Algèbre Commutative

Examen du 6 janvier 2026. Durée 3h00.

Pas de documents autorisés.

Exercice 1. Soit $k = \mathbb{F}_p(X)$, et $K := k[Y]/(Y^p - X)$.

i. Montrer que K est un corps et que $\dim_{k-\mathrm{ev}}(K) = p$.

Comme vu en cours, K est un k-module libre de base $\bar{1}, \cdots, \bar{Y}^{p-1}$. De plus, k est un corps, donc $k[Y]$ est un anneau principal. Pour voir que K est un corps, il suffit donc de montrer que $Y^p - X$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p(X)[Y]$. Comme $k = \mathrm{Frac} A$ avec $A = \mathbb{F}_p[X]$ un anneau principal, et comme $Y^p - X$ est de contenu 1 dans $A[Y]$, il suffit de montrer que $Y^p - X$ est irréductible dans $A[Y] = \mathbb{F}_p[X, Y]$, ce qui découle du fait qu'il est de degré 1 en X.

ii. Calculer la k-algèbre $K \otimes_k K$ et en déduire qu'elle n'est pas réduite.

On a $K \otimes_k K \simeq k[Y]/(Y^p - X) \otimes_k k[Y']/(Y'^p - X) \simeq K[Y']/(Y'^p - X) = K[Y']/(Y'^p - Y^p) = K[Y']/(Y' - Y)^p$. L'élément $Y' - Y$ du dernier terme est donc nilpotent d'ordre p. Il correspond à l'élément $Y \otimes 1 - 1 \otimes Y$ de $K \otimes_k K$.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif unitaire et B une A-algèbre. Pour tout B-module M, on note $\mathrm{Der}_A(B, M) := \{d \in \mathrm{Hom}_A(B, M),\ \forall b, b' \in B,\ d(bb') = b.db' + b'.db\}$. Les éléments de $\mathrm{Der}_A(B, M)$ sont appelés *A-dérivations de B à valeurs dans M*.

i. Montrer que $\mathrm{Der}_A(B, M)$ est un sous A-module de $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ et que, pour tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(M, M')$, l'application $d \mapsto \varphi \circ d$ envoie $\mathrm{Der}_A(B, M)$ dans $\mathrm{Der}_A(B, M')$.

Vérification de routine.

ii. Supposons ici $B = A[X]$. Montrer que l'application $\mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow M$, $d \mapsto d(X)$ est bijective. Exprimer $d(f)$ en fonction de $dX := d(X)$ pour tout $f \in A[X]$.

Soit $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$. En tant qu'application A-linéaire, d est uniquement déterminée par ses valeurs sur les puissances X^n, $n \in \mathbb{N}$ de X, puisque celles-ci forment une A-base de B. Par définition d'une dérivation, on voit par récurrence que $d(X^n) = nX^{n-1}.dX$ (où le . est l'action de B sur M). Ainsi d est uniquement déterminée par $dX \in M$. De plus, on voit que $df = f'(X).dX$, en notant f' le polynôme dérivé. Étant donné $m \in M$, on peut alors poser $d_m f := f'.m$, cela définit une dérivation $B \longrightarrow M$ telle que $dX = m$.

iii. Supposons ici $B = A[X_1, \cdots, X_n]$.

(a) Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe une unique dérivation $\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathrm{Der}_A(B, B)$ qui envoie X_i sur 1 et X_j sur 0.

Fixons i et notons $A_i := A[X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_n]$, de sorte que $B = A_i[X_i]$. Par la propriété $d(bb') = bdb' + b'db$, une A-dérivation $d : B \longrightarrow B$ est A_i-linéaire (i.e. est une A_i-dérivation) si et seulement si elle est nulle sur A_i, i.e. $d|_{A_i} = 0$. D'après la question précédente, il existe une unique A_i-dérivation $\frac{\partial}{\partial X_i} : B \longrightarrow B$ qui envoie X_i sur 1.

(b) Montrer que l'application $\mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow M^n$, $d \mapsto (dX_1, \ldots, dX_n)$ est bijective. Exprimer df en fonction des dX_i pour tout $f \in A[X_1, \cdots, X_n]$.

Comme à la question ii, on calcule que $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}.dX_i$ pour toute dérivation $B \xrightarrow{d} M$, et que la formule $d_{m_1,\cdots,m_n} : f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i}.m_i$ définit une dérivation pour tout n-uplet $(m_1, \cdots, m_n) \in M^n$.

iv. Supposons la A-algèbre B engendrée par une famille $(x_i)_{i \in I}$. Montrer qu'une dérivation $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ est déterminée par l'image des x_i.

