TD n°3.

1 Anneaux noethériens

Exercice 1. Soit A un anneau. Si $A[X]$ est noethérien, A est-il nécessairement noethérien ? Si $A[X]$ est principal, que peut-on dire de A ?

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif.

a) Pour $a \in A$ et I un idéal de A, montrer que si les idéaux $I + (a)$ et $(I : a) = \{x \in A,\, ax \in I\}$ sont de type fini, alors I l'est.

b) Montrer que A est noethérien si et seulement si tous ses idéaux premiers sont de type fini.
Indication : Considérer un idéal maximal parmi ceux qui ne sont pas de type fini.

Exercice 3. Soit A un anneau local dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est principal, engendré par a.

a) Montrer que $u \in A$ est inversible si et seulement si $u \notin \mathfrak{m}$.

b) Supposons que $\displaystyle\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.

   i) Montrer que tout $x \in A$ *non nul* s'écrit sous la forme $x = ua^n$ où $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$, et que cette écriture est unique si A est intègre.

   ii) Montrer que tout idéal I est de la forme (a^n). En conclure que A est noethérien, et même principal s'il est intègre.

   iii) Montrer que l'anneau de séries formelles $\mathbb{Q}[[X]] := \{f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\}$ est principal.

c) Supposons maintenant A noethérien

   i) Montrer que si I est un idéal tel que $\mathfrak{m}.I = I$, alors $I = 0$. On pourra raisonner par l'absurde sur un ensemble minimal $x_1, \cdots, x_n$ de générateurs de I et écrire que $x_n \in \mathfrak{m}.I$ pour aboutir à une contradiction.

   ii) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n>0} \mathfrak{m}^n = 0$.

Exercice 4. Soit $f : A \to A$ un morphisme d'anneaux.

a) On suppose A noethérien, montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$. En déduire que l'application
$$f : \mathrm{Im}(f^n) \to \mathrm{Im}(f^{n+1})$$
est injective.

b) Montrer que si f est surjective et A noethérien, alors elle est bijective.

c) Montrer qu'on ne peut remplacer dans la question précédente l'hypothèse « surjective » par « injective ».

d) Montrer que l'on ne peut se passer de l'hypothèse noethérien (considérer par exemple $A = k[X_1, \cdots, X_n, \cdots]$ un anneau de polynômes à une infinité de variables et f convenable).

2 Entiers algébriques

Exercice 5. On dit qu'un complexe $z \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique s'il existe $f \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $f(z) = 0$.

a) Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est entier algébrique si et seulement si le sous-anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ engendré par α est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ un nombre algébrique et $f_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ son polynôme minimal (i.e. le générateur unitaire de l'idéal annulateur de α dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$). Montrer que α est entier algébrique si et seulement si $f_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$.

c) Montrer que les entiers algébriques forment un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Montrer qu'un rationnel $z \in \mathbb{Q}$ est entier algébrique si et seulement si il est entier.

Exercice 7. (Corps quadratiques)

a) Soit $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ sans facteur carré et $\sqrt{D}$ une racine carrée de D dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$.

b) Soit F un sous-corps de $\mathbb{C}$ de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe D comme au (a) tel que $F = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.

c) Soit $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$. Montrer que

$$\mathcal{O}_D = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{D}] & \text{si } D \equiv 2, 3[4] \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}] & \text{si } D \equiv 1[4] \end{cases}$$

3 Anneaux euclidiens, principaux, factoriels

Exercice 8. Montrer que le polynôme $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est irréductible pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{R}[X_1, \cdots, X_n]$ et pour $n \geqslant 3$ dans $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$.

Exercice 9. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ un élément de $\mathbb{Z}[X]$. Et soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une racine de P (avec $p \wedge q = 1$).

a) Montrer que $qX - p$ divise P dans $\mathbb{Z}[X]$.

b) En déduire que $p|a_0$, $q|a_n$, $(p - q)|P(1)$ et $(p + q)|P(-1)$.

c) Trouver les racines rationnelles de $A(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ et $B(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$.

Exercice 10. a) Trouver un pgcd de $X^6 - 1$ et de $X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, par factorisation et par l'algorithme d'Euclide.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}[X]^2$, l'équation $P(X)(X^6 - 1) + Q(X)(X^4 - 1) = X^3 + 2X^2 - X - 2$.

c) Résoudre la même équation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11. Soit p un nombre premier.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1)$.

b) En déduire que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$.

Exercice 12. Factorisations et congruences

a) Soit $P(X) = X^4 + 1$. Décomposer P dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ en produits de facteurs irréductibles.

b) Montrer que -1 ou 2 ou -2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ pour tout p.

c) Montrer que X^4+1 est factorisable dans $\mathbb{F}_p$ pour tout p (on utilisera les égalités $X^4+1 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2 - 1)^2 + 2X^2 = (X^2)^2 - (-1)$).

Exercice 13. Montrer que $P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si les a_i sont des entiers distincts.

Exercice 14. a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ sont euclidiens avec stathme $z \mapsto |z|^2$.

b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ n'est pas principal, mais que $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ est euclidien.

Exercice 15. a) Soit R un anneau euclidien. Montrer qu'il existe $x \in R$ non inversible tel que $R^* \cup \{0\} \to R/(x)$ soit surjective.

b) Soit $A = \mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$. Déterminer A^* et montrer que A n'est pas euclidien.

c) Soit $x \in \mathbb{C}$. On veut montrer qu'il existe $q \in A$ tel que $|x - q| < 1$ ou $|2x - q| < 1$. On pose $x = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{R}$.

i) Se ramener au cas où $v \in [0, \sqrt{19}/4]$.

ii) Montrer que si $v \in [0, \sqrt{3}/2[$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - q| < 1$.

iii) Montrer que si $v \in [\sqrt{3}/2, \sqrt{19}/4]$, $\sqrt{19}/2 - 2v \in [0, \sqrt{3}/2[$ et en déduire $q \in A$ tel que $|2x - q| < 1$.

d) Soient $a, b \in A \backslash 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et qui vérifient, soit $a = bq + r$, soit $2a = bq + r$.

e) Montrer que (2) est un idéal maximal de A (on pourra soit écrire la table de multiplication de $A/(2)$, soit vérifier que $X^2 + X + 5$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}/(2)[X]$).

f) Soit I un idéal de A et $b \in I - \{0\}$ minimisant $|b|$. Montrer que $2I \subset (b) \subset I$.

g) Montrer que A est principal.