Algèbre II

Examen du 17 janvier 2018. Durée 3h00.

Seul document autorisé : le poly du cours. Smartphones éteints.

Exercice 1. Soit $A := \mathbb{Q}[T]$ et $K := \mathbb{Q}(T)$. Pour un entier $n > 1$, considérons le polynôme

$$f = X^n - TX - T \in A[X].$$

Si $t \in \mathbb{Q}$ on note $f_t = X^n - tX - t \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme f spécialisé en $T = t$.

i. Montrer que f est irréductible et séparable dans $K[X]$. On notera K_f un corps de décomposition de f sur K et $G_f := \mathrm{Gal}(K_f/K)$.

ii. Montrer que $f_{\frac{1}{2}}$ est le produit d'un polynôme irréductible de degré $n-1$ de $\mathbb{Q}[X]$ et d'un facteur de degré 1. En déduire qu'il existe une racine de f dans K_f dont le stabilisateur dans G_f agit transitivement sur les autres racines, puis en déduire que G_f agit *doublement* transitivement sur les racines de f dans K_f.

iii. Si $t \neq 0$, montrer que $\mathrm{pgcd}(f_t, f_t')$ divise $X - \frac{n}{1-n}$. En déduire que f_t est séparable sauf lorsque $t = t_0 := \frac{n^n}{(1-n)^{n-1}}$, auquel cas f_{t_0} est de la forme $(X - \frac{n}{1-n})^2 g_{t_0}$ avec g_{t_0} séparable et $g_{t_0}(\frac{n}{1-n}) \neq 0$.

iv. Montrer que $\mathrm{disc}(f) = (-1)^{n(n-1)/2} T^{n-1}(n-1)^{n-1}(t_0 - T)$. *On pourra utiliser la formule (en la justifiant)* $\mathrm{disc}(f) = (-1)^{n(n-1)/2}\det(f'(M_f))$ *où* M_f *est la matrice compagnon de* f.

v. Soit A_f la sous-A-algèbre de K_f engendrée par les racines de f et $\overline{A}_f := A_f/(T-t_0)A_f$.

(a) Montrer que $\overline{A}_f$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre de dimension $|G_f| = [K_f : \mathbb{Q}]$.

(b) Montrer que A_f contient une racine carrée δ de $\mathrm{disc}(f)$ et que l'image $\bar{\delta}$ de δ dans $\overline{A}_f$ est un nilpotent d'ordre 2 *non nul.*

(c) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\overline{A}_f$. Montrer qu'il existe deux racines α, β de f dans A_f telles que :

- $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \frac{n}{1-n}$ dans $\overline{A}_f/\mathfrak{m}$
- $\{\text{racines de } f \text{ dans } A_f\} \setminus \{\alpha, \beta\} \xrightarrow{\sim} \{\text{racines de } g_{t_0} \text{ dans } \overline{A}_f/\mathfrak{m}\}$ via $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$.

En déduire que $\overline{A}_f/\mathfrak{m}$ est un corps de décomposition de g_{t_0} sur $\mathbb{Q}$.

(d) Expliquer pourquoi l'action de G_f sur A_f induit une action sur $\overline{A}_f$ par automorphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres. Soit $G_{f,\mathfrak{m}} := \{\sigma \in G_f, \sigma(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}\}$ le stabilisateur de $\mathfrak{m}$ dans G_f. Expliquer pourquoi l'action de $G_{f,\mathfrak{m}}$ sur $\overline{A}_f$ induit une action sur $\overline{A}_f/\mathfrak{m}$ donnée par un morphisme de groupes $G_{f,\mathfrak{m}} \xrightarrow{\rho_\mathfrak{m}} \mathrm{Gal}((\overline{A}_f/\mathfrak{m})/\mathbb{Q})$.

TSVP

(e) Expliquer pourquoi G_f agit sur $\mathrm{Max}(\overline{A}_f)$. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \subset \mathrm{Max}(\overline{A}_f)$ l'orbite de $\mathfrak{m}$ sous G_f. Montrer que le morphisme produit $\overline{A}_f \longrightarrow \prod_{\mathfrak{n}\in\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}} \overline{A}_f/\mathfrak{n}$ est surjectif, *mais pas injectif.* En déduire l'inégalité stricte $|G_{f,\mathfrak{m}}| > [\overline{A}_f/\mathfrak{m} : \mathbb{Q}] = |G_{g_0}|$, et donc aussi que le morphisme $\rho_{\mathfrak{m}}$ n'est pas injectif.

(f) Montrer qu'un élément $\sigma \neq \mathrm{id}$ du noyau de $\rho_{\mathfrak{m}}$ est nécessairement la transposition (α, β).

vi. Montrer que $G_f \simeq \mathfrak{S}_n$. *Remarque : joint au théorème de spécialisation de Hilbert, ceci permet de voir que $\mathfrak{S}_n$ est groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ pour tout n.*

Exercice 2. Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux entière (tout $b \in B$ est entier sur A).

i. Montrer que si A et B sont intègres, A est un corps si et seulement si B est un corps.

ii. Montrer que si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, alors $\mathfrak{q} \in \mathrm{Max}(B) \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap A \in \mathrm{Max}(A)$.

iii. ("*lying over*") Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. On veut montrer qu'il existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ tel que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Posons $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$ et $B_{\mathfrak{p}} = S^{-1}B$ avec $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

(a) Montrer que le morphisme canonique $A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ déduit de l'inclusion $A \subset B$ fait de $B_{\mathfrak{p}}$ une extension entière de $A_{\mathfrak{p}}$.

(b) Soit $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ l'image réciproque d'un idéal maximal de $B_{\mathfrak{p}}$. Montrer que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

iv. ("*going up*") Soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(A)$ tels que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ tel que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Montrer qu'il existe $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(B)$ tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}'$.

v. ("*incomparability*") Nous voulons maintenant montrer que pour $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(B)$ tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, on a $(\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A) \Rightarrow (\mathfrak{q} = \mathfrak{q}')$.

(a) Se ramener au cas où $\mathfrak{q} = 0$, et A,B intègres.

(b) Montrer dans ce cas que si $\mathfrak{q}' \cap A = 0$, alors $B_{\mathfrak{q}'}$ est une $\mathrm{Frac}(A)$-algèbre intègre de dimension finie, et en conclure que $\mathfrak{q}' = 0$.

vi. (*dimension de Krull*) On appelle dimension d'un anneau A la longueur n maximale d'une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premiers de A. Montrer que si B est entier sur A alors $\dim(B) = \dim(A)$.

Remarque : joint au lemme de normalisation de Noether, ce résultat permet de montrer que la dimension de Krull d'une k-algèbre intègre est le degré de transcendance sur k de son corps des fractions.

Question bonus : le prouver !