Soit $b \in B$. Il existe un sous-ensemble $\{i_1, \cdots, i_n\} \subset I$ et un polynôme $f \in A[X_1, \cdots, X_n]$ tel que $b = f(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})$. Comme au point précédent, on a alors la formule $db = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_k}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}).dx_k$, qui exprime db comme combinaison B-linéaire des dx_k..

v. Revenons à B générale. Posons $I := \mathrm{Ker}(B \otimes_A B \xrightarrow{m} B)$ où $m(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$, qui est un idéal de $B \otimes_A B$, puis posons $\Omega_{B|A} := I/I^2$, qui est un $B \otimes_A B$-module.

(a) Montrer que les deux structures de B-modules sur $\Omega_{B|A}$ obtenues par restriction des scalaires via $1 \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes 1$, $B \longrightarrow B \otimes_A B$, coïncident.

Soit $\omega \in \Omega_{B|A}$ et $\tilde{\omega} \in I$ un relèvement de ω dans I, de sorte que $\omega = \overline{\tilde{\omega}}$. On a alors $(b \otimes 1).\omega - (1 \otimes b).\omega = \overline{(b \otimes 1)\tilde{\omega} - (1 \otimes b)\tilde{\omega}} = \overline{(b \otimes 1 - 1 \otimes b)\tilde{\omega}}$. Or $b \otimes 1 - 1 \otimes b \in I$, donc $\overline{(b \otimes 1 - 1 \otimes b)\tilde{\omega}} = 0$. Les deux actions de $b \in B$ coïncident donc.

(b) Pour $b \in B$, posons $d_{B|A} b := (b \otimes 1 - 1 \otimes b) \pmod{I^2} \in \Omega_{B|A}$. Montrer que $d_{B|A} \in \mathrm{Der}_A(B, \Omega_{B|A})$.

Grâce à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} b.d_{B|A}(b') + b'.d_{B|A}(b) &= \overline{(b \otimes 1)(b' \otimes 1 - 1 \otimes b') + (1 \otimes b')(b \otimes 1 - 1 \otimes b)} \\ &= \overline{(bb' \otimes 1 - b \otimes b' + b \otimes b' - 1 \otimes bb')} \\ &= \overline{(bb' \otimes 1 - 1 \otimes bb')} = d_{B|A}(bb'). \end{aligned}$$

(c) Montrer que l'application $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ d_{B|A}$ est bijective, pour tout B-module M. [Partant de $d \in \mathrm{Der}_A(B, M)$, on pourra d'abord montrer l'existence d'un morphisme de B-modules $\tilde{\varphi} : B \otimes_A B \longrightarrow M$ tel que $\tilde{\varphi}(b \otimes b') = b.db'$, puis montrer que $\tilde{\varphi}_{|I^2} = 0$ et en déduire un $\varphi : I/I^2 \longrightarrow M$] Expliquer en quoi ceci fait de $d_{B|A}$ une "dérivation universelle".

TSVP

Soit $d \in \mathrm{Der}_A(B,M)$. En particulier, $d \in \mathrm{Hom}_A(B,M)$. Comme M est un B-module, le théorème d'adjonction nous fournit un unique $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, M)$ tel que $\tilde{\varphi}(b \otimes b') = bdb'$. Soit $c = \sum_i b_i \otimes b'_i$ et $\gamma = \sum_j \beta_j \otimes \beta'_j$ deux éléments de $I \subset B \otimes_A B$. Alors $\tilde{\varphi}(c.\gamma) = \sum_{i,j} b_i\beta_j.d(b'_i\beta'_j) = \sum_{i,j} b_i\beta_j b'_i.d(\beta'_j) + \sum_{i,j} b_i\beta_j\beta'_j.d(b'_i)$. Comme $c \in I$, on a $\sum_i b_i b'_i = 0$, donc $\sum_{i,j} b_i\beta_j b'_i.d(\beta'_j) = 0$. De même, puisque $\gamma \in I$, on a $\sum_j \beta_j\beta'_j = 0$, donc $\sum_{i,j} b_i\beta_j\beta'_j.d(b'_i) = 0$. On en déduit $\tilde{\varphi}(c\gamma) = 0$, et donc $\tilde{\varphi}|_{I^2} = 0$. Par propriété universelle des quotients, $\tilde{\varphi}$ se factorise par un morphisme de B-modules $\varphi = \varphi_d : \Omega_{B|A} \longrightarrow M$. On a ainsi construit une application A-linéaire $\mathrm{Der}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M)$, $d \mapsto \varphi_d := -\varphi$.

