

## TD n°4.

### 1 Localisation

**Exercice 1.** Soit  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  un élément irréductible. On note  $C_f \subset \mathbb{C}^2$  la “courbe algébrique” définie par  $C_f := \{P = (x, y) \in \mathbb{C}^2, f(x, y) = 0\}$ .

- a) Montrer que l’une (au moins) des deux projections  $C_f \rightarrow \mathbb{C}$  est “presque surjective”, au sens où son image est complémentaire d’un ensemble vide ou fini. En déduire que  $C_f$  est un ensemble infini.

On dit qu’une fonction  $C_f \rightarrow \mathbb{C}$  est polynômiale sur  $C_f$  si elle est de la forme  $P = (x, y) \mapsto g(x, y)$  pour un polynôme  $g \in \mathbb{C}[X, Y]$ . On note  $\mathcal{O}(C_f)$  l’ensemble des fonctions polynômiales sur  $C_f$ .

- b) Montrer que  $\mathcal{O}(C_f)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre et qu’il existe un unique morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres

$$ev : \mathbb{C}[X, Y]/(f) \rightarrow \mathcal{O}(C_f)$$

qui envoie  $\bar{X}$ , resp.  $\bar{Y}$ , sur la fonction “première coordonnée”, resp “seconde coordonnée” sur  $C_f$ . Montrer aussi que ce morphisme est *surjectif*.

Nous allons montrer que le morphisme  $ev$  est aussi *injectif*.

- c) Soit  $g \in \mathbb{C}[X, Y] \setminus (f)$ .
- i) Montrer qu’il existe  $u, v \in \mathbb{C}[X, Y]$  tels que  $uf + vg \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ .
  - ii) Montrer que  $\mathbb{C}[X, Y]/(f, g)$  est de dimension finie (sur  $\mathbb{C}$ ).
- d) Montrer que l’un des deux morphismes  $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{O}(C_f)$  ou  $\mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathcal{O}(C_f)$  est injectif. En déduire que  $\mathcal{O}(C_f)$  n’est pas de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ , puis que  $ev$  est injective.

On note maintenant  $\mathcal{M}(C_f) := \text{Frac}(\mathcal{O}(C_f))$  le corps des fractions de  $\mathcal{O}(C_f)$ .

- e) Montrer que si  $g \in \mathcal{O}(C_f) \setminus \{0\}$ , alors le lieu d’annulation de  $g$  dans  $C_f$  est un ensemble fini. En déduire que tout élément de  $\mathcal{M}(C_f)$  définit une fonction sur le complémentaire d’un ensemble fini dans  $C_f$ . Ces fonctions sont appelées “fonctions rationnelles” sur  $C_f$ .
- f) Soit  $P \in C_f$ . Montrer que l’ensemble  $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}(C_f)$  des fonctions polynômiales sur  $C_f$  s’annulant en  $P$  est un idéal maximal de  $\mathcal{O}(C_f)$  et que le localisé  $\mathcal{O}(C_f)_{\mathfrak{m}_P}$  s’identifie à la sous- $\mathbb{C}$ -algèbre de  $\mathcal{M}(C_f)$  formée des fonctions rationnelles définies en  $P$ .

Un cas particulier de Nullstellensatz :

- g) Montrer que tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}(C_f)$  est de la forme  $\mathfrak{m}_P$  pour un  $P \in C_f$ .

**Solution.** a) Écrivons  $f = \sum_n f_n(X)Y^n$ . Si  $f = f_0(X) \in \mathbb{C}[X]$ , alors  $f_0$  admet une racine  $\alpha \in \mathbb{C}$  et tout point  $(\alpha, y)$  est dans  $C_f$ , i.e. la seconde projection est surjective. Supposons donc que  $f \notin \mathbb{C}[X]$ , de sorte qu’il existe  $n > 0$  tel que  $f_n \neq 0$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{C}$  qui n’est pas une racine de  $f_n$ , le polynôme  $f(x, Y) \in \mathbb{C}[Y]$  est non constant, donc possède une racine. La projection  $C_f \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par la première coordonnée est donc “presque surjective” car son image contient  $\{x \in \mathbb{C}, f_n(x) \neq 0\}$ . Dans tous les cas,  $C_f$  est donc infini.

