Sorbonne Université | UFR de Mathématiques
Master Mathématiques et applications | 2025–2026

Algèbre Commutative

Examen du 6 janvier 2026. Durée 3h00.

Pas de documents autorisés.

Exercice 1. Soit $k = \mathbb{F}_p(X)$, et $K := k[Y]/(Y^p - X)$.

i. Montrer que K est un corps et que $\dim_{k-\mathrm{ev}}(K) = p$.

ii. Calculer la k-algèbre $K \otimes_k K$ et en déduire qu'elle n'est pas réduite.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif unitaire et B une A-algèbre. Pour tout B-module M, on note $\mathrm{Der}_A(B, M) := \{d \in \mathrm{Hom}_A(B, M),\ \forall b, b' \in B,\ d(bb') = b.db' + b'.db\}$. Les éléments de $\mathrm{Der}_A(B, M)$ sont appelés *A-dérivations de B à valeurs dans M*.

i. Montrer que $\mathrm{Der}_A(B, M)$ est un sous A-module de $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ et que, pour tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(M, M')$, l'application $d \mapsto \varphi \circ d$ envoie $\mathrm{Der}_A(B, M)$ dans $\mathrm{Der}_A(B, M')$.

ii. Supposons ici $B = A[X]$. Montrer que l'application $\mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow M$, $d \mapsto d(X)$ est bijective. Exprimer $d(f)$ en fonction de $dX := d(X)$ pour tout $f \in A[X]$.

iii. Supposons ici $B = A[X_1, \cdots, X_n]$.

(a) Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe une unique dérivation $\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathrm{Der}_A(B, B)$ qui envoie X_i sur 1 et X_j sur 0.

(b) Montrer que l'application $\mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow M^n$, $d \mapsto (dX_1, \ldots, dX_n)$ est bijective. Exprimer df en fonction des dX_i pour tout $f \in A[X_1, \cdots, X_n]$.

iv. Supposons la A-algèbre B engendrée par une famille $(x_i)_{i \in I}$. Montrer qu'une dérivation $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ est déterminée par l'image des x_i.

v. Revenons à B générale. Posons $I := \mathrm{Ker}(B \otimes_A B \xrightarrow{m} B)$ où $m(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$, qui est un idéal de $B \otimes_A B$, puis posons $\Omega_{B|A} := I/I^2$, qui est un $B \otimes_A B$-module.

(a) Montrer que les deux structures de B-modules sur $\Omega_{B|A}$ obtenues par restriction des scalaires via $1 \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes 1$, $B \longrightarrow B \otimes_A B$, coïncident.

(b) Pour $b \in B$, posons $d_{B|A} b := (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \pmod{I^2} \in \Omega_{B|A}$. Montrer que $d_{B|A} \in \mathrm{Der}_A(B, \Omega_{B|A})$.

(c) Montrer que l'application $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ d_{B|A}$ est bijective, pour tout B-module M. [Partant de $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, on pourra d'abord montrer l'existence d'un morphisme de B-modules $\tilde{\varphi} : B \otimes_A B \longrightarrow M$ tel que $\tilde{\varphi}(b \otimes b') = b.db'$, puis montrer que $\tilde{\varphi}_{|I^2} = 0$ et en déduire un $\varphi : I/I^2 \longrightarrow M$] Expliquer en quoi ceci fait de $d_{B|A}$ une "dérivation universelle".

(d) Si $B = A[X_1, \cdots, X_n]$, montrer que le B-module $\Omega_{B|A}$ est libre de base les $d_{B|A}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

(e) Si B est engendrée par une famille $(x_i)_{i \in I}$ comme A-algèbre, montrer que $\Omega_{B|A}$ est engendré par les $d_{B|A}(x_i)$, $i \in I$ comme B-module.

(f) Si B est un quotient ou une localisation de A, montrer que $\Omega_{B|A} = 0$.

vi. Soit C une B-algèbre.

(a) Montrer que la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C, M) \xrightarrow{d \mapsto d} \mathrm{Der}_A(C, M) \xrightarrow{d \mapsto d_{|B}} \mathrm{Der}_A(B, M)$ est exacte pour tout C-module M.

(b) Montrer qu'il existe des morphismes de C-modules β et γ, uniques, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_B \Omega_{B|A} \arrow[r, dashed, "\beta"] & \Omega_{C|A} \arrow[r, dashed, "\gamma"] & \Omega_{C|B} \arrow[r] & 0 \\
C \otimes_B B \arrow[u, "\mathrm{id}_C \otimes d_{B|A}"] \arrow[r, "\simeq"] & C \arrow[u, "d_{C|A}"] \arrow[r, equal] & C \arrow[u, "d_{C|B}"] &
\end{tikzcd}$$

puis montrer que la ligne du haut de ce diagramme est une suite exacte.

(c) Supposons $C = B/J$ pour un idéal J de B. Montrer que la suite

$$J/J^2 = C \otimes_B J \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes d_{B|A}} C \otimes_B \Omega_{B|A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C|A} \longrightarrow 0$$

est exacte. [On pourra d'abord montrer que pour tout C-module M, la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(J, M)$ est exacte.]

vii. Soit $C = A[X_1, \cdots, X_n]/J$ où $J = (f_1, \cdots, f_m)$. Notons $C^n \xrightarrow{\delta} \Omega_{C|A}$ l'application C-linéaire qui envoie le vecteur e_i de la base canonique sur $d\overline{X}_i$, et $C^m \xrightarrow{\mathrm{jac}} C^n$ l'application C-linéaire dont la matrice est $(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_n))_{i,j}$. Montrer que la suite $C^m \xrightarrow{\mathrm{jac}} C^n \xrightarrow{D} \Omega_{C|A} \longrightarrow 0$

viii. Soit K/k une extension de corps engendrée par un élément α.

(a) Si α est transcendant sur k, montrer que le K-ev $\Omega_{K/k}$ est de dimension 1, de base $d_{K|k}\alpha$.

(b) Si α est algébrique, notons f_α son polynôme minimal et f'_α le polynôme dérivé de f_α. Montrer que $\dim_K \Omega_{K/k} = \begin{cases} 0 & \text{si } f'_\alpha \neq 0 \\ 1 & \text{si } f'_\alpha = 0 \end{cases}$

ix. Montrer $\Omega_{\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}} = 0$ et $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{Q}} \neq 0$.