Université Pierre et Marie Curie - Paris VI | Faculté de Mathématiques
LM 120 "Calcul matriciel" MIME 12 | 2007–2008

Feuille d'exercices n. 6

Applications Linéaires (suite)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f^2 \neq 0$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $s \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que $\ker(s - \mathrm{id}_E) \cap \ker(s + \mathrm{id}_E) = 0$.

b. Vérifier que $x + s(x) \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et que $x - s(x) \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$.

c. En déduire que $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s - \mathrm{id}_E)$

Application : une matrice carrée est dite symétrique, resp. antisymétrique, si elle est égale à sa transposée, resp à l'opposée de sa transposée. Montrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

4. Fixons un entier n et, pour $1 \leq i, j \leq n$, notons E_{ij} la mtrice élémentaire dont tous les termes sont nuls sauf celui à la ligne i et colonne j qui vaut 1. Prouver que pour tous $1 \leq i, j, k, l \leq n$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ où δ_{jk} désigne le "symbole de Kronecker", qui vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon.

5. On définit la trace $\mathrm{tr}(A)$ d'une matrice carrée A comme la somme de ses termes diagonaux.

a. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$ est linéaire.

b. Donner une base de son noyau en utilisant les matrices élémentaires E_{ij}.

c. Montrer que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

6. On dit que deux matrices carrées A et B de même taille *commutent* si on a $AB = BA$.

a. Trouver l'ensemble des matrices qui commutent à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. Trouver l'ensemble des matrices qui commutent à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en discutant selon les valeurs du réel λ.

c. Trouver l'ensemble des matrices qui commutent à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ en discutant selon les valeurs des réels $\mu \geq \lambda \geq 0$.

Déterminants

7. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}.$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Exprimer $\text{dét}(-A)$ en fonction de $\text{dét}A$.
b) On suppose que n est impair et que l'on a ${}^tA = -A$. Montrer que $\text{dét}A = 0$.

9. Montrer, sans le calculer que le déterminant suivant est divisible par 17 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

On utilisera le fait que 1785, 4131, 1615 et 5763 sont divisibles par 17.

10. Posons

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

a) Calculer $\text{dét}A_2$ et $\text{dét}A_3$.
b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\text{dét}A_{n+2} = 2\text{dét}A_{n+1} - \text{dét}A_n$.
c) En déduire la valeur de $\text{dét}A_n$ pour tout $n \geq 2$.

11. Soit x un nombre réel. Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}.$$