Exercice 1. Soit Γ un groupe discret et $h > 0$ tel que $\left[\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma_\infty$. Fixons $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma$ et considérons la suite définie par récurrence par $\gamma_{n+1} := \gamma_n \left[\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \gamma_n^{-1}$ avec $\gamma_1 = \gamma$.

i. Montrer que si $|ch| < 1$, alors la suite tend vers $\left[\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

ii. Montrer que, sous la même hypothèse, $\gamma \in \Gamma_\infty$.

Exercice 2. Soit $N > 1$ entier.

i. Montrer que l'application de réduction $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est surjective.

ii. Montrer que l'indice $[\Gamma(1) : \Gamma(N)]$ vaut $N^3 \prod_{p|N}(1 - p^{-2})$. Quel est le degré d_N de $X(N) \longrightarrow X(1)$?

iii. Montrer que $\Gamma(N)$ n'a pas de points elliptiques.

iv. Montrer que $\Gamma(N)$ possède d_N/N pointes.

v. Quel est le genre de $\Gamma(N)$?

Exercice 3. Montrer que $\Gamma_1(N)$ n'a pas de point elliptique pour $N > 3$. Quels sont les points elliptiques de $\Gamma_1(2)$ et $\Gamma_1(3)$?

Exercice 4. Soit p un nombre premier et $X_0(p) := \Gamma_0(p)\backslash\mathbb{H}^*$. Pour $k = 0, \cdots, p-1$ on note $\alpha_k := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{smallmatrix}\right]$ et aussi $\alpha_\infty = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

i. Montrer que les α_k (y compris $k = \infty$) sont des représentants des $\Gamma_0(p)$-classes à gauche dans $\Gamma(1)$.

ii. Montrer que $X_0(p)$ a deux pointes.

iii. Montrer que $\Gamma_{\alpha_k i} \neq \{\pm 1\}$ si et seulement si $k^2 + 1 = 0 (\mathrm{mod}\ p)$. En déduire que le nombre de points elliptiques d'ordre 2 dans $X_0(p)$ est 2 si $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, 0 si $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ et 1 si $p = 2$.

iv. Montrer que $\Gamma_{\alpha_k j} \neq \{\pm 1\}$ si et seulement si $k^2 - k + 1 = 0 (\mathrm{mod}\ p)$. En déduire que le nombre de points elliptiques d'ordre 3 dans $X_0(p)$ est 2 si $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, 0 si $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ et 1 si $p = 3$.

v. Montrer que le genre de $X_0(p)$ est $\lfloor \frac{p+1}{12} \rfloor - 1$ si $p = 1 (\ \mathrm{mod}\ 12)$ ou $\lfloor \frac{p+1}{12} \rfloor$ sinon.