Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
LM 120 "Calcul matriciel" MIME 12

Faculté de Mathématiques
2007–2008

Feuille d'exercices n. 5

Applications Linéaires

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires sur $\mathbb{R}$? Si oui, indiquez leur noyau et leur image ; déduisez-en si elles sont injectives, surjectives, bijectives. Dans le cas d'une application linéaire, indiquez également la matrice associée dans les bases canoniques.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 3 \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (-x, 3y + x) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto |z+1|^2 - |z|^2 - 1 \end{cases} \qquad f_6 : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto i\overline{z} + 1 \end{cases}$$

$$f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 3x + 4y \end{cases} \qquad f_8 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, 1) \end{cases} \qquad f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (xy + x - z, x) \end{cases}$$

$$f_{10} : \begin{cases} \mathbb{R}_7[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases} \qquad f_{11} : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P \mapsto XP' + 1 \end{cases} \qquad f_{12} : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto \tilde{P} : \ \tilde{P}(X) = P(X^2) \end{cases}$$

Les applications f_4, f_5 et f_6 sont-elles linéaires sur $\mathbb{C}$?

2. Dans chacun des cas suivants, déterminez s'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

a. $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((2, -2)) = (3, 2)$.

b. $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((1, 1)) = (3, 2)$.

c. $T((1, -1)) = (2, 3)$ et $T((2, -2)) = (6, 9)$.

Lorsqu'une telle application existe, on en donnera la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3. On considère un espace vectoriel réel E, de dimension 3, muni d'une base $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Soit λ un réel. Montrez qu'il existe une unique application linéaire φ_λ de E dans E, telle que : $\varphi_\lambda(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi_\lambda(e_2) = e_2 - e_1$ et $\varphi_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$. Pour quelles valeurs de λ, φ_λ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

4. On définit l'application φ :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x + z, 2x + y) \end{cases}.$$

Montrez que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + z = 0\}.$$

Calculez $\varphi(F)$.

5. (*) Soit E un espace vectoriel sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E.

a. On définit l'application $\psi : \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v}. \end{array}$
Montrez que ψ est une application linéaire sur K. Identifiez son image

b. On considère ensuite l'application $f : \begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & F \times G \\ \vec{u} & \mapsto & (\vec{u}, -\vec{u}) \end{array}$.
Montrez que f établit un isomorphisme de $F \cap G$ sur Ker ψ. Retrouvez alors la formule :
$$\dim\,(E + F) = \dim\,(E) + \dim\,(F) - \dim\,(E \cap F).$$

6. Soit a un paramètre réel. On pose
$$\vec{X}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{X}_2 = (-a, 2, 3, a) \quad \text{et} \quad \vec{X}_3 = (a^2, 4, 9, a^2).$$
Calculer le rang de $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ en fonction de la valeur de a.

7. Déterminer sans faire de calculs le rang de la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & a & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3a & 3 \end{pmatrix},$$
où a est un paramètre réel.

8. Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Chercher le noyau et l'image de u. Calculer son rang de deux manières. Calculer la matrice de u^2 dans la base e. Montrer que $u^2 - 3u = 0$.

9. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est
$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$
Montrer que les vecteurs
$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de u par rapport à cette base.

10. (*) Soit E un espace vectoriel réel et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -I$.

a. Montrer que u est bijectif.

b. On suppose que les $2p - 1$ vecteurs $x_1, \ldots, x_p, u(x_1), \ldots, u(x_{p-1})$ sont linéairement indépendants. Montrer que les $2p$ vecteurs $x_1, \ldots, x_p, u(x_1), \ldots, u(x_p)$ sont linéairement indépendants.

c. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que E possède une base de la forme
$$x_1, \ldots, x_p, u(x_1), \ldots, u(x_p)$$
et est de dimension paire. Donner la matrice de u dans cette base.