TD n°6.

1 Produit tensoriel

Exercice 1. Calculer les produits tensoriels suivants :

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,

d) $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Y]$.

Exercice 2. Soit k un corps, et V et W deux k-espaces vectoriels de dimension finie.

a) Montrer qu'il existe un unique isomorphismes de k-espaces vectoriels $\varphi : V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, W)$ qui envoie $\lambda \otimes w$ sur l'application linéaire $v \mapsto \lambda(v)w$ pour toute forme linéaire $\lambda \in V^*$ et tout $w \in W$.

b) Montrer qu'il existe une unique application k-linéaire $V^* \otimes V \xrightarrow{\text{ev}} k$ qui envoie $\lambda \otimes v$ sur $\lambda(v)$ pour tout $\lambda \in V^*$ et tout $v \in V$.

c) Calculer la composée $\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V \xrightarrow{\text{ev}} k$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et M un A-module. On pose $T^0M := A$, puis

$$T^nM := M \otimes_A M \otimes_A \cdots \otimes_A M$$

(n facteurs) pour $n \geqslant 1$, et enfin $TM := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^nM$.

a) Montrer qu'il existe une unique structure de A-algèbre (non commutative en général) sur TM telle que pour toute paire de tenseurs élémentaires $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^nM$ et $y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^mM$, on a

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}M.$$

b) Montrer que pour toute A-algèbre B et tout morphisme de A-modules $M \xrightarrow{\varphi} B$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $TM \xrightarrow{T\varphi} B$ tel que $T\varphi_{|T^1M} = \varphi$.

c) Soit SM le quotient de TM par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1 \in T^2M$, avec $x_1, x_2 \in M$. Montrer que SM est une A-algèbre commutative qui a la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre commutative B et tout morphisme de A-modules $M \xrightarrow{\varphi} B$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $SM \xrightarrow{S\varphi} B$ tel que $S\varphi_{|S^1M} = \varphi$, où S^1M est l'image de T^1M et s'identifie à M.

d) Supposons M libre de base $e_1, \cdots, e_n$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de A-algèbre $\psi : A[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\sim} SM$ tel que $\psi(X_i) = e_i \in S^1M$ pour tout i.

Exercice 4. Soit $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morphisme d'anneaux.

a) Rappeler la structure de A-algèbre sur $B \otimes_A B$ et montrer que la multiplication de B induit un morphisme de A-algèbres $B \otimes_A B \longrightarrow B$.

b) Soit I le noyau de ce morphisme, qui est donc un idéal de $B \otimes_A B$, et posons $\Omega := I/I^2$.

   i) Montrer que l'idéal I de $B \otimes_A B$ est engendré par les éléments de la forme $(b \otimes 1 - 1 \otimes b)$.

   ii) Tout $B \otimes_A B$-module peut être vu comme un B-module de deux manières : en faisant agir b comme $b \otimes 1$ ou comme $1 \otimes b$. Montrer que sur Ω, ces deux structures de B-modules coïncident.

   iii) Montrer que l'application $d : B \longrightarrow \Omega$, $b \mapsto db := \overline{b \otimes 1 - 1 \otimes b}$ est A-linéaire et vérifie $d(bb') = bdb' + b'db$ pour tous $b, b' \in B$.

iv) Dans le cas $B = A[X_1, \cdots, X_n]$, montrer que le B-module Ω est engendré par $dX_1, \cdots, dX_n$, et que pour tout polynôme $f \in B$, on a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}.dX_i$, où $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ est le polynôme dérivé de f "selon la variable" X_i.

c) Soit M un B-module. Une A-dérivation de B à valeurs dans M est un morphisme de A-modules $\partial : B \longrightarrow M$ tel que $\partial(bb') = b\partial b' + b'\partial b$.

i) Vérifier que l'ensemble $\mathrm{Der}_A(B, M)$ de toutes ces dérivations est naturellement un B-module.

ii) Montrer que l'application $\psi \mapsto \psi \circ d$ est une bijection

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B, M).$$

iii) Supposons $B = A[X_1, \cdots, X_n]$ et $M = B$. Montrer que l'application $\partial_i : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial X_i}$ est dans $\mathrm{Der}_A(B, B)$. Notons encore $\psi_i \in \mathrm{Hom}_B(\Omega, B) = \Omega^\vee$ le morphisme de B-modules associé. Montrer que $\psi_i(dX_j) = \delta_{ij}$. En déduire que Ω est libre sur B de base $dX_1, \cdots, dX_n$ et que $\mathrm{Der}_A(B, B)$ est libre sur B de base $\partial_1, \cdots, \partial_n$.

iv) Le B-module Ω est parfois appelé "module des différentielles de Kähler", et aussi "fibré (ou module) cotangent". Si vous avez fait un peu de géométrie différentielle, justifiez cette deuxième terminologie.

Exercice 5 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** Soit A un anneau commutatif, M un A-module de type fini. L'ensemble $\mathrm{End}_A(M)$ des endomorphismes de M est alors une A-algèbre (pas commutative, en général) dont la multiplication est donnée par la composition. Pour $u \in \mathrm{End}_A(M)$, on veut montrer qu'il existe un polynôme unitaire $f \in A[X]$ tel que $f(u) = 0$.

a) On suppose dans un premier temps que M est libre de base $e_1, \cdots, e_n$. On note $U = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans cette base, de sorte que $u(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$ pour tout j.

i) Montrer que le polynôme $\det(U - XI_n)$ ne dépend pas de la base choisie. On le note $\chi_u(X)$.