- b) La propriété universelle des algèbres de polynômes fournit un unique morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres de  $\mathbb{C}[X, Y]$  dans la  $\mathbb{C}$ -algèbre de toutes les fonctions  $C_f \rightarrow \mathbb{C}$ , qui envoie  $X$ , resp.  $Y$ , sur la première coordonnée, resp. la seconde coordonnée. Par définition, ce morphisme envoie  $f$  sur la fonction nulle, donc se factorise par  $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$  (propriété universelle des quotients), et  $\mathcal{O}(C_f)$  est l’image de ce morphisme, donc est en particulier une  $\mathbb{C}$ -algèbre.

- c) i) Si  $f \in \mathbb{C}[X]$ , on prend  $u = 1, v = 0$ . Sinon, l’élément  $f$  reste irréductible dans l’anneau  $\mathbb{C}(X)[Y]$ , et l’élément  $g$  n’est pas dans l’idéal  $f\mathbb{C}(X)[Y]$  de cet anneau (car sinon il y aurait une égalité  $hg = fr$  avec  $h \in \mathbb{C}[X]$  et  $r \in \mathbb{C}[X, Y]$ , ce qui par factorialité de  $\mathbb{C}[X, Y]$  entraînerait  $f|h$  ou  $f|g$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ ). Donc  $f$  et  $g$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{C}(X)[Y]$  et il existe  $u', v' \in \mathbb{C}(X)[Y]$  tels que  $u'f + v'g = 1$ . En multipliant par le produit des dénominateurs de  $u'$  et  $v'$ , on obtient  $u$  et  $v$ .

- ii) D'après i), il existe  $h \in (f, g) \cap \mathbb{C}[X]$  non nul et, de même, il existe  $k \in (f, g) \cap \mathbb{C}[Y]$  non nul. Il s'ensuit que la projection  $\mathbb{C}[X, Y] \rightarrow \mathbb{C}[X, Y]/(f, g)$  se factorise par le quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/(h, k)$ . Mais celui-ci est de dimension finie, engendré par les  $X^i Y^j$ , avec  $i < \deg(h)$  et  $j < \deg(k)$ . Donc  $\mathbb{C}[X, Y]/(f, g)$  est aussi de dimension finie.
- d) Si  $f \notin \mathbb{C}[X]$ , on a vu dans a) que la première coordonnée  $C_f \rightarrow \mathbb{C}, P \mapsto x_P$  est "presque surjective". Ceci implique que le morphisme  $\mathbb{C}[X] \rightarrow \mathcal{O}(C_f)$  est injectif car, si  $h$  est dans le noyau, alors  $h(x_P) = 0$  pour tout  $P \in C_f$ . La dimension de  $\mathcal{O}(C_f)$  n'est donc pas finie dans ce cas. Si  $f \in \mathbb{C}[X]$ , c'est  $\mathbb{C}[Y]$  qui s'injecte dans  $\mathcal{O}(C_f)$ .
- Montrons maintenant l'injectivité de  $ev$ . Soit  $\bar{g} \in \text{Ker}(ev)$  et soit  $g \in \mathbb{C}[X, Y]$  d'image  $\bar{g}$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ . Par propriété universelle des quotients,  $ev$  se factorise par un morphisme  $\mathbb{C}[X, Y]/(f, g) \rightarrow \mathcal{O}(C_f)$ . Ce morphisme est surjectif, puisque  $ev$  l'est, et la cible  $\mathcal{O}(C_f)$  est de dimension infinie, donc la source  $\mathbb{C}[X, Y]/(f, g)$  est aussi de dimension infinie et, d'après c), on a  $g \in (f)$ . D'où  $\bar{g} = 0$ .
- e) Soit  $g \in \mathbb{C}[X, Y]$  une préimage de  $g$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ , et soient  $h \in \mathbb{C}[X]$  et  $k \in \mathbb{C}[Y]$  comme dans la solution de c) ii). Alors pour tout point  $P = (x, y)$  de  $C_f$  annulé par  $g$ , on a  $h(x) = 0$  et  $k(y) = 0$ . Il y a donc un nombre fini de tels points. La suite de la question est maintenant claire : on peut évaluer toute fonction rationnelle en dehors de l'ensemble fini des zéros de son dénominateur.
- f)  $\mathfrak{m}_P$  est clairement un idéal. Soit  $g \in \mathcal{O}(C_f) \setminus \mathfrak{m}_P$ . Alors  $g(P) \neq 0$  et  $g - g(P).1$  est dans  $\mathfrak{m}_P$ , donc  $1 = \frac{1}{g(P)}.g - \frac{1}{g(P)}(g - g(P).1) \in (g) + \mathfrak{m}_P$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{m}_P$  est maximal. Comme  $\mathcal{O}(C_f)$  est intègre, tous ses localisés s'identifient à des sous-anneaux de son corps des fractions  $\mathcal{M}(C_f)$ . En particulier,  $\mathcal{O}(C_f)_{\mathfrak{m}_P}$  est obtenu en inversant tous les éléments hors de  $\mathfrak{m}_P$ , i.e. toutes les fonctions polynomiales ne s'annulant pas en  $P$ . Les fonctions rationnelles ainsi obtenues sont donc exactement celles qui sont définies en  $P$ .
- g) Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathcal{O}(C_f)$ . Il contient un élément  $g$  non nul (puisque  $\mathcal{O}(C_f)$  n'est pas un corps). D'après c), le quotient  $\mathcal{O}(C_f)/\mathfrak{m}$  est de dimension finie. Or, comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $\mathbb{C}$  est la seule  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie qui soit un corps. Il s'ensuit que le morphisme canonique  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}(C_f)/\mathfrak{m}$  est un isomorphisme. Soient  $x$ , resp.  $y$ , l'image de  $X$ , resp.  $Y$  dans  $\mathcal{O}(C_f)/\mathfrak{m}$  identifié à  $\mathbb{C}$ , et soit  $P \in \mathbb{C}^2$  le point  $(x, y)$ . Notons que, puisque  $f(X, Y) = 0$  dans  $\mathcal{O}(C_f)$ , on a aussi  $f(x, y) = 0$ , donc  $P \in C_f$ . Plus généralement, pour tout polynôme  $g = \sum_{n,m} a_{n,m} X^n Y^m \in \mathbb{C}[X, Y]$ , l'image  $\bar{g}$  de  $g$  dans  $\mathbb{C} = \mathcal{O}(C_f)/\mathfrak{m}$  est  $\sum_{n,m} a_{n,m} x^n y^m = g(x, y)$ . En particulier, si  $g \in \mathfrak{m}$  on a donc  $g(x, y) = \bar{g} = 0$  dans  $\mathbb{C} = \mathcal{O}(C_f)/\mathfrak{m}$ , et donc  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_P$ . Par maximalité, on en déduit  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$ .

