Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
Master Mathématiques fondamentales

Faculté de Mathématiques
2014–2015

Formes modulaires et applications

Examen du 2 Mars 2015. Durée 3h00.

Exercice 1. Soit p un premier > 3.

i. Montrer que pour $\gamma \in \Gamma_0(p)$, si $\mathrm{tr}(\gamma) = 2$ alors $\gamma \in \Gamma_1(p)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, on a $\Gamma_0(p)_x = \Gamma_1(p)_x.\{\pm 1\}$.

ii. Montrer que lorsqu'on a deux sous-groupes d'indice fini $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma(1)$, l'indice de ramification de $\pi : X(\Gamma') \longrightarrow X(\Gamma)$ en la pointe $\pi_{\Gamma'}(x)$ (où $\pi_{\Gamma'} : \mathbb{H}^* \longrightarrow X(\Gamma)$) est égal à l'indice $[\Gamma_x.\{\pm 1\} : \Gamma'_x.\{\pm 1\}]$.

iii. En déduire que le nombre de pointes de $X_1(p)$ est $\frac{p-1}{2}$ fois celui de $X_0(p)$.

iv. Montrer que $X_0(p)$ possède 2 pointes : l'image de ∞ et celle de 0. Quelle est leur largeur respective ?

v. Montrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_2(\Gamma_1(p))) = 1 + \frac{p^2-1}{24} - \frac{p-1}{2}$.

Exercice 2. Soit $\eta(z) := q_{24} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$ où $q = \exp(2\pi i z)$ et $q_{24} = \exp(2\pi i z/24)$.

i. Montrer que pour tout $N > 0$, la fonction $[\eta(z)\eta(Nz)]^{24}$ est dans $\mathcal{S}_{24}(\Gamma_0(N))$

ii. Supposons N premier. Montrer que l'ordre d'annulation de $[\eta(z)\eta(Nz)]^{24}$ en toute pointe est $N + 1$ (nb : utiliser le iv. de l'exercice précédent).

iii. Soit $f \in \mathcal{S}_2(\Gamma_1(11))$. Montrer que $f^{12}.[\eta(z)\eta(11z)]^{-24}$ est une forme modulaire de poids 0, donc est constante. En déduire que $\mathcal{S}_2(\Gamma_1(11)) = \mathbb{C}.[\eta(z)\eta(11z)]^2$. (utiliser le v. de l'exercice précédent)

iv. Montrer que $f(z) := [\eta(z)\eta(11z)]^2 \in \mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$. (indication : on sait que $f \in \mathcal{S}_2(11, \chi)$ pour un certain χ. Il faut prouver que $\chi = 1$).

v. Montrer que f est une forme primitive dans $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$ et que $a_2(f) = -2$. (où, comme d'habitude, on écrit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f)q^n$).

TSVP

Exercice 3. On continue de noter f l'unique forme primitive dans $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(11))$ de l'exercice précédent. Pour $i = 0, 1, 2, 3$ on pose $f_i(z) := f(2^i z)$. (donc $f_0 = f$)

i. Montrer que $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ forment une famille libre dans $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(88))$.

ii. Notons $[T(p)]_2 := [\Gamma_0(88)\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right]\Gamma_0(88)]_2$ l'opérateur de Hecke en p de niveau $N = 88$. Montrer que les f_i sont propres pour tous les $[T(p)]_2$, $p \neq 2$. Quelles sont les valeurs propres ?

iii. Montrer que $f_i[T(2)]_2 = f_{i-1}$ pour $i = 1, 2, 3$.

iv. Montrer que $f_0[T(2)]_2 = -2f_0 - 2f_1$.

v. En déduire que l'espace $\sum_i \mathbb{C}f_i$ est stable par $\mathcal{H}_0(88)$, contient 3 formes normalisées propres pour $\mathcal{H}_0(88)$, mais aucune base formée de formes propres pour $\mathcal{H}_0(88)$ (*i.e.* l'action de $\mathcal{H}_0(88)$ n'est pas simultanément diagonalisable).