TD n°4.

1 Localisation

Exercice 1. Soit $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ un élément irréductible. On note $C_f \subset \mathbb{C}^2$ la "courbe algébrique" définie par $C_f := \{P = (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ f(x,y) = 0\}$.

a) Montrer que l'une (au moins) des deux projections $C_f \longrightarrow \mathbb{C}$ est "presque surjective", au sens où son image est complémentaire d'un ensemble vide ou fini. En déduire que C_f est un ensemble infini.

On dit qu'une fonction $C_f \longrightarrow \mathbb{C}$ est polynômiale sur C_f si elle est de la forme $P = (x,y) \mapsto g(x,y)$ pour un polynôme $g \in \mathbb{C}[X,Y]$. On note $\mathcal{O}(C_f)$ l'ensemble des fonctions polynômiales sur C_f.

b) Montrer que $\mathcal{O}(C_f)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et qu'il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$ev : \mathbb{C}[X,Y]/(f) \longrightarrow \mathcal{O}(C_f)$$

qui envoie $\bar{X}$, resp. $\bar{Y}$, sur la fonction "première coordonnée", resp "seconde coordonnée" sur C_f. Montrer aussi que ce morphisme est *surjectif.*

Nous allons montrer que le morphisme ev est aussi *injectif.*

c) Soit $g \in \mathbb{C}[X,Y] \setminus (f)$.
   i) Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}[X,Y]$ tels que $uf + vg \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.
   ii) Montrer que $\mathbb{C}[X,Y]/(f,g)$ est de dimension finie (sur $\mathbb{C}$).

d) Montrer que l'un des deux morphismes $\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathcal{O}(C_f)$ ou $\mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathcal{O}(C_f)$ est injectif. En déduire que $\mathcal{O}(C_f)$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{C}$, puis que ev est injective.

On note maintenant $\mathcal{M}(C_f) := \mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_f))$ le corps des fractions de $\mathcal{O}(C_f)$.

e) Montrer que si $g \in \mathcal{O}(C_f) \setminus \{0\}$, alors le lieu d'annulation de g dans C_f est un ensemble fini. En déduire que tout élément de $\mathcal{M}(C_f)$ définit une fonction sur le complémentaire d'un ensemble fini dans C_f. Ces fonctions sont appelées "fonctions rationnelles" sur C_f.

f) Soit $P \in C_f$. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}(C_f)$ des fonctions polynomiales sur C_f s'annulant en P est un idéal maximal de $\mathcal{O}(C_f)$ et que le localisé $\mathcal{O}(C_f)_{\mathfrak{m}_P}$ s'identifie à la sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathcal{M}(\mathcal{O}_f)$ formée des fonctions rationnelles définies en P.

Un cas particulier de Nullstellensatz :

g) Montrer que tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}(C_f)$ est de la forme $\mathfrak{m}_P$ pour un $P \in C_f$.

Exercice 2. On maintient les notations de l'exercice précédent, et on suppose de plus que le point $O = (0,0) \in C_f$. On note $\mathfrak{m}_O$ l'idéal maximal (X,Y) de $\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathfrak{m}_{O,f}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}(C_f)$ formé des fonctions s'annulant en O. On a donc $f \in \mathfrak{m}_O$, et $ev(\mathfrak{m}_O) = \mathfrak{m}_O/(f) = \mathfrak{m}_{O,f}$.

a) Montrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2) = 2$, et que $f = \frac{\partial f}{\partial X}(0,0)X + \frac{\partial f}{\partial Y}(0,0)Y \mod \mathfrak{m}_O^2$.

On dit que O est un point *régulier* (ou *lisse*) de C_f si $(\frac{\partial f}{\partial X}(0,0), \frac{\partial f}{\partial Y}(0,0)) \neq (0,0)$.

b) Montrer que $\mathfrak{m}_O/(\mathfrak{m}_O^2 + (f)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2$. En déduire que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2) = 1$ ou 2 selon que O est régulier ou non.

c) Soit A un anneau local intègre noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $k := A/\mathfrak{m}$. Montrer que si $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ alors A est principal. Indication : on pourra prendre $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathfrak{m} = (f) + \mathfrak{m}^n$, puis utiliser l'exercice 3 du TD3 pour conclure.

On pose $A := \mathcal{O}(C_f)_O$, l'anneau local de C_f en O, i.e. le localisé en la partie multiplicative $\mathcal{O}(C_f) \setminus \mathfrak{m}_{O,f}$. On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{O,f}A$ son idéal maximal.

d) Montrer que A s'identifie au quotient du localisé $\mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}$ de $\mathbb{C}[X,Y]$ en l'idéal maximal (X,Y) par l'idéal engendré par f.

e) Montrer que A est principal si et seulement si O est régulier.

On s'intéresse au cas particulier $f = X^2 - Y^3$. Le point O n'est donc pas régulier.

f) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a l'égalité $(aX+Y)(aX-Y) = Y^2(a^2Y-1)$ dans $\mathcal{O}(C_f)$, et que (a^2Y-1) est inversible dans A.

g) Montrer que les éléments $aX-Y$, $a \in \mathbb{C}$, sont irréductibles et 2 à 2 non associés dans A (indication : on pourra étudier leurs images dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$). En déduire que l'élément Y^2 de A possède une infinité de diviseurs irréductibles non associés, bien qu'il soit noethérien.

Exercice 3. Soit A un anneau. Montrer que le morphisme $A \to \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$ qui envoie a sur $(a/1)$ est injectif.

Exercice 4. Montrer qu'un anneau A est réduit (c'est-à-dire $\sqrt{0}=0$) si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Exercice 5. a) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ (contenant $\mathbb{Z}$). Soit $S = \mathbb{Z} \cap A^{\times}$. Montrer que $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.

b) Généraliser en remplaçant $\mathbb{Z}$ par un anneau principal.

c) Trouver un sous-anneau de $\mathbb{C}(X,Y)$ contenant $\mathbb{C}[X,Y]$ qui ne soit pas, en tant que $\mathbb{C}[X,Y]$-algèbre, un localisé de $\mathbb{C}[X,Y]$.

Exercice 6. Soit A un anneau et $f \in A$ un élément qui n'est pas nilpotent. Montrer que le noyau de l'unique morphisme de A-algèbres $A \to A[f^{-1}]$ est $\{g \in A : \exists n \in \mathbb{N}, f^n g = 0\}$.
On suppose dorénavant $A = \mathbb{C}[X,Y]/(XY)$.

a) Pour $f = X$, montrer que $A[f^{-1}] = \mathbb{C}[X,X^{-1}]$.

b) Pour $g = X+Y$, montrer que $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X,X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y,Y^{-1}]$ (on pourra remarquer que $(\frac{X}{1})+(\frac{Y}{1}) = (1)$ dans $A[g^{-1}]$).

c) Montrer que $Q(A) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$.

Soit $B = \mathbb{Z}[2,X]/(2X)$. Montrer que $Q(B) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{F}_2(X)$.