**Exercice 2.** On maintient les notations de l'exercice précédent, et on suppose de plus que le point  $O = (0, 0) \in C_f$ . On note  $\mathfrak{m}_O$  l'idéal maximal  $(X, Y)$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  et  $\mathfrak{m}_{O,f}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}(C_f)$  formé des fonctions s'annulant en  $O$ . On a donc  $f \in \mathfrak{m}_O$ , et  $ev(\mathfrak{m}_O) = \mathfrak{m}_O/(f) = \mathfrak{m}_{O,f}$ .

- a) Montrer que  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2) = 2$ , et que  $f = \frac{\partial f}{\partial X}(0, 0)X + \frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0)Y \pmod{\mathfrak{m}_O^2}$ .

On dit que  $O$  est un point *régulier* (ou *lisse*) de  $C_f$  si  $(\frac{\partial f}{\partial X}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0)) \neq (0, 0)$ .

- b) Montrer que  $\mathfrak{m}_O/(\mathfrak{m}_O^2 + (f)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2$ . En déduire que  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2) = 1$  ou  $2$  selon que  $O$  est régulier ou non.
- c) Soit  $A$  un anneau local intègre noethérien d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $k := A/\mathfrak{m}$ . Montrer que si  $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$  alors  $A$  est principal. Indication : on pourra prendre  $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\mathfrak{m} = (f) + \mathfrak{m}^n$ , puis utiliser l'exercice 3 du TD3 pour conclure.

On pose  $A := \mathcal{O}(C_f)_O$ , l'anneau local de  $C_f$  en  $O$ , i.e. le localisé en la partie multiplicative  $\mathcal{O}(C_f) \setminus \mathfrak{m}_{O,f}$ . On note  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{O,f}A$  son idéal maximal.

- d) Montrer que  $A$  s'identifie au quotient du localisé  $\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)}$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  en l'idéal maximal  $(X, Y)$  par l'idéal engendré par  $f$ .
- e) Montrer que  $A$  est principal si et seulement si  $O$  est régulier.

