Exercice 1. Soit Γ un sous-groupe de congruences et $k \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$, alors $z \mapsto |f(z)|\Im(z)^{k/2}$ est invariante par Γ.

ii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$, alors $z \mapsto |f(z)|\Im(z)^{k/2}$ est bornée.

iii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ et $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \exp(2i\pi nz/h)$ est son q-développement à la pointe ∞, alors $a_n = O(n^{k/2})$.

Exercice 2. Si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$, on note $\sum_n a_n q^n$, $q = \exp(2i\pi z)$, son développement en la pointe ∞. On définit la "série de Dirichlet" associé à f par $L(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$.

i. Prenons $N = 1$ et $f = -\frac{B_k}{2k}E_k$ (série d'Eisenstein). Montrer que $L(s,E_k)$ converge pour $\Re(s) > k$, puis que $L(s,E_k) = \zeta(s)\zeta(s-k+1)$.

ii. Montrer que si f est parabolique, alors $L(s,f)$ converge pour $\Re(s) > k/2+1$.

iii. Prenons $N = 1$ et $f = \Delta$. Dans ce cas on écrit $\tau(n) = a_n$.

(a) Montrer que les propriétés de multiplicativité ($\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ pour $(n,m) = 1$ et $\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$) équivalent au produit Eulérien

$$L(s,f) = \prod_p \frac{1}{1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s}}.$$

(b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. $\tau(n) = o(n^{11/2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

ii. pour tout premier p, les racines u et v de $X^2 - \tau(p)X + p^{11}$ sont de valeur absolue $p^{11/2}$ (ou de manière équivalente, sont conjuguées).

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$. On définit deux familles d'opérateurs $T(n), R(n) : \mathbb{Z}[\mathcal{R}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{R}]$, $n \in \mathbb{N}$ par les formules

$$T(n)([\Lambda]) := \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} [\Lambda'] \quad \text{et} \quad R(n)([\Lambda]) = [n\Lambda].$$

i. Montrer que $T(nm) = T(n) \circ T(m)$ si $(n,m) = 1$.

ii. Montrer que $T(p^{r+1}) = T(p^r) \circ T(p) - pR(p) \circ T(p^{r-1})$ si p est premier.

TSVP

iii. Montrer que $T(n) \circ T(m) = \sum_{0<d|\mathrm{pgcd}(m,n)} dR(d) \circ T(mn/d^2)$.

iv. On fait agir ces opérateurs sur les fonctions sur $\mathcal{R}$ (étendues par linéarité en des fonctions sur $\mathbb{Z}[\mathcal{R}]$). Par exemple pour $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ on a $(T(n)F)(\Lambda) = \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} F(\Lambda')$. Montrer que les fonctions homogènes de poids k sont préservées. On en déduit une action sur les fonctions automorphes de poids k sous $\Gamma(1)$.

v. Montrer qu'un réseau d'indice n dans $\Lambda_z = z\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est de la forme $(az+b)\mathbb{Z} \oplus d\mathbb{Z}$ pour une unique matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right]$ telle que $ad = n$, $a > 0$, et $0 \leqslant b < d$. En déduire une formule explicite de l'action de $T(n)$ sur une fonction $f(z)$ automorphe de poids k sous $\Gamma(1)$.

vi. Montrer que cette action préserve les formes modulaires (paraboliques), et que si $f(z) = \sum_m a_m q^m$, alors $T(n)f(z) = \sum_m b_m q^m$ avec $b_n = \sum_{d|\mathrm{pgcd}(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}$.

vii. Montrer que si f est vecteur propre de tous les $T(n)$, pour la valeur propre $\lambda(n)$, alors $a_n = a_1.\lambda(n)$. Supposons $a_1 = 1$; montrer alors que

$$L(s,f) = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

viii. Montrer les propriétés de multiplicativité de la fonction τ de Ramanujan.

ix. Montrer que la série d'Eisenstein E_k est vecteur propre de tous les $T(n)$.

x. Notons $\mathcal{M}_{k,\mathbb{Z}}(\Gamma(1)) := \{f = \sum_n a_n q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1)),\ a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que c'est une "$\mathbb{Z}$-structure" de $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$, *i.e.* un $\mathbb{Z}$-module libre de rang égal à la dimension de $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$. (On pourra utiliser le fait que E_4 et E_6 sont dans $\mathcal{M}_{k,\mathbb{Z}}(\Gamma(1))$).

xi. Montrer que les valeurs propres des $T(n)$ sur $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$ sont des entiers algébriques.