Sorbonne Université
Master Mathématiques et applications

UFR de Mathématiques
2024–2025

Algèbre commutative

Examen du 7 janvier 2025. Durée 3h00.

Pas de documents autorisés.

Exercice 1. On justifiera les réponses aux questions suivantes :

i. Donner un exemple d'anneau non intègre.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ avec $0 = \overline{2}.\overline{3}$.

ii. Donner un exemple d'anneau intègre noethérien non factoriel.

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ avec $6 = 2.3 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$. Ici, 2 est irréductible car si $z = a + ib\sqrt{5}$ divise 2, alors $a^2 + 5b^2$ divise 4, donc $b = 0$ et a divise 2, de sorte que $z = \pm 1$ ou $z = \pm 2$. De plus, 2 ne divise manifestement ni $1 + i\sqrt{5}$, ni $1 - i\sqrt{5}$, donc le lemme d'Euclide n'est pas vérifié.

iii. Donner un exemple d'anneau non noethérien.

$A = \mathbb{Z}[(X_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ dans lequel l'idéal $(X_1, \cdots, X_n, \cdots)$ n'admet pas de famille génératrice finie. En effet, toute famille finie de polynômes $P_1, \cdots, P_r$ de A appartient au sous-anneau $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_N]$ pour un N suffisamment grand, et X_{N+1} n'appartient donc pas à l'idéal engendré par les P_i.

iv. Donner un exemple de famille libre dans un module sur un anneau intègre qu'on ne peut pas compléter en une base .

$M = A = \mathbb{Z}$, famille $\{2\}$.

v. Donner un exemple de famille génératrice d'un module sur un anneau intègre, dont on ne peut pas extraire une base.

$M = A = \mathbb{Z}$, famille $\{2, 3\}$.

vi. Donner un exemple de module de type fini sans torsion sur un anneau intègre qui n'est pas libre.

Dans $A = \mathbb{C}[X, Y]$, l'idéal (X, Y) est un A-module sans torsion. Comme tout idéal, il est libre si et seulement si il est principal. Or, il n'est pas principal puisque X et Y sont irréductibles non associés, donc n'ont pas de diviseur irréductible commun.

vii. Calculer l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

On applique d'abord une formule du cours $A/J \otimes_A M = M/JM$ avec $A = \mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On obtient que, en tant que groupe abélien, on a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ où μ est le pgcd de n et m. Pour calculer ce produit tensoriel en tant qu'anneau, on part des deux projections $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_n} \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_m} \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$, qui par la propriété universelle des produits tensoriels d'anneaux fournissent un morphisme d'anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_n \cdot \pi_m} \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$. Ce morphisme est manifestement surjectif, puisque π_n et π_m le sont. Par le calcul précédent c'est un isomorphisme.

viii. Calculer $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-algèbre (pour la structure $z \mapsto z \otimes 1$).

Ecrivons la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{C}$ sous la forme $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. On veut calculer l'extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ de cette algèbre. Par les propriétés vues en cours, on a $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}[X]/(X-i) \times \mathbb{C}[X]/(X+i) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3)$ la $\mathbb{C}$-algèbre quotient de $\mathbb{C}[X,Y]$ par l'idéal engendré par $Y^2 - X^3$. On notera $\overline{f}$ l'image d'un polynôme $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ dans A.

i. Montrer que A est un anneau noethérien.

Par le théorème de la base de Hilbert, on sait que $\mathbb{C}[X,Y]$ est noethérien. Or, tout quotient d'un anneau noethérien est noethérien, donc A l'est.

ii. Montrer que A est intègre. On pourra pour cela montrer d'abord que $Y^2 - X^3$ est un élément irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$.

$Y^2 - X^3$ est certainement un élément irréductible dans $\mathbb{C}(X)[Y]$ puisque X^3 n'est pas un carré dans $\mathbb{C}(X)$. Comme son $\mathbb{C}[X]$-contenu est 1, c'est aussi un élément irréductible de $\mathbb{C}[X,Y]$. Cet anneau étant factoriel, c'est un élément premier, donc A est intègre.

iii. Soit $\iota : \mathbb{C}[X] \longrightarrow A$ l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres qui envoie X sur $\overline{X}$.

(a) Montrer que ι est injectif et fait de A un $\mathbb{C}[X]$-module libre de base $\{1, \overline{Y}\}$.

