TD n°5.

1 Modules

Exercice 1. Donner des exemples :
(I) De A-modules non libres,
(II) d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base,
(III) d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base,
(IV) de sous-module n'ayant pas de supplémentaire,
(V) de module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.

Exercice 2. Soit M un A-module
(I) On suppose que M est monogène, montrer qu'il existe un idéal I de A tel que $M \simeq A/I$.
(II) On suppose que $M \neq (0)$ est simple (c'est-à-dire que ses seuls sous-modules sont (0) et M). Montrer que M est monogène, engendré par tout élément non nul de M. Montrer que M est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A.
(III) Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?

Exercice 3. Soit A un anneau intègre et M un A-module. On dit que $x \in M$ est de torsion si il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $ax = 0$. On note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M. Si $T(M) = 0$ on dit que M est sans torsion.

a) Montrer que l'ensemble des éléments de torsion de M est un sous-module de M.
b) Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.
c) Montrer que si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors $f(T(M)) \subset T(N)$.

Exercice 4. Soit M un A-module et $m \in M$ un élément dont l'annulateur $\mathrm{Ann}(m)$ est réduit à (0). Montrer que Am est facteur direct de M si et seulement si il existe $f \in M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ tel que $f(m) = 1$. Montrer qu'alors on a $M = Am \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 5. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. On suppose que $K \neq A$ (c'est-à-dire que A n'est pas un corps), montrer que K n'est pas libre comme A-module.

Exercice 6. Montrer qu'un idéal I d'un anneau A est un sous-module libre de A si et seulement si I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 7. Soit M un A-module, on définit $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. On dit que M est réflexif si le morphisme naturel $\theta : M \to M^{\vee\vee}$ défini par $m \mapsto \theta(m) = (\varphi \mapsto \varphi(m))$ avec $\varphi \in M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ est un isomorphisme.

a) Montrer que si M est libre de rang fini, alors M est réflexif.
b) Montrer que si A est intègre et M est de torsion alors $M^\vee = 0$.
c) Si A principal et M de type fini, montrer que M est réflexif si et seulement si M est libre.

Soit $f \in \mathrm{End}_A M$, on définit sa transposée $f^\vee \in \mathrm{End}_A M^\vee$ par $f^\vee(\varphi) = \varphi \circ f$ pour tout $\varphi \in M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

d) Montrer que l'ensemble des polynômes P de $A[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal que l'on notera $I(f)$.
e) Montrer que $I(f) \subset I(f^\vee)$.
f) Montrer que $(f^\vee)^\vee \circ \theta = \theta \circ f$.
g) Montrer que si M est réflexif, on a $I(f) = I(f^\vee)$.

Exercice 8. Soit A un anneau, M un A module de type fini et $\varphi : M \to A^n$ un morphisme surjectif de A-modules.
(I) Montrer que φ admet un inverse à droite ψ (c'est-à-dire qu'il existe $\psi : A^n \to M$ tel que $\varphi \circ \psi = id_{A^n}$).
(II) Montrer que $M \simeq \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\psi$.
(III) Montrer que $\mathrm{Ker}\varphi$ est de type fini.

Exercice 9. Soit P un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) pour tout morphisme surjectif de A-module $g : E \to F$ et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(P, F)$, il existe $h \in \mathrm{Hom}_A(P, E)$ tel que $f = g \circ h$,
(b) pour tout morphisme surjectif $\pi : M \to P$, il existe un morphime $s : P \to M$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_P$ (un tel morphisme s est appelé une section de π).
(c) Il existe un A-module M tel que $M \oplus P$ est libre.

Un A-module P vérifiant ces propriétés est appelé module projectif.
Montrer qu'un A-module libre est projectif.
Donner un exemple de $\mathbb{Z}$-module qui n'est pas projectif.

Exercice 10. Soit J un A-module. On dit que J est un A-module injectif si, pour tout morphisme injectif $i : N \to M$ de A-modules et tout morphisme de $f : N \to J$ de A-module, il existe un morphisme $g : M \to J$ tel que $f = gi$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif.
b) Soit J un A-module tel que tout morphisme $f : I \to J$ de A-modules où I est un idéal de A se prolonge en un morphisme $A \to J$. On veut montrer que J est injectif.
   Soit donc N un sous-A-module d'un A-module M et soit $f : N \to J$ un morphisme.
   i) Montrer en utilisant le lemme de Zorn qu'il existe un prolongement f' de f à un sous-module N' de M contenant N tel que f' ne peut se prolonger à aucun sous-module N'' de M contenant strictement N'.
   ii) Soit $x \in M$ et soit $I = \{a \in A, ax \in N'\}$. En utilisant le morphisme $g : I \to J$ défini par $g(a) = f'(ax)$, montrer que f' se prolonge à $N' + Ax$.
   iii) En déduire que $N' = M$ et que J est injectif.
c) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs.
d) Montrer qu'un produit (quelconque) de modules injectifs est encore injectif.
e) Montrer que tout $\mathbb{Z}$-module s'injecte dans un $\mathbb{Z}$-module injectif.

Exercice 11. Lemme de Nakayama.

a) Soit M un A-module de type fini et I un idéal de A. Supposons que $M = IM$, montrer qu'il existe alors $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$ (choisir $1 + a$ déterminant d'une matrice).
b) En déduire que si A est local, $I = \mathfrak{m}$ son idéal maximal et $M = \mathfrak{m}M$ alors $M = 0$.
c) Soit $\mathfrak{r}$ le radical de Jacobson de A (c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux maximaux). Montrer que si $\mathfrak{r}M = M$, alors $M = 0$.

Exercice 12. Soit A un anneau et I un idéal de type fini de A tel que $I^2 = I$. Montrer qu'il existe $e \in A$ tel que $e^2 = e$ et $I = (e)$.
Indice : utiliser le lemme de Nakayama pour trouver $a \in I$ tel que $(1 + a)I = 0$.

Exercice 13. Soient A un anneau, M un A-module, N un A-module de type fini et $u : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules. Soit $\mathfrak{r}$ le radical de Jacobson de A ($\mathfrak{r}$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A).
(ı) Montrer que u induit un homomorphisme $v : M/\mathfrak{r}.M \longrightarrow N/\mathfrak{r}.N$.
(ıı) Remarquer que si I est un idéal de A et $N' \subset M'$ sont deux A-modules alors on a

$$I \cdot (M'/N') = (I \cdot M' + N')/N'.$$

(ııı) On suppose que v est surjectif, calculer $\mathrm{Im} u + \mathfrak{r} \cdot N$ et en déduire que u est surjectif.

Exercice 14. Montrer que si M est un A-module noethérien alors $M[X]$ est un $A[X]$-module noethérien.

Exercice 15. Soient M, M' et M'' trois A-modules et $i : M' \to M$ un homomorphisme injectif et $\pi : M \to M''$ un homomorphisme surjectif tels que $\pi \circ i = 0$. Montrer que M est noethérien si et seulement si M', M'' et $\mathrm{Ker}\,\pi/\mathrm{Im} i$ sont noethériens.

Exercice 16. Soient M un A-module et N_1 et N_2 deux sous-module de M. Montrer que N_1 et N_2 sont noethériens si et seulement si $N_1 + N_2$ est noethérien, et que M/N_1 et M/N_2 sont noethériens si et seulement si $M/(N_1 \cap N_2)$ est noethérien.