Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
Master Mathématiques fondamentales

Faculté de Mathématiques
2014–2015

Formes modulaires et applications

Corrigé succinct de l'examen du 2 Mars 2015.

Exercice 1. Soit p un premier > 3.

i. *Montrer que pour $\gamma \in \Gamma_0(p)$, si $\mathrm{tr}(\gamma) = 2$ alors $\gamma \in \Gamma_1(p)$.*

Ecrivons $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ et notons $\bar{a}, \bar{d}$ les images de a, d dans $\mathbb{F}_p$. On a $ad - bc = 1$ dans $\mathbb{Z}$, donc $\bar{a}\bar{d} = 1$ dans $\mathbb{F}_p$. L'hypothèse $a + d = 2$ dit alors que $\bar{a}$ et $\bar{d}$ sont les racines du trinôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Donc $\bar{a} = \bar{d} = 1$ comme voulu.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, on a $\Gamma_0(p)_x = \Gamma_1(p)_x.\{\pm 1\}$.

Un élément parabolique de $\Gamma_0(p)$ a pour trace ± 2, donc appartient à $\Gamma_1(p).\{\pm 1\}$ d'après ce qui précède.

ii. *Montrer que lorsqu'on a deux sous-groupes d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma(1)$, l'indice de ramification de $\pi : X(\Gamma') \longrightarrow X(\Gamma)$ en la pointe $\pi_{\Gamma'}(x)$ (où $\pi_{\Gamma'} : \mathbb{H}^* \longrightarrow X(\Gamma)$) est égal à l'indice $[\Gamma_x.\{\pm 1\} : \Gamma'_x.\{\pm 1\}]$.*

Notons h_Γ la largeur de x pour Γ. On a donc $\Gamma_x.\{\pm 1\} = \{\pm 1\}.\left[\begin{smallmatrix} 1 & h_\Gamma \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]^{\mathbb{Z}}$. On note de même $h_{\Gamma'}$, et on constate que l'indice ci-dessus est aussi $h_\Gamma / h_{\Gamma'}$. Soit $\alpha \in \Gamma(1)$ tel que $\alpha x = \infty$. On sait que la fonction $u_\Gamma = \exp(2\pi i \alpha z / h_\Gamma)$ induit une coordonnée locale au voisinage de $\pi_\Gamma(x)$ dans $X(\Gamma)$, et idem pour $u_{\Gamma'}$. Dans ces coordonnées, la projection π est donc donnée par $u_{\Gamma'} \mapsto u_{\Gamma'} = u_\Gamma^{h_\Gamma / h_{\Gamma'}}$ d'où l'indice de ramification annoncé.

iii. *En déduire que le nombre de pointes de $X_1(p)$ est $\frac{p-1}{2}$ fois celui de $X_0(p)$.*

D'après i. et ii., la projection $\pi : X_1(p) \longrightarrow X_0(p)$ est non ramifiée en toute pointe de $X_1(p)$. Cela implique que pour toute pointe $\bar{x} \in X_0(p)$ la fibre $\pi^{-1}(\bar{x})$ est de cardinal égal au degré de π, *i.e.* à l'indice $[\Gamma_0(p).\{\pm 1\} : \Gamma_1(p).\{\pm 1\}] = \frac{p-1}{2}$ (car $p > 2$).

iv. *Montrer que $X_0(p)$ possède 2 pointes : l'image de ∞ et celle de 0. Quelle est leur largeur respective ?*

On a vu en TD que $X_0(p)$ a 2 pointes : l'image $\bar{\infty}$ de ∞ et celle $\bar{0}$ de 0. La largeur en $\bar{\infty}$ est évidemment $h_{\bar{\infty}} = 1$. Puisque $\Gamma(1)_0 = \{\pm 1\}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]^{\mathbb{Z}}$, on a $\Gamma_0(p)_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right]^{\mathbb{Z}}$ donc la largeur en 0 est visiblement $h_{\bar{0}} = p$.

TSVP

v. *Montrer que* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_2(\Gamma_1(p))) = 1 + \frac{p^2-1}{24} - \frac{p-1}{2}$.

C'est une application de la formule $\dim(\mathcal{S}_2(\Gamma_1(p))) = \mathrm{genre}(X_1(p))$, sachant que puisque $p > 3$, on a $n_2 = n_3 = 0$ (vu en TD).

Exercice 2. *Soit* $\eta(z) := q_{24} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ *où* $q = \exp(2\pi i z)$ *et* $q_{24} = \exp(2\pi i z/24)$.

i. *Montrer que pour tout* $N > 0$*, la fonction* $[\eta(z)\eta(Nz)]^{24}$ *est dans* $\mathcal{S}_{24}(\Gamma_0(N))$

On sait que $\eta(z)^{24} = (2\pi)^{-12}\Delta(z) \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1))$. Par un calcul effectué plusieurs fois en cours, $\eta(Nz)^{24} = N^{-6}\eta^{24}[\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]_{12}(z) \in \mathcal{S}_{12}([\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]^{-1}\Gamma(1)[\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}])$ donc appartient aussi à $\mathcal{S}_{12}([\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]^{-1}\Gamma(1)[\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}] \cap \Gamma(1)) = \mathcal{S}_{12}(\Gamma_0(N))$. Le produit des deux appartient donc à $\mathcal{S}_{24}(\Gamma_0(N))$.

ii. *Supposons* N *premier. Montrer que l'ordre d'annulation de* $[\eta(z)\eta(Nz)]^{24}$ *en toute pointe est* $N+1$ *(nb : utiliser le iv. de l'exercice précédent).*

D'après le iv de l'exercice précédent, il suffit de considérer les pointes ∞ et 0.

