Sorbonne Université
Master Mathématiques et applications

UFR de Mathématiques
2024–2025

Algèbre commutative

Examen du 7 janvier 2025. Durée 3h00.

Pas de documents autorisés.

Exercice 1. On justifiera les réponses aux questions suivantes :

i. Donner un exemple d'anneau non intègre.

ii. Donner un exemple d'anneau intègre noethérien non factoriel.

iii. Donner un exemple d'anneau non noethérien.

iv. Donner un exemple de famille libre dans un module sur un anneau intègre qu'on ne peut pas compléter en une base .

v. Donner un exemple de famille génératrice d'un module sur un anneau intègre, dont on ne peut pas extraire une base.

vi. Donner un exemple de module de type fini sans torsion sur un anneau intègre qui n'est pas libre.

vii. Calculer l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

viii. Calculer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-algèbre (pour la structure $z \mapsto z \otimes 1$).

Exercice 2. Soit $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$ la $\mathbb{C}$-algèbre quotient de $\mathbb{C}[X,Y]$ par l'idéal engendré par $Y^2 - X^3$. On notera $\overline{f}$ l'image d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ dans A.

i. Montrer que A est un anneau noethérien.

ii. Montrer que A est intègre. On pourra pour cela montrer d'abord que $Y^2 - X^3$ est un élément irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$.

iii. Soit $\iota : \mathbb{C}[X] \longrightarrow A$ l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres qui envoie X sur $\overline{X}$.

(a) Montrer que ι est injectif et fait de A un $\mathbb{C}[X]$-module libre de base $\{1, \overline{Y}\}$.

(b) Montrer que si $I \subset A$ est un idéal non nul, alors $\iota^{-1}(I)$ est non nul aussi. En déduire que A/I est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

TSVP

(c) Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal, de corps résiduel $\mathbb{C}$. (ceci signifiant que le morphisme canonique $\mathbb{C} \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ est un isomorphisme).

iv. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (\overline{X}-x, \overline{Y}-y)$ induit une bijection entre l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $y^2 = x^3$ et l'ensemble des idéaux maximaux de A.

v. (a) Montrer qu'il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ tel que $\varphi(\overline{X}) = T^2$ et $\varphi(\overline{Y}) = T^3$.

(b) Montrer que φ est injectif et décrire son image.

(c) Montrer que φ se prolonge en un isomorphisme $\mathrm{Frac}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$.

(d) Montrer que l'application $I \mapsto \varphi^{-1}(I)$ induit une bijection entre idéaux maximaux, resp. premiers, de $\mathbb{C}[T]$ et idéaux maximaux, resp. premiers, de A.

vi. Soit $S \subset A$ l'ensemble des éléments de la forme $\overline{f} = f(\overline{X}, \overline{Y})$ pour un polynôme $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ de terme constant *non nul*.

(a) Montrer que S est une partie multiplicative de A.

(b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'élément $f_a := \frac{\overline{X}}{1} + a\frac{\overline{Y}}{1}$ de $S^{-1}A$ est irréductible dans $S^{-1}A$. (On pourra montrer, en raisonnant dans $\mathbb{C}[T]$, que si $\overline{f}\,\overline{g} = f_a\,\overline{s}$ pour $\overline{f}, \overline{g} \in A$ et $\overline{s} \in S$, alors $\overline{f} \in S$ ou $\overline{g} \in S$.)

(c) Montrer que si $a' \neq a$, les éléments f_a et $f_{a'}$ ne sont pas associés dans $S^{-1}A$.

(d) Justifier l'égalité $(\overline{X} + a\overline{Y})(\overline{X} - a\overline{Y}) = \overline{X}^2(1 - a^2\overline{X})$ dans $S^{-1}A$, et en conclure que l'élément $\overline{X}^2$ de $S^{-1}A$ possède une infinité de diviseurs irréductibles deux à deux non associés !