On s'intéresse au cas particulier  $f = X^2 - Y^3$ . Le point  $O$  n'est donc pas régulier.

- f) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{C}$  on a l'égalité  $(aX + Y)(aX - Y) = Y^2(a^2Y - 1)$  dans  $\mathcal{O}(C_f)$ , et que  $(a^2Y - 1)$  est inversible dans  $A$ .
- g) Montrer que les éléments  $aX - Y$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , sont irréductibles et 2 à 2 non associés dans  $A$  (indication : on pourra étudier leurs images dans  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ). En déduire que l'élément  $Y^2$  de  $A$  possède une infinité de diviseurs irréductibles non associés, bien qu'il soit noethérien.

**Solution.** a) On a  $\mathfrak{m}_O = (X, Y)$  et  $\mathfrak{m}_O^2 = (X^2, XY, Y^2)$  donc l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathfrak{m}_O \longrightarrow \mathbb{C}^2, f = \sum_{nm} a_{nm} X^n Y^m \mapsto (a_{10}, a_{01})$$

induit un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels  $\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$ . De plus, avec la même notation, on a  $\frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = a_{10}$  et  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0) = a_{01}$ , d'où la deuxième assertion.

- b) Regardons la composée  $\mathfrak{m}_O \xrightarrow{ev} \mathfrak{m}_{O,f} = \mathfrak{m}_O/(f) \longrightarrow \mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2$ . Elle est surjective, donc il suffit de voir que son noyau est  $\mathfrak{m}_O^2 + (f)$ . Soit donc  $g$  dans le noyau. Alors l'image  $ev(g)$  de  $g$  dans  $\mathfrak{m}_{O,f}$  appartient à  $\mathfrak{m}_{O,f}^2$ . Or,  $ev(\mathfrak{m}_O^2) = \mathfrak{m}_{O,f}^2$ , donc il existe  $h \in \mathfrak{m}_O^2$  tel que  $ev(g - h) = 0$ , ce qui équivaut à  $g - h \in (f)$ . On en déduit que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2) = 2 - \dim_{\mathbb{C}}(((f) + \mathfrak{m}_O^2)/\mathfrak{m}_O^2)$$

et on a  $\dim_{\mathbb{C}}(((f) + \mathfrak{m}_O^2)/\mathfrak{m}_O^2) = 1$  ou  $0$ , selon que  $f \notin \mathfrak{m}_O^2$  (ie  $O$  est régulier) ou  $f \in \mathfrak{m}_O^2$  ( $O$  pas régulier).

- c) Suivons l'indication. Soit donc  $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ . Puisque le  $A$ -module  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  est un  $k$ -ev de dimension 1, il est engendré par n'importe quel élément non nul, par exemple l'image de  $f$ . On a donc  $\mathfrak{m} = (f) + \mathfrak{m}^2$ . Supposons avoir montré que  $\mathfrak{m} = (f) + \mathfrak{m}^n$ . Comme  $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-1}((f) + \mathfrak{m}^2) \subset (f) + \mathfrak{m}^{n+1}$ , on a aussi  $\mathfrak{m} = (f) + \mathfrak{m}^{n+1}$ . Cela signifie que dans l'anneau local  $\bar{A} := A/(f)$ , l'idéal maximal  $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/(f)$  vérifie  $\bar{\mathfrak{m}} = \bigcap_n \bar{\mathfrak{m}}^n$ . Or, d'après la question c) de l'exercice 3 du TD3, on a  $\bigcap_n \bar{\mathfrak{m}}^n = 0$  car  $A$  est noethérien. Donc  $\bar{\mathfrak{m}} = 0$  et  $\mathfrak{m} = (f)$ . On peut maintenant appliquer la question b) ii) de l'exercice 3 du TD 3, qui assure que tous les idéaux de  $A$  sont principaux.