En $x = \infty$, la largeur est 1 donc la coordonnée locale est $q = \exp(2\pi i z)$, et on a le développement $\eta^{24}(z) = q + \sum_{n>1} \tau_n q^n$ donc $\eta^{24}(Nz) = q^N + \sum_{n>1} \tau_2 q^{nN}$, ce qui donne $\eta^{24}(z)\eta^{24}(Nz) = q^{N+1}+$ termes de rang supérieur.

En $x = 0 = [\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]^{-1}\infty$, la largeur est N donc on doit développer la fonction $[\eta(.)\eta(N.)]^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{24}(z)$ dans la coordonnée locale $q_N = \exp(2\pi i z/N)$. Puisque $\eta^{24} \in \mathcal{S}_{12}(\Gamma(1))$, on a $\eta^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{12}(z) = \eta^{24}(z) = q_N^N + \sum_{n>1} \tau_n q_N^{nN}$. Par ailleurs on a

$$\eta(N.)^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{12}(z) = N^{-6}\eta^{24}[\begin{smallmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]_{12}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{12}(z) = N^{-6}\eta^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{12}\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -N \end{smallmatrix}\right]_{12} = \eta^{24}(z/N)$$

donc $\eta(N.)^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{12}(z) = q_N + \sum_{n>1} \tau_n q_N^n$. En prenant le produit, on obtient bien $[\eta(.)\eta(N.)]^{24}[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]_{24}(z) = q_N^{N+1}+$ termes de rang supérieur, comme voulu.

iii. *Soit* $f \in \mathcal{S}_2(\Gamma_1(11))$*. Montrer que* $f^{12}.[\eta(z)\eta(11z)]^{-24}$ *est une forme modulaire de poids* 0*, donc est constante. En déduire que* $\mathcal{S}_2(\Gamma_1(11)) = \mathbb{C}.[\eta(z)\eta(11z)]^2$.

Comme f et $[\eta(z)\eta(Nz)]^{24}$ sont modulaires de poids 24, leur quotient est une fonction modulaire de poids 0, i.e. définit une fonction méromorphe ϕ sur $X_1(11)$. On sait que η^{24} ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$ donc ce quotient est holomorphe sur $\mathbb{H}$, i.e. ϕ est holomorphe sur $Y_1(11)$. De plus, étant parabolique, f s'annule en toute pointe, donc f^{12} s'annule à l'ordre au moins $12 = N+1$ en toute pointe. Par le point précédent, le quotient est donc d'ordre positif en toute pointe, et la fonction méromorphe ϕ est en fait holomorphe, donc constante.

D'après le v. de l'exo précédent, on sait que $\mathcal{S}_2(\Gamma_1(11))$ est de dimension 1, et en particulier non nul. D'après ce qui précède, il existe donc une fonction $\varepsilon(z)$ à valeurs dans μ_{12} (racines 12-èmes de l'unité) telle que $\varepsilon(z)[\eta(z)\eta(Nz)]^2$ soit dans $\mathcal{S}_2(\Gamma_1(11))$. Mais ε doit être continue, donc constante.

TSVP

iv. *Montrer que* $f(z) := [\eta(z)\eta(11z)]^2 \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$.

Puisque $\mathcal{S}_2(X_1(11))$ est de dimension 1, il existe un unique caractère $\chi : \Gamma_0(11)/\Gamma_1(11) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $f \in \mathcal{S}_2(11, \chi)$. Notons qu'on doit avoir $\chi(-1) = 1$ puisque $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]_{12}$ agit par l'identité. Ainsi, χ est un caractère de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$ qui est un groupe cyclique d'ordre 5. D'un autre côté, puisque $f^{12} \in \mathcal{S}_{24}(\Gamma_0(11))$, on voit que $\chi^{12} = 1$. Comme 5 et 12 sont premiers entre eux, il s'ensuit que $\chi = 1$.

v. *Montrer que* f *est une forme primitive dans* $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$ *et que* $a_2(f) = -2$.

Comme $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(1))$ est de dimension 1, f est propre pour tous les opérateurs de Hecke. On voit en développant le produit à l'aide de la formule donnant η que f est normalisée et $a_2(f) = -2$. De plus, comme $\mathcal{S}_2(\Gamma(1)) = \{0\}$, f est nécessairement nouvelle. Tout cela nous dit que f est primitive.

