TD n°2.

1 Idéaux premiers et maximaux

Exercice 1. Montrer qu'un élément x de A appartient à tous les idéaux maximaux de A si et seulement si pour tout $a \in A$, $1 - ax$ est inversible (l'intersection de tous les idéaux maximaux de$A$ est appelé le radical de Jacobson de A).

Exercice 2. Soit A un anneau et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$.

a) Montrer que P est nilpotent si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i est nilpotent.

b) Soit x un élément nilpotent de A. Montrer que $1 + x$ est inversible.

c) Montrer que P est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a_0 est inversible et pour tout $i \geqslant 1$, a_i est nilpotent.
Indice : si $Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ est un inverse de P, on pourra commencer par montrer que que pour tout $r \geqslant 0$, $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$.

d) Montrer que P est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux si et seulement si P est nilpotent (c'est-à-dire, dans $A[X]$, le radical de Jacobson est égal au nilradical).

Exercice 3. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
(I) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier est encore un idéal premier.
(II) Est-ce encore vrai pour les idéaux maximaux ? Et si f est surjectif ?

Exercice 4. Soit A un anneau et I un idéal et soit $\pi : A \to A/I$. Montrer que :
(I) les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I,
(II) cette bijection induit une bijection sur les idéaux premiers et les idéaux maximaux.

Exercice 5. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau A, et soient $(I_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des idéaux de A. Supposons que

$$\mathfrak{p} \supset \prod_{i=1}^{n} I_i,$$

montrer que $\mathfrak{p}$ contient l'un des idéaux I_i.

Exercice 6. Soient $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des idéaux premiers d'un anneau A, et soit I un idéal de A tel que

$$I \subset \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i.$$

Montrer que I est contenu dans l'un des $\mathfrak{p}_i$.

Exercice 7. Soit A un anneau et nil(A) l'ensemble des éléments nilpotents de A.
(I) Montrer que nil(A) est un idéal.
(II) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors nil(A) $\subset \mathfrak{p}$.
(III) Soit $s \notin$ nil(A) et $S = \{1, s, \cdots, s^n, \cdots\}$. Montrer que l'ensemble des idéaux de A disjoints de S contient un élément maximal $\mathfrak{p}$ (utiliser le lemme de Zorn). Montrer que $\mathfrak{p}$ est premier. En déduire que

$$\mathrm{nil(A)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ idéal premier}} \mathfrak{p}.$$

Exercice 8. Montrer que dans un anneau principal A, les idéaux premiers non nuls sont maximaux.

Exercice 9. Soit k un corps et $A = k[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$.
(I) Déterminer les éléments inversibles de A.
(II) Déterminer tous les idéaux principaux de A.
(III) Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 10. Soit A un anneau noethérien. On veut montrer qu'il possède un nombre fini d'idéaux premiers *minimaux.* Pour cela, pour tout idéal I, on note $\mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I}$ l'ensemble des idéaux premiers contenant I, et $\mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I,\min}$ le sous-ensemble des éléments minimaux de $\mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I}$ pour l'inclusion.

a) Si $f, g \in A \setminus I$ sont tels que $fg \in I$, montrer que $\mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I,\min} \subset \mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I+(f),\min} \cup \mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I+(g),\min}$.

b) Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des idéaux I de A tels que $\mathrm{Spec}(A)_{\geqslant I,\min}$ n'est *pas fini.* Supposons $\mathcal{I}$ non vide.

i) Montrer qu'il possède un élément maximal I_0 pour l'inclusion.

ii) Montrer que I_0 n'est pas premier, puis utiliser a) pour aboutir à une contradiction.

Exercice 11. Un anneau (commutatif) A est dit *artinien* s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :
(1) Toute suite d'idéaux décroissante pour l'inclusion est stationnaire à partir d'un certain rang
(2) Tout ensemble non vide d'idéaux possède un élément minimal pour l'inclusion.

a) Montrer l'équivalence des deux conditions.

b) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est artinien, puis qu'une algèbre de type fini sur un corps est artinienne.

c) Montrer que dans A artinien, tout idéal premier est maximal.

d) Montrer que dans A artinien, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers.

e) Montrer que si A est artinien et réduit, alors c'est un produit fini de corps.

f) Montrer que si A est artinien, il est aussi noethérien.

Exercice 12. Un anneau est dit local s'il contient un unique idéal maximal.

a) Montrer qu'un anneau A est local si et seulement si $A \backslash A^{\times}$ est un idéal.

b) À quelle condition sur n l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est il local ?

c) Soient A un anneau local, I, J deux idéaux de A et $a \in A$ un élément non diviseur de 0 tels que $IJ = (a)$. Montrer qu'il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $a = xy$. En déduire que $I = (x)$ et $J = (y)$.