ii) Soit $A \xrightarrow{\varphi} A'$ un morphisme d'anneaux. Posons $M' := A' \otimes_A M$ et $u' := \mathrm{id} \otimes u$. Montrer que

$$\begin{cases} \chi_u(u) = 0 \Rightarrow \chi_{u'}(u') = 0 \\ \chi_{u'}(u') = 0 \Rightarrow \chi_u(u) = 0 \text{ lorsque } \varphi \text{ est injectif} \end{cases}$$

iii) Montrer que si A est un corps algébriquement clos, alors $\chi_u(u) = 0$.

iv) Montrer que si A est intègre, alors $\chi_u(u) = 0$. (On admettra que tout corps peut se plonger dans un corps algébriquement clos).

v) Montrer $\chi_u(u) = 0$ dans le cas général, en s'aidant de l'unique morphisme d'anneau $\mathbb{Z}[X_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \longrightarrow A$ qui envoie X_{ij} sur a_{ij}.

b) Soit maintenant M de type fini quelconque. Montrer qu'il existe un entier n, un morphisme surjectif $A^n \xrightarrow{\pi} M$ et un endomorphisme $\tilde{u} \in \mathrm{End}_A(A^n)$ tels que $u \circ \pi = \pi \circ \tilde{u}$. En déduire que $\chi_{\tilde{u}}(u) = 0$.

Application : soit $A \xrightarrow{\varphi} B$ un morphisme d'anneaux. On dit que b est *entier sur* A s'il est annulé par un polynôme unitaire à coefficients dans A.

c) Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) b est entier sur A

ii) la sous-A-algèbre $A[b]$ engendrée par A est un A-module de type fini

d) Montrer que l'ensemble des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B.

Exercice 6. On note $f_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal unitaire d'un nombre algébrique $\alpha \in \mathbb{C}$, et d_α son degré.

a) Soient α et $\beta \in \mathbb{C}$ deux nombres algébriques.

i) Construire un morphisme surjectif de $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathbb{Q}[\alpha] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\beta] \longrightarrow \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$.

ii) Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] \otimes \mathbb{Q}[\beta]$ est un corps si et seulement si f_α reste irréductible dans $\mathbb{Q}[\beta][X]$, si et seulement si $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha, \beta]) = n_\alpha n_\beta$.

b) Soit α un entier algébrique (donc $f_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$), et p un nombre premier. Montrer que p est un élément premier de $\mathbb{Z}[\alpha]$ si et seulement si $\bar{f}_\alpha \in \mathbb{F}_p[X]$ est irréductible.

Exercice 7 (Bigèbres)**.** Soit A un anneau commutatif et B une A-algèbre. On se donne un morphisme de A-algèbres $B \xrightarrow{\Delta} B \otimes_A B$, qu'on appelle *coproduit.* Pour toute A-algèbre R, on pose $G(R) := \mathrm{Hom}_{A-\mathrm{alg}}(B, R)$.

a) Étant donnés $\psi_1, \psi_2 \in G(R)$, rappeler pourquoi il existe un unique morphisme de A-algèbres $\psi_1 \cdot \psi_2 : B \otimes_A B \longrightarrow R$ tel que $(\psi_1 \cdot \psi_2)(b_1 \otimes b_2) = \psi_1(b_1)\psi_2(b_2)$ pour tous $b_1, b_2 \in B$.

b) On munit $G(R)$ de la loi $G(R) \times G(R) \longrightarrow G(R)$ définie par $\psi_1 * \psi_2 := (\psi_1 \cdot \psi_2) \circ \Delta$. Montrer que tout morphisme de A-algèbres $R \longrightarrow R'$ induit une application $G(R) \longrightarrow G(R')$ compatible aux produits.

c) On dit que Δ est *coassociatif* si $(\Delta \otimes \mathrm{id}_B) \circ \Delta = (\mathrm{id}_B \otimes \Delta) \circ \Delta$ (en tant que morphismes $B \longrightarrow B \otimes_A B \otimes_A B$). Montrer l'équivalence entre

   i) Δ est coassociatif

   ii) $G(R)$ est un monoïde *associatif* pour tout R.

d) Montrer l'équivalence entre

   i) Il existe un morphisme de A-algèbres $\varepsilon : B \longrightarrow A$ tel que $(\mathrm{id}\,.\varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon.\,\mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id}_B$. Un tel morphisme ε est appelé *counité de* Δ.

   ii) Pour tout R, $G(R)$ possède une unité ε_R telle que pour tout morphisme $R \longrightarrow R'$, l'application $G(R) \longrightarrow G(R')$ envoie ε_R sur $\varepsilon_{R'}$.

e) Montrer l'équivalence entre

   i) Pour tout R, $G(R)$ est un groupe.

   ii) Il existe un morphisme de A-algèbres $\iota : B \longrightarrow B$ tel que $(\iota \cdot \mathrm{id}_B) \circ \Delta = (\mathrm{id}_B \cdot \iota) \circ \Delta = \varepsilon_B$. Un tel morphisme est appelé *coinverse de* Δ.

f) Exemples :

   i) Soit $B = A[X]$ et Δ défini par $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$. Montrer que Δ est coassociatif, que $G(R)$ est le groupe additif R pour tout R, et calculer la counité et la coinverse de Δ.

   ii) Soit $B = A[X, X^{-1}]$ et Δ défini par $\Delta(X) = X \otimes X$. Montrer que Δ est coassociatif, que $G(R) = R^\times$ (groupe multiplicatif) pour tout R, et calculer la counité et la coinverse de Δ.

   iii) Soit $B = A[X_{ij}][\delta^{-1}]$, où $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et δ est le déterminant de la matrice $(X_{ij})_{i,j}$. Trouver un coproduit Δ sur B pour que $G(R) = \mathrm{GL}_n(R)$ pour toute A-algèbre R.