

Exercice 11. Pour un sous-ensemble $V \subset \mathbb{C}^n$, on note $I_V := \{f \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n], \forall z \in V, f(z) = 0\}$ l'ensemble des polynômes qui s'annulent sur V.

a) Montrer que I_V est un idéal radiciel.

b) Si V est un singleton, montrer que I_V est un idéal maximal.

c) Décrire $I_{\{0\}}$ et en donner des générateurs.

Exercice 12. Pour une famille $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ de polynômes à n indéterminées, on note $V_{f_1,\cdots,f_m} := \{z \in \mathbb{C}^n, \forall i = 1, \cdots, m, f_i(z) = 0\}$ le lieu d'annulation de ces polynômes dans $\mathbb{C}^n$.

a) Montrer que $V_{f_1,\cdots,f_m}$ ne dépend que de l'idéal $(f_1, \cdots, f_m)$ engendré par les f_i.

Plus généralement, pour un idéal I de $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$, on pose $V_I := \{z \in \mathbb{C}^n, \forall f \in I, f(z) = 0\}$. Montrer que :

b) l'application $\varphi \mapsto (\varphi(X_1), \cdots, \varphi(X_n))$ induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/I, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} V_I.$$

c) $I \subset J \Rightarrow V_I \supset V_J$, puis $V_{I+J} = V_I \cap V_J$ et $V_{IJ} = V_{I\cap J} = V_I \cup V_J$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{Z}$, que sont $I \cdot J$, $I \cap J$ et $I + J$ lorsque $I = n\mathbb{Z}$ et $J = m\mathbb{Z}$?

Exercice 14. Soient A un anneau et I, J et L des idéaux de A. Montrer les assertions suivantes :

a) $I \cdot J \subset I \cap J$, et $I + J = A \Rightarrow I \cdot J = I \cap J$.

b) Si A est principal, $I \cdot J = I \cap J \Rightarrow I + J = A$. Donner un contre-exemple en général.

c) $(I \cdot J) + (I \cdot L) = I \cdot (J + L)$,

d) $(I \cap J) + (I \cap L) \subset I \cap (J + L)$, avec égalité si A est principal

e) si J est contenu dans I, alors $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$,

f) supposons que $A = k[X, Y]$ avec k un corps et posons $I = (X)$, $J = (Y)$ et $L = (X + Y)$. Calculer $(I \cap J) + (I \cap L)$ et $I \cap (J + L)$, puis les comparer.

Exercice 15. Montrer qu'un anneau intègre A possédant un nombre fini d'idéaux est un corps.
Indice : prendre $x \in A$ et considérer les idéaux (x^n).

Exercice 16. Dans un anneau fini, tous les éléments réguliers sont inversibles.

Exercice 17. Soit $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY - 1)$; on pose x l'image de X dans A.

a) Montrer que x est inversible et que tout élément a non nul de A peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = x^m P(x)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et P est un polynôme de terme constant non nul. On note $e(a) = \deg(P)$.

b) Soient $a, b \in A$ montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $a = bq + r$ et : $r = 0$ ou $e(r) < e(b)$.

c) En déduire que A est principal.

Exercice 18. Soit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ un produit d'anneaux et soit I un idéal de A.

a) Montrer que I est égal à un produit d'idéaux $I_1 \times \cdots \times I_n$.

b) Déterminer les idéaux premiers et maximaux de A.

c) Supposons que les A_i soient des corps, montrer que l'anneau A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 19. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A. On suppose que $I + J = A$ (deux tels idéaux sont dits comaximaux), montrer que $I^n + J^n = A$.

Exercice 20. Si I, J sont deux idéaux de A, on note $(I : J) := \{a \in A, aJ \subset I\}$ (c'est un idéal de A). Soit I et J deux idéaux comaximaux de A (c'est-à-dire $I + J = A$). Montrer que $(I : J) = I$. Soit L un idéal tel que $I \cdot L \subset J$; montrer que $L \subset J$.

Exercice 21. Étant donné I un idéal d'un anneau A, on note $\sqrt{I} = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$ (vérifier que $\sqrt{I}$ est bien un idéal). Soient I, J et L des idéaux de A, montrer les assertions suivantes :

a) si $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$,

b) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J}$,

c) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$,

d) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$,

e) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$,

f) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$,

g) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$,

h) $\sqrt{(I \cap J) + (I \cap L)} = \sqrt{I \cap (J + L)}$,

i) soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des idéaux premiers de A, supposons que

$$I \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \sqrt{I},$$

montrer que

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Exercice 22. Montrer que $A = k[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ est intègre et s'identifie à un sous-anneau de $k[T]$.