Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
Master Mathématiques et applications

Faculté de Mathématiques
2017–2018

Algèbre et théorie de Galois

Examen du 12 janvier 2017. Durée 3h00.
Aucun document autorisé. Smartphones éteints.

Exercice 1. Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré 3 et soit G_f son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$.

i. Montrer que G_f est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (groupe symétrique) ou $\mathfrak{A}_3$ (groupe alterné).

ii. Montrer que si f a une seule racine réelle, alors G_f est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

iii. Soit $f = X^3 - 6X + 1$. Montrer que f est irréductible sur $\mathbb{Q}$ avec 3 racines réelles mais que G_f est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 2 (Intégralité)**.** Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux. On dit que $b \in B$ est "entier sur A" s'il existe un polynôme unitaire $f \in A[X]$ tel que $f(b) = 0$.

i. Montrer que $b \in B$ est entier sur A si et seulement si la sous-A-algèbre $A[b]$ de B engendrée par b est un A-module de type fini.

ii. Soient $b, b' \in B$ entiers sur A. Montrer que la sous-A-algèbre $A[b, b']$ engendrée par b et b' est un A-module de type fini.

iii. Supposons A noethérien. Montrer que l'ensemble des $b \in B$ entiers sur A est une sous-A-algèbre de B.

iv. Supposons A factoriel et $B = \mathrm{Frac}(A)$. Montrer que tout b entier sur A est dans A.

Exercice 3 (Polynômes symétriques)**.** On fixe un entier $n > 1$, on note $A = \mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ et $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$..

i. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, justifier l'existence d'un unique automorphisme d'anneaux σ de A tel que $\sigma(X_i) = X_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Puis montrer que cela définit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur A par automorphismes d'anneaux, et que celle-ci se prolonge en une action sur $K = \mathbb{Q}(X_1, \cdots, X_n)$ par automorphismes de corps.

ii. Considérons le polynôme $f = (T - X_1) \cdots (T - X_n) \in A[T]$ et développons-le sous la forme $f = T^n - \Sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ avec $\Sigma_i \in A$. Montrer que les Σ_i sont invariants par $\mathfrak{S}_n$ et en donner une formule explicite comme polynômes en les X_i.

TSVP

iii. Notons $K^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-corps des invariants de K sous $\mathfrak{S}_n$ et $k := \mathbb{Q}(\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n)$ le sous-corps de K engendré par les Σ_i. On a donc $k \subset K^{\mathfrak{S}_n}$.

   (a) Rappeler pourquoi $[K : K^{\mathfrak{S}_n}] \geqslant n!$.

   (b) Montrer que K est un corps de décomposition de f sur k et en déduire que $[K : k] \leqslant n!$.

   (c) Conclure que $k = K^{\mathfrak{S}_n}$ et que les Σ_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

iv. Notons $A^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-anneau des invariants de A sous $\mathfrak{S}_n$ et $B := \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n]$ le sous-anneau de A engendré par les Σ_i.

   (a) Montrer que tout élément de A est entier sur B (cf exercice 2).

   (b) Justifier que B est factoriel, puis montrer que $B = A^{\mathfrak{S}_n}$.

On a donc montré le théorème suivant : les Σ_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$ et on a $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n]$

Exercice 4. Soient K_1, K_2 deux extensions Galoisiennes de $\mathbb{Q}$ contenues dans $\overline{\mathbb{Q}}$, et soit K la sous-extension de $\overline{\mathbb{Q}}$ engendrée par K_1 et K_2.

i. Montrer que K est Galoisienne sur $\mathbb{Q}$.

ii. Montrer que si $[K_1 : \mathbb{Q}]$ et $[K_2 : \mathbb{Q}]$ sont premiers entre eux, alors $[K : K_1] = [K_2 : \mathbb{Q}]$ et $[K : K_2] = [K_1 : \mathbb{Q}]$.

iii. Sous la même hypothèse, montrer que les applications de restriction induisent des isomorphismes $\mathrm{Gal}(K/K_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Gal}(K/K_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_1/\mathbb{Q})$, et aussi que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(K/K_1) \times \mathrm{Gal}(K/K_2)$.