$\operatorname{Ker} \iota = \mathbb{C}[X] \cap (Y^2 - X^3)$ (intersection dans $\mathbb{C}[X,Y]$) qui est manifestement nul par additivité de $\deg_Y$, donc ι est injective. Comme $\overline{Y}^2 = \overline{X}^3$, tout élément de A s'écrit sous la forme $P(\overline{X}) + \overline{Y}Q(\overline{X})$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, donc la famille $\{1, \overline{Y}\}$ est génératrice. De plus, un tel élément est nul si et seulement si $Y^2 - X^3$ divise $P(X) + YQ(X)$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$, ce qui n'est possible que si $P = Q = 0$. La famille est bien libre.

(b) Montrer que si $I \subset A$ est un idéal non nul, alors $\iota^{-1}(I)$ est non nul aussi. En déduire que A/I est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Soit $\overline{f} \in I$ non nul. Ecrivons $\overline{f} = P(\overline{X}) + \overline{Y}Q(\overline{X})$ et posons $\overline{g} := P(\overline{X}) - \overline{Y}Q(\overline{X})$. Alors $\overline{f}\overline{g} \in I$ est non nul et $\overline{f}\overline{g} = P(\overline{X})^2 - X^3 Q(\overline{X})^2 = \varphi(P^2 - X^3Q^2)$. En particulier le polynôme $P^2 - X^3Q^2$ est un élément non nul de $\varphi^{-1}(I)$. Il s'ensuit que $\mathbb{C}[X]/\varphi^{-1}(I)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Comme A/I est engendré par deux éléments en tant que $\mathbb{C}[X]/\varphi^{-1}(I)$-module, c'est un quotient de $(\mathbb{C}[X]/\varphi^{-1}(I))^2$, donc de dimension finie.

(c) Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal, de corps résiduel $\mathbb{C}$. Si I est premier, A/I est une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de dimension finie, donc un corps. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $A/I = \mathbb{C}$

iv. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (\overline{X}-x, \overline{Y}-y)$ induit une bijection entre l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $y^2 = x^3$ et l'ensemble des idéaux maximaux de A.

Si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, l'idéal $(X - x, Y - y)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ a pour quotient $\mathbb{C}$, donc est maximal. Si $y^2 = x^3$, cet idéal contient $Y^2 - X^3$ donc fournit bien un idéal maximal $\mathfrak{m}_{(x,y)}$ de A. Réciproquement, d'après la question précédente, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, on a $\mathbb{C} = A/\mathfrak{m}$. Notons $x_\mathfrak{m}$, resp. $y_\mathfrak{m}$, l'image de $\overline{X}$, resp. $\overline{Y}$, dans $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$, ceci nous fournit un couple $(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m})$ comme dans l'énoncé. Par construction, les deux applications ainsi obtenues sont inverses l'une de l'autre.

v. (a) Montrer qu'il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ tel que $\varphi(\overline{X}) = T^2$ et $\varphi(\overline{Y}) = T^3$.

Par pté universelle des polynômes, il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ qui envoie X sur T^2 et Y sur T^3. Manifestement, il envoie $Y^2 - X^3$ sur $T^6 - T^6 = 0$ donc, par pté universelle des quotients, il se factorise (uniquement) à travers un morphisme φ comme voulu.

(b) Montrer que φ est injectif et décrire son image.

L'image de φ contient $\mathbb{C}[T^2]$ donc est de dimension infinie sur $\mathbb{C}$. Par iii(b), il s'ensuit que $\operatorname{Ker}\varphi$ est nul. L'image de φ contient aussi T^3. On voit donc que $\operatorname{Im}\varphi = \{f(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k \in \mathbb{C}[T],\ \text{t.q. } a_1 = 0\}$ (polynômes sans terme de degré 1)

(c) Montrer que φ se prolonge en un isomorphisme $\operatorname{Frac}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}(T)$.

Par pté universelle des corps de fractions, l'injection $A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[T] \subset \mathbb{C}(T)$ se prolonge en un plongement $\operatorname{Frac}(A) \hookrightarrow \mathbb{C}(T)$, encore noté φ. On remarque que $T = \frac{\varphi(Y)}{\varphi(X)} \in \varphi(\operatorname{Frac}(A))$. Donc $\mathbb{C}(T) \subset \varphi(\operatorname{Frac}(A))$.

(d) Montrer que l'application $I \mapsto \varphi^{-1}(I)$ induit une bijection entre idéaux maximaux, resp. premiers, de $\mathbb{C}[T]$ et idéaux maximaux, resp. premiers, de A.