Exercice 3. *On continue de noter* f *l'unique forme primitive dans* $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$ *de l'exercice précédent. Pour* $i = 0, 1, 2, 3$ *on pose* $f_i(z) := f(2^i z)$. *(donc* $f_0 = f$*)*

i. *Montrer que* $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ *forment une famille libre dans* $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(88))$.

Par un calcul habituel (et rappelé dans le ii. de l'exercice 2) on a $f_i \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(2^i.11))$, donc tous les f_i sont dans $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(88))$. Le q-développement de f_i est de la forme $q^{2^i} +$ termes supérieurs. On en déduit immédiatement que la famille est libre.

ii. *Notons* $[T(p)]_2 := [\Gamma_0(88)\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(88)]_2$ *l'opérateur de Hecke en* p *de niveau* $N = 88$. *Montrer que les* f_i *sont propres pour tous les* $[T(p)]_2$, $p \neq 2$. *Quelles sont les valeurs propres ?*

Pour $p \neq 2, 11$, l'action de $[T(p)]_2$ sur le q-développement de $g \in \mathcal{S}_0(88)$ est donnée par la formule

$$a_m(g[T(p)]) = \begin{cases} a_{mp}(g) & \text{si } p \nmid m \\ a_{mp}(g) + p a_{m/p}(g) & \text{si } p | m \end{cases}$$

Lorsque $g = f_0$ on remarque que ces formules sont les mêmes que celles de l'opérateur $T(p)$ en niveau 11 agissant sur f. Comme f est propre de valeur propre $a_p(f)$, on a donc

$$\forall m \in \mathbb{N},\ a_m(f_0[T(p)]) = a_p(f) a_m(f_0).$$

Mais pour $i = 1, 2, 3$, on a $a_m(f_i) = a_{m/2^i}(f_0)$ en convenant que $a_r = 0$ si $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Puisque $p \neq 2$, la formule ci-dessus implique que $a_m(f_i[T(p)]) = a_{m/2^i}(f[T(p)]) = a_p(f)a_{m/2^i}(f) = a_p(f)a_m(f_i)$. Donc f_i est propre pour $[T(p)]_2$ de même valeur propre que f. Lorsque $p = 11$, le même raisonnement s'applique sauf que la formule donnant $[T(11)]$ est plus simple : on a $a_m(g[T(11)]) = a_{11m}(g)$ pour tout m.

iii. *Montrer que* $f_i[T(2)]_2 = f_{i-1}$ *pour* $i = 1, 2, 3$.

Comme dans le cas $p = 11$, l'action de $T(2)$ sur une fonction $g \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(88))$ est donnée par $a_m(g[T(2)]) = a_{2m}(g)$ pour tout m. D'un autre côté, pour $i = 1, 2, 3$, on a $a_{2m}(f_i) = a_m(f_{i-1})$ pour tout m. D'où la formule annoncée.

iv. *Montrer que* $f_0[T(2)]_2 = -2f_0 - 2f_1$.

Comme ci-dessus on a $a_m(f_0[T(2)]) = a_{2m}(f_0)$ pour tout m. On se rappelle maintenant que $f_0 = f \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$ est propre, de valeur propre $a_2(f) = -2$, pour l'opérateur ${}^{11}T(2) = [\Gamma_0(11)[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}]\Gamma_0(11)]$. L'action de ${}^{11}T(2)$ n'est pas donnée par la même formule que celle de $T(2) = {}^{88}T(2)$ car $2 \nmid 11$. La formule donnant l'action de ${}^{11}T(2)$ sur le q-développement donne

$$-2a_m(f) = a_m(f[{}^{11}T(2)]) = \begin{cases} a_{2m}(f) & \text{si } 2 \nmid m \\ a_{2m}(f) + 2a_{m/2}(f) & \text{si } 2|m \end{cases}$$

On en déduit que

$$a_m(f_0[T(2]))= -2a_m(f) - 2a_{m/2}(f) = -2a_m(f_0) - 2a_m(f_1).$$

v. *En déduire que l'espace* $\sum_i \mathbb{C} f_i$ *est stable par* $\mathcal{H}_0(88)$, *contient 3 formes normalisées propres pour* $\mathcal{H}_0(88)$, *mais aucune base formée de formes propres pour* $\mathcal{H}_0(88)$ *(*i.e. *l'action de* $\mathcal{H}_0(88)$ *n'est pas simultanément diagonalisable).*

Les calculs précédents montrent que l'espace engendré par les f_i est stable par tous les $T(p)$, donc stable par $\mathcal{H}_0(88)$. La matrice donnant l'action de $[T(2)]$ dans la base des f_i est $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ qui a 3 valeurs propres $-1+i$, $-1-i$ et 0. On remarque que le noyau est de dimension 1, donc $T(2)$ n'est pas diagonalisable et a fortiori l'action de $\mathcal{H}_0(88)$ ne l'est pas non plus. Par contre $T(2)$ admet trois droites propres, non contenues dans $\mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$, donc contenant une (unique) forme propre normalisée (i.e. $a_1 = 1$). Comme on l'a vu, ces droites sont aussi propres pour les autres $T(p)$.