On calcule alors que $\varphi_d \circ d_{B|A}(b) = -\tilde{\varphi}(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = -(b.d1 - 1.db) = db$, ce qui montre que la composée $d \mapsto \varphi_d \mapsto \varphi_d \circ d_{B|A}$ est l'identité. Dans l'autre sens, soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M)$ et notons $d := \varphi \circ d_{B|A}$. Pour tout $c = \sum_i b_i \otimes b'_i \in I$, on a $\tilde{\varphi}_d(c) = -\sum_i b_i.db'_i = -\sum_i b_i.\varphi(\overline{b'_i \otimes 1 - 1 \otimes b'_i}) = \varphi(\sum_i b_i.\overline{1 \otimes b'_i - b'_i \otimes 1})$. dans M. Or, dans $\Omega_{B|A}$, on a $\sum_i b_i.\overline{1 \otimes b'_i - b'_i \otimes 1} = \overline{\sum_i (b_i \otimes b'_i - 1 \otimes b_i b'_i)} = \bar{c}$ car $\sum_i b_i b'_i = 0$. Il s'ensuit que la composée $\varphi \mapsto d := \varphi \circ d_{B|A} \mapsto \varphi_d$ est aussi l'identité.

(d) Si $B = A[X_1, \cdots, X_n]$, montrer que le B-module $\Omega_{B|A}$ est libre de base les $d_{B|A}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

D'après v)(c) et iii), pour tout B-module M, l'application $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow M^n$, $\varphi \mapsto (\varphi(d_{B|A}(X_1)), \cdots, \varphi(d_{B|A}(X_n)))$ est bijective. Autrement dit, si $\Delta : B^n \longrightarrow \Omega_{B|A}$ désigne l'application B-linéaire qui envoie le i-ème vecteur de la base canonique de B^n sur $d_{B|A}(X_i)$, alors pour tout B-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B^n, M)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \Delta$ est bijective. Cela implique que Δ est un isomorphisme. En effet, faisons $M = B^n$ et soit $\nabla \in \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, B^n)$ correspondant à $\mathrm{id}_{B^n} \in \mathrm{Hom}_B(B^n, B^n)$. On a donc $\nabla \circ \Delta = \mathrm{id}_{B^n}$. Il s'ensuit que $(\Delta \circ \nabla) \circ \Delta = \Delta = \mathrm{id}_{\Omega_{B|A}} \circ \Delta$. Donc, par la bijection dans le cas $M = \Omega_{B|A}$, on en déduit $\Delta \circ \nabla = \mathrm{id}_{\Omega_{B|A}}$.

(e) Si B est engendrée par une famille $(x_i)_{i \in I}$ comme A-algèbre, montrer que $\Omega_{B|A}$ est engendré par les $d_{B|A}(x_i)$, $i \in I$ comme B-module.

Dans ce cas, v)(c) et iv) nous disent que pour tout B-module M, l'application $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow M^n$, $\varphi \mapsto (\varphi(d_{B|A}(x_1)), \cdots, \varphi(d_{B|A}(x_n)))$ est injective. Autrement dit, si $D : B^n \longrightarrow \Omega_{B|A}$ désigne l'application B-linéaire qui envoie le i-ème vecteur de la base canonique de B^n sur $d_{B|A}(x_i)$, alors pour tout B-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B^n, M)$ est injective. Pour $M = \Omega_{B|A}$, cette application envoie $\mathrm{id}_{\Omega_{B|A}}$ sur D. Il s'ensuit que pour $M = \mathrm{coker}(D)$, cette application envoie la projection canonique $\pi : \Omega_{B|A} \twoheadrightarrow M$ sur 0. Par injectivité, on a $\pi = 0$, et donc $M = \{0\}$.

(f) Si B est un quotient ou une localisation de A, montrer que $\Omega_{B|A} = 0$.

Si $B = A/J$, on a $B \otimes_A B = (A/J) \otimes_A (A/J) = A/J = B$, tandis que si $B = S^{-1}A$, alors $B \otimes_A B = S^{-1}(S^{-1}A) = S^{-1}A = B$. Dans les deux cas, l'idéal $\mathrm{Ker}(B \otimes_A B \longrightarrow B)$ est nul, donc $\Omega_{B|A} = 0$.

vi. Soit C une B-algèbre.