Si I est premier, on sait que $\varphi^{-1}(I)$ est premier aussi. Si I est maximal, il est premier et non nul, donc d'après les questions précédentes, $\varphi^{-1}(I)$ est premier et non nul, donc maximal. Cela définit les applications. Comme le seul idéal premier non maximal est l'idéal nul, il suffit de prouver la bijectivité dans le cas maximal. Notons que I est alors de la forme $(T - t)$ pour un unique $t \in \mathbb{C}$ et $\varphi^{-1}(I) = (\overline{X} - t^2, \overline{Y} - t^3)$. D'après la question iv, il suffit de voir que tout couple $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ avec $y^2 = x^3$ est de la forme $(x, y) = (t^2, t^3)$ pour un unique $t \in \mathbb{C}$. L'unicité est claire, puisque $\mu_2 \cap \mu_3 = \{1\}$. Pour l'existence, on choisit une racine carrée s de x. On a alors $s^6 = y^2$, donc $s^3 = \varepsilon y$ avec $\varepsilon = \pm 1$, et on pose $t = \varepsilon s$.

vi. Soit $S \subset A$ l'ensemble des éléments de la forme $\overline{f} = f(\overline{X}, \overline{Y})$ pour un polynôme $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ de terme constant *non nul*.

(a) Montrer que S est une partie multiplicative de A.

Pour $f \in \mathbb{C}[X, Y]$, on a $\overline{f} \in S \Leftrightarrow f(0, 0) \neq 0$, donc il est clair que S est stable par multiplication et ne contient pas 0.

(b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'élément $f_a := \frac{\overline{X}}{1} + a\frac{\overline{Y}}{1}$ de $S^{-1}A$ est irréductible dans $S^{-1}A$.

Soit $f_a = \frac{\overline{f}}{\overline{s}}\frac{\overline{g}}{\overline{t}}$ une factorisation de f_a dans $S^{-1}A$, où $\overline{f}, \overline{g} \in A$ et $\overline{s}, \overline{t} \in S$. On a donc dans A l'égalité $\overline{f}\,\overline{g} = f_a\,\overline{s}\,\overline{t}$. Dans $\mathbb{C}[T]$, on a $\varphi(f_a) = T^2 + aT^3$. Puisque $\varphi(\overline{s})$ et $\varphi(\overline{t})$ ne s'annulent pas en 0, la valuation T-adique de $\varphi(f_a\,\overline{s}\,\overline{t})$ est 2. Or, les valuation T-adiques de $\varphi(\overline{f})$ et $\varphi(\overline{g})$ ne peuvent pas être égales à 1. Donc l'une d'elles, par exemple celle de $\varphi(\overline{g})$ est égale à 0, ce qui signifie que $\overline{g} \in S$, i.e. $\overline{g}$ est inversible dans $S^{-1}A$. On a donc montré que f_a est irréductible dans $S^{-1}A$.

TSVP

(c) Montrer que si $a' \neq a$, les éléments f_a et $f_{a'}$ ne sont pas associés dans $S^{-1}A$.

Supposons f_a et $f_{a'}$ associés dans $S^{-1}A$. Cela signifie qu'il existe s et s' dans $S = A \cap (S^{-1}A)^\times$ tels qu'on a l'égalité $(\overline{X} + a\overline{Y})s = (\overline{X} + a'\overline{Y})s'$. Dans $\mathbb{C}[T]$, cette égalité devient $T^2(1 + aT)\varphi(s) = T^2(1 + a'T)\varphi(s')$. En regardant les termes de degré T^2, on voit que les termes constants de $\varphi(s)$ et $\varphi(s')$ sont égaux. Mais alors, comme $\varphi(s)$ et $\varphi(s')$ n'ont pas de terme de degré 1 en T, on voit en regardant les termes de degré 3 dans l'égalité ci-dessus que $a = a'$.

(d) Justifier l'égalité $(\overline{X} + a\overline{Y})(\overline{X} - a\overline{Y}) = \overline{X}^2(1 - a^2\overline{X})$ dans $S^{-1}A$, et en conclure que l'élément $\overline{X}^2$ de $S^{-1}A$ possède une infinité de diviseurs irréductibles deux à deux non associés !

L'égalité découle de $\overline{Y}^2 = \overline{X}^3$. Comme $1 - a^2\overline{X} \in S$ est inversible dans $S^{-1}A$, on voit que f_a divise $\overline{X}^2$ dans $S^{-1}A$. On conclut par les deux questions précédentes.