- d) Construisons des isomorphismes réciproques à partir des propriétés universelles des quotients et des localisés. Partons d'abord de la composée  $\varphi : \mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow \mathcal{O}(C_f) \longrightarrow A$ . Si  $g \in \mathbb{C}[X, Y]$  a un terme constant non nul, son image dans  $\mathcal{O}(C_f)$  ne s'annule pas en  $O$ , donc est inversible dans  $A$ . Par PU des localisés, on a une unique extension  $\varphi$  au localisé  $\bar{\varphi} : \mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)} \longrightarrow A$ . De plus, l'image de  $f$  est nulle dans  $A$ , donc  $\bar{\varphi}$  se factorise en  $\bar{\varphi} : (\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)})/(f) \longrightarrow A$ . Dans l'autre sens, partons de la composée  $\psi : \mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)} \longrightarrow (\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)})/(f)$ . On a  $\psi(f) = 0$ , donc  $\psi$  se factorise par un unique  $\bar{\psi} : \mathcal{O}(C_f) \longrightarrow (\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)})/(f)$ . Mais l'image  $\bar{\psi}(\bar{g})$  d'une fonction  $\bar{g}$  qui ne s'annule pas en  $O$  est inversible, donc  $\bar{\psi}$  s'étend en un morphisme  $\tilde{\psi} : A \longrightarrow (\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)})/(f)$ . Remarquons que, par construction,  $\bar{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont des morphismes de  $\mathbb{C}[X, Y]$ -algèbres. Ainsi  $\tilde{\psi} \circ \bar{\varphi}$  est un endomorphisme de la  $\mathbb{C}[X, Y]$ -algèbre  $(\mathbb{C}[X, Y]_{(X, Y)})/(f)$ . Mais il y a un unique tel endomorphisme, et c'est l'identité. De même,  $\bar{\varphi} \circ \tilde{\psi} = \text{id}$ .

- e) Montrons d'abord  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2$ . On a une inclusion de  $\mathcal{O}(C_f)$ -modules  $\mathfrak{m}_{O,f} \subset \mathfrak{m}$ , qui induit par propriété universelle des quotients un morphisme de  $\mathcal{O}(C_f)$ -modules  $\mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Pour montrer sa surjectivité, il faut montrer que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{O,f} + \mathfrak{m}^2$ . Or, un élément de  $\mathfrak{m}$  est de la forme  $s^{-1}g$  avec  $g \in \mathcal{O}(C_f)$  telle que  $g(O) = 0$  et  $s \in \mathcal{O}(C_f)$  telle que  $s(O) \neq 0$ . Soit  $\lambda := s(O)^{-1} \in \mathbb{C}^\times$ . On a  $s^{-1}g = \lambda g + (s^{-1} - \lambda)g \in \mathfrak{m}_{O,f} + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_{O,f} \subset \mathfrak{m}_{O,f} + \mathfrak{m}^2$ . Pour prouver maintenant l'injectivité, il faut montrer que  $\mathfrak{m}_{O,f} \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}_{O,f}^2$ . Or, pour un élément  $g \in \mathfrak{m}_{O,f} \cap \mathfrak{m}^2$ , il existe  $s \in \mathcal{O}(C_f) \setminus \mathfrak{m}_{O,f}$  tel que  $sg \in \mathfrak{m}_{O,f}^2$ . Posons  $\lambda := s(O) \in \mathbb{C}^\times$ , de sorte que  $s - \lambda \in \mathfrak{m}_{O,f}$ . On a alors  $g = \lambda^{-1}(sg + (\lambda - s)g) \in \mathfrak{m}_{O,f}^2$  comme voulu.

Maintenant, on voit que  $O$  régulier  $\Rightarrow A$  principal, par c). Réciproquement,  $A$  principal implique que  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  est engendré par un seul élément donc est de dimension 1 sur  $\mathbb{C} = A/\mathfrak{m}$ , donc  $O$  est régulier.

- f) Puisque  $X^2 = Y^3$  dans  $\mathcal{O}(C_f)$ , on a bien  $(aX + Y)(aX - Y) = a^2Y^3 - Y^2 = Y^2(a^2Y - 1)$ . De plus, on a  $a^2Y \in \mathfrak{m}_O$ , donc  $a^2Y - 1 \notin \mathfrak{m}_{O,f}$  est inversible dans le localisé  $A$ .

- g) Comme  $O$  n'est pas régulier, on a  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$  et les morphismes naturels  $\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{O,f}/\mathfrak{m}_{O,f}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  sont tous des isomorphismes. En particulier, puisqu'on a visiblement  $aX - Y \in \mathfrak{m}_O \setminus \mathfrak{m}_O^2$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ , on a aussi  $aX - Y \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$  dans  $A$ . Donc pour toute factorisation  $aX - Y = h.k$  dans  $A$ , on a  $h \notin \mathfrak{m}$  ou  $k \notin \mathfrak{m}$ , et donc  $h \in A^\times$  ou  $k \in A^\times$ . Il s'ensuit que  $aX - Y$  est bien irréductible dans  $A$ .