(a) Montrer que la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C,M) \xrightarrow{d \mapsto d} \mathrm{Der}_A(C,M) \xrightarrow{d \mapsto d_{|B}} \mathrm{Der}_A(B,M)$ est exacte pour tout C-module M.

la flèche $d \mapsto d$ est clairement injective. De plus, pour $d \in \mathrm{Der}_A(C,M)$, un calcul montre que $d \in \mathrm{Der}_B(C,M) \Leftrightarrow d|_B = 0$.

(b) Montrer qu'il existe des morphismes de C-modules β et γ, uniques, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \otimes_B \Omega_{B|A} \arrow[r, dashed, "\beta"] & \Omega_{C|A} \arrow[r, dashed, "\gamma"] & \Omega_{C|B} \arrow[r] & 0 \\ C \otimes_B B \arrow[u, "\mathrm{id}_C \otimes d_{B|A}"] \arrow[r, "\simeq"] & C \arrow[u, "d_{C|A}"] \arrow[r, equal] & C \arrow[u, "d_{C|B}"] \end{tikzcd}$$

puis montrer que la ligne du haut de ce diagramme est une suite exacte.

Il y a deux manière de contruire β et γ. Soit en revenant à la définition de Ω, soit en utilisant sa propriété universelle v)(c).

A partir de la définition, β s'obtient par adjonction du morphisme de B-modules $\Omega_{B|A} \longrightarrow \Omega_{C|A}$ induit par le morphisme $B \otimes_A B \longrightarrow C \otimes_A C$, et γ est induit par le morphisme $C \otimes_A C \longrightarrow C \otimes_B C$.

A partir de la propriété universelle v)(c) : pour tout C-module M, l'application $\mathrm{Der}_B(C,M) \xrightarrow{d \mapsto d} \mathrm{Der}_A(C,M)$ fournit par v)(c) une application $\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|B}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|A}, M)$. Celle-ci est de la forme $\varphi \mapsto \varphi \circ \gamma$ pour γ correspondant à $\mathrm{id}_{\Omega_{C|B}}$ (et $M = \Omega_{C|B}$). De même on a pour tout C-module M une application $\mathrm{Der}_A(C,M) \xrightarrow{d \mapsto d_{|B}} \mathrm{Der}_A(B,M)$ qui fournit par v)(c) une application

$$\mathrm{Hom}_C(\Omega_{C|A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B|A}, M) = \mathrm{Hom}_C(C \otimes_B \Omega_{B|A}, M),$$

laquelle est de la forme $\varphi \mapsto \varphi \circ \beta$ pour β correspondant à $\mathrm{id}_{\Omega_{C|A}}$.

L'avantage de la construction avec la propriété universelle est que l'exactitude découle de celle de vi)(a).

(c) Supposons $C = B/J$ pour un idéal J de B. Montrer que la suite

$$J/J^2 = C \otimes_B J \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes d_{B|A}} C \otimes_B \Omega_{B|A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C|A} \longrightarrow 0$$

est exacte. [On pourra d'abord montrer que pour tout C-module M, la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C,M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(J,M)$ est exacte.]

vii. Soit $C = A[X_1, \cdots, X_n]/J$ où $J = (f_1, \cdots, f_m)$. Notons $C^n \xrightarrow{\delta} \Omega_{C|A}$ l'application C-linéaire qui envoie le vecteur e_i de la base canonique sur $d\overline{X}_i$, et $C^m \xrightarrow{\mathrm{jac}} C^n$ l'application C-linéaire dont la matrice est $(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_n))_{i,j}$. Montrer que la suite $C^m \xrightarrow{\mathrm{jac}} C^n \xrightarrow{D} \Omega_{C|A} \longrightarrow 0$

viii. Soit K/k une extension de corps engendrée par un élément α.

(a) Si α est transcendant sur k, montrer que le K-ev $\Omega_{K/k}$ est de dimension 1, de base $d_{K|k}\alpha$.

On applique vi)(b) avec $A = k$, $B = k[\alpha]$ et $C = K$. D'après v)(f), on a $\Omega_{C|B} = 0$, et d'après v)(d), $\Omega_{B|A}$ est un B-module libre de base $d_{B|A}\alpha$. Alors vi)(b) implique que $\Omega_{K|k}$ est engendré, comme K-ev, par $d_{K|k}\alpha$.

(b) Si α est algébrique, notons f_α son polynôme minimal et f'_α le polynôme dérivé de f_α. Montrer que $\dim_K \Omega_{K/k} = \begin{cases} 0 & \text{si } f'_\alpha \neq 0 \\ 1 & \text{si } f'_\alpha = 0 \end{cases}$

ix. Montrer $\Omega_{\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}} = 0$ et $\Omega_{\mathbb{C}|\mathbb{Q}} \neq 0$.