Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
Master Mathématiques et applications

Faculté de Mathématiques
2015–2016

Algèbre et théorie de Galois

Examen du 15 décembre 2015. Durée 3h00.
Seuls documents autorisés : poly et notes de cours. Smartphones éteints.

Exercice 1. Soit $K \supset k$ une extension finie de corps. Pour $\alpha \in K$, la multiplication par α est un endomorphisme k-linéaire de K. Notons $\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha)$ sa trace, $\mathrm{N}_{K/k}(\alpha)$ son déterminant, et $\Phi_{K/k}(\alpha) \in k[X]$ son polynôme caractéristique.

i. Notons $f_\alpha = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme minimal de α sur k.

   (a) Rappeler pourquoi la famille $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ est une base de $k(\alpha)$ sur k, et écrire la matrice de la multiplication par α dans cette base.

   (b) En déduire que $\Phi_{k(\alpha)/k}(\alpha) = f_\alpha$, puis $\mathrm{Tr}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = -a_1$ et $\mathrm{N}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = (-1)^n a_n$.

   (c) Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $\Sigma_{k(\alpha)/k} := \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(k(\alpha), \overline{k})$. Montrer que si α est séparable sur k, alors on a les égalités dans $\overline{k}$

$$\mathrm{Tr}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_{k(\alpha)/k}} \sigma(\alpha) \text{ et } \mathrm{N}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = \textstyle\prod_{\sigma\in\Sigma_{k(\alpha)/k}} \sigma(\alpha).$$

ii. À l'aide d'un choix de base de K sur $k(\alpha)$, montrer $\Phi_{K/k}(\alpha) = \Phi_{k(\alpha)/k}(\alpha)^{[K:k(\alpha)]}$, et

$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha) = [K : k(\alpha)]\mathrm{Tr}_{k(\alpha)/k}(\alpha) \text{ et } \mathrm{N}_{K/k}(\alpha) = \mathrm{N}_{k(\alpha)/k}(\alpha)^{[K:k(\alpha)]}.$$

iii. Montrer que si K est séparable sur k, on a les égalités dans $\overline{k}$

$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha) = \textstyle\sum_{\sigma\in\Sigma_{K/k}} \sigma(\alpha) \text{ et } \mathrm{N}_{K/k}(\alpha) = \textstyle\prod_{\sigma\in\Sigma_{K/k}} \sigma(\alpha).$$

On pourra montrer que les fibres de l'application de restriction $\Sigma_{K/k} \longrightarrow \Sigma_{k(\alpha)/k}$ sont de cardinal $[K : k(\alpha)]$.

Exercice 2. Nous allons prouver le *Nullstellensatz* de Hilbert, qui peut s'énoncer ici : *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, k un corps, et $\mathfrak{m} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ un idéal maximal. Alors le corps $K = k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k.*

i. Traiter le cas $n = 1$.

ii. (a) Montrer qu'il existe une infinité de polynômes irréductibles 2 à 2 distincts dans l'anneau de polynômes $k[X]$.

TSVP

(b) Soit $A \subset k(X)$ une sous-$k[X]$-algèbre engendrée par des fractions rationnelles $q_1, \cdots, q_r \in k(X)$, et soit $d \in k[X]$ tel que $dq_i \in k[X]$. Montrer que pour tout $a \in A$ il existe $p > 0$ tel que $ad^p \in k[X]$. En déduire que $k(X)$ n'est pas une $k[X]$-algèbre de type fini.

(c) Plus généralement, si K' est une extension finie de $k(X)$, montrer que ce n'est pas une $k[X]$-algèbre de type fini. On pourra adapter l'argument précédent en considérant la matrice de la multiplication par un élément de K dans une base fixée de K sur $k(X)$

iii. On suppose maintenant qu'on a prouvé le Nullstellensatz jusqu'au rang $n-1$ (pour tout k et $\mathfrak{m}$).

(a) Soit k_1 le sous-corps de K engendré par k et l'image de X_1. Montrer que K est une extension finie de k_1.

(b) Utiliser ii.(c) pour en déduire que X_1 est algébrique sur k. En conclure que le Nullstellensatz est vrai en rang n.

iv. Application. Soit $f_1, \cdots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$. Montrer que si l'idéal $(f_1, \cdots, f_m)$ n'est pas l'idéal unité alors il existe $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $f_1(z_1, \cdots, z_n) = \cdots = f_m(z_1, \cdots, z_n) = 0$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif, B une A-algèbre, et $M \xrightarrow{u} N$ un morphisme de A-modules.

i. Montrer qu'il existe un unique morphisme de B-modules $u_B : B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A N$ tel que $u_B(1 \otimes m) = 1 \otimes u(m)$ pour tout $m \in M$.

ii. Montrer que si u est surjectif, alors u_B est aussi surjectif.

iii. Montrer sur un exemple que si u est injectif, u_B ne l'est pas nécessairement.

iv. Montrer que si u est injectif, alors u_B l'est aussi dans les cas suivant :

(a) $B = S^{-1}A$ pour une partie multiplicative $S \subset A \setminus \{0\}$.

(b) $B = A[X]$ pour une indéterminée X.