Notons  $\bar{X}, \bar{Y}$  les images de  $X, Y$  dans  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . La famille  $\{\bar{X}, \bar{Y}\}$  forme une  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . L'image de  $(aX - Y)A^\times$  dans  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  est la droite époincée  $\mathbb{C}^\times(a\bar{X} - \bar{Y})$  de vecteur directeur  $a\bar{X} - \bar{Y}$ . Or, cette droite est égale à celle de vecteur directeur  $a'\bar{X} - \bar{Y}$  si et seulement si  $a = a'$ . On en déduit que les  $aX - Y$  sont deux à deux non associés quand  $a$  parcourt  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 3.** Soit  $A$  un anneau. Montrer que le morphisme  $A \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$  qui envoie  $a$  sur  $(a/1)$  est injectif.

**Solution.** Si  $a$  est envoyé sur 0 dans  $A_{\mathfrak{m}}$ , si et seulement si il existe  $m \notin \mathfrak{m}$  tel que  $ma = 0$ . Donc  $a$  est dans le noyau de  $A \rightarrow \prod_{\mathfrak{m} \text{ idéal maximal de } A} A_{\mathfrak{m}}$  si et seulement si l'annulateur de  $a$  n'est contenu dans aucun idéal maximal. Or tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal. On devrait donc avoir  $\text{Ann}(a) = A$ , ce qui implique que  $a = 0$ .

**Exercice 4.** Montrer qu'un anneau  $A$  est réduit (c'est-à-dire  $\sqrt{0} = 0$ ) si et seulement si  $A_{\mathfrak{m}}$  est réduit pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ .

**Solution.** Supposons  $A$  réduit et soit  $a/s \in A_{\mathfrak{m}}$  tel que  $(a/s)^n = 0$ . Alors il existe  $t \notin \mathfrak{m}$  tel que  $ta^n = 0$ , et donc  $(ta)^n = 0$ . Mais comme  $A$  est réduit,  $ta = 0$  donc  $a/s = 0$ , ce qui montre que  $A_{\mathfrak{m}}$  est réduit. Réciproquement, si tous les  $A_{\mathfrak{m}}$  sont réduits, alors  $\prod A_{\mathfrak{m}}$  est aussi réduit, et donc  $A$  aussi puisque c'est un sous-anneau de  $\prod A_{\mathfrak{m}}$  d'après l'exo précédent.

**Exercice 5.** a) Soit  $A$  un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$  (contenant  $\mathbb{Z}$ ). Soit  $S = \mathbb{Z} \cap A^{\times}$ . Montrer que  $A = S^{-1}\mathbb{Z}$ .  
 b) Généraliser en remplaçant  $\mathbb{Z}$  par un anneau principal.  
 c) Trouver un sous-anneau de  $\mathbb{C}(X, Y)$  contenant  $\mathbb{C}[X, Y]$  qui ne soit pas, en tant que  $\mathbb{C}[X, Y]$ -algèbre, un localisé de  $\mathbb{C}[X, Y]$ .

**Solution.** a)  $S^{-1}\mathbb{Z}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$  et on a clairement  $S^{-1}\mathbb{Z} \subset A$  (tous les éléments de  $S$  étant inversibles dans  $A$ ).

Réciproquement soit  $p/q \in A$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Soient  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $up + vq = 1$ , alors  $1/q = v + u(p/q) \in A$  car  $v, u \in A$ . Donc  $q \in S$  et  $p/q \in S^{-1}\mathbb{Z}$ .

b) Soit  $A$  un anneau principal de corps des fractions  $K$  et  $B$  un sous-anneau de  $K$ . Notons  $S = A \cap B^{\times}$ . Alors  $B = S^{-1}A$ . La preuve est identique à celle pour  $\mathbb{Z}$ .

c) Soit  $A = \mathbb{C}[X, Y]$  et  $B = \mathbb{C}[X, Y][X/Y]$ . Alors  $B^{\times} = \mathbb{C}^{\times}$ . En effet, on a un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\mathbb{C}[T_1, T_2] \rightarrow B$  envoyant  $T_1$  sur  $Y$  et  $T_2$  sur  $X/Y$  (pour la surjectivité  $X$  est l'image de  $T_1T_2$ , l'injectivité se vérifie facilement par le fait que les monômes sont envoyés sur des monômes de degrés tous distincts). Pour déterminer les inversibles de  $B$ , on est donc ramené au cas d'une algèbre de polynôme, ce qui figure dans le cours. Donc si  $B = S^{-1}A$  en tant que  $A$ -algèbre (attention : remarquez que  $A$  et  $B$  sont isomorphes en tant qu'anneaux ou même en tant que  $\mathbb{C}$ -algèbre. Le fait qu'on cherche ici un isomorphisme de  $A$ -algèbre n'est donc pas anodin), alors  $S \subset B^{\times} = \mathbb{C}^{\times} = A^{\times}$ . Donc  $S^{-1}A = A$  or  $B$  n'est pas isomorphe à  $A$  en tant que  $A$ -algèbre puisque  $X/Y \notin A$ .

**Exercice 6.** Soit  $A$  un anneau et  $f \in A$  un élément qui n'est pas nilpotent. Montrer que le noyau de l'unique morphisme de  $A$ -algèbres  $A \rightarrow A[f^{-1}]$  est  $\{g \in A : \exists n \in \mathbb{N}, f^n g = 0\}$ .

On suppose dorénavant  $A = \mathbb{C}[X, Y]/(XY)$ .

- Pour  $f = X$ , montrer que  $A[f^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ .
- Pour  $g = X + Y$ , montrer que  $A[g^{-1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$  (on pourra remarquer que  $(\frac{X}{1}) + (\frac{Y}{1}) = (1)$  dans  $A[g^{-1}]$ ).
- Montrer que  $Q(A) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$ .

Soit  $B = \mathbb{Z}[2, X]/(2X)$ . Montrer que  $Q(B) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{F}_2(X)$ .

**Solution.** a) Le morphisme  $A \xrightarrow{\text{can}} A[X^{-1}]$  s'annule sur  $Y$  puisque  $XY = 0$ . Donc il se factorise par un morphisme  $A/(Y) = \mathbb{C}[X] \xrightarrow{\text{can}} A[X^{-1}]$ . Puisque  $X$  est inversible à l'arrivée, ce dernier morphisme s'étend en un morphisme  $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \xrightarrow{\varphi} A[X^{-1}]$  (pté universelle des localisés). Comme tout élément de  $A[X^{-1}]$  est de la forme  $\frac{a}{X^n} = X^{-n} \text{can}(a)$ , le morphisme  $\varphi$  est surjectif. Dans l'autre sens, partons du morphisme composé  $A \rightarrow A/(Y) = \mathbb{C}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ . Il envoie  $X$  sur un inversible donc s'étend en un morphisme  $A[X^{-1}] \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ . Il est clair que  $\psi \circ \varphi = \text{id}$ , d'où l'injectivité de  $\varphi$ .

- Construisons d'abord un morphisme de  $A[g^{-1}]$  vers  $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$ . Pour cela, considérons la composée

$$A \rightarrow A/(Y) \times A/(X) = \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[Y] \hookrightarrow \mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}].$$

Elle envoie  $g = X + Y$  sur l'élément  $(X, Y)$ , qui est inversible d'inverse  $(X^{-1}, Y^{-1})$  dans  $\mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$ , donc elle s'étend (pté universelle des localisés) en un morphisme  $A[g^{-1}] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$  comme souhaité. Ce morphisme est d'ailleurs injectif car  $A \rightarrow \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[Y]$  est injectif. Par ailleurs, on remarque que  $\varphi(X^n) = (X^n, 0)$  pour tout  $n > 0$ , et  $\varphi(\frac{X}{g^{m+1}}) = (X^{-m}, 0)$  pour tout  $m \geq 0$ . Il s'ensuit que l'image de  $\varphi$  contient  $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ . De même, elle contient  $\mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$  et, par conséquent,  $\varphi$  est surjective.

- c) On a  $Q(A) = Q(A[g^{-1}]) = Q(\mathbb{C}[X, X^{-1}] \times \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]) = Q(\mathbb{C}[X, X^{-1}]) \times Q(\mathbb{C}[Y, Y^{-1}]) = \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(Y)$ .  
Pour  $B = \mathbb{Z}[X]/(2X)$ , on peut procéder de la même manière pour prouver d'abord que  $B[(2+X)^{-1}] \simeq \mathbb{F}_2[X, X^{-1}] \times \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ , avant de passer à l'anneau total des fractions.