Exercice 1. On rappelle que pour $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ on note $i_l f$ la fonction $z \mapsto f(lz)$, et que pour $N \geqslant 1$ on a $i_l \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N)) \subset \mathcal{S}_k(\Gamma_1(lN))$. Nous voulons démontrer l'énoncé suivant :

(*) : Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f) q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$ *vérifie* $a_n(f) = 0$ *pour* $(n, N) = 1$, *alors* $f \in \sum_{p|N} i_p(\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N/p))$.

Nous noterons $\Gamma^1(N)$ et $\Gamma^0(N)$ les "transposés" de $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma_0(N)$.

i. Montrer que $\forall M \geqslant 1$, i_M induit un isomorphisme $\mathcal{S}_k(\Gamma^1(M)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_k(\Gamma_1(M))$. Utiliser ces isomorphismes pour montrer que (*) est équivalent à l'énoncé suivant où $q_N = \exp(2i\pi z/N)$.

   (**) : Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(f) q_N^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma^1(N))$ *vérifie* $a_n(f) = 0$ *pour* $(n, N) = 1$, *alors* $f \in \sum_{p|N} \mathcal{S}_k(\Gamma^1(N/p))$.

ii. Si un groupe H agit linéairement sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on note π_H l'endomorphisme $v \mapsto |H|^{-1} \sum_{h\in H} hv$. Montrer que c'est un projecteur sur les invariants V^H.

iii. Rappeler pourquoi le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ agit sur $\mathcal{S}_k(\Gamma(N))$. Pour $p|N$, notons K_p le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ engendré par $\left[\begin{smallmatrix} 1 & N/p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ et $\pi_p = \pi_{K_p}$ le projecteur associé.

   (a) Montrer que $\pi_p(\sum_n a_n q_N^n) = \sum_{n, p|n} a_n q_N^n$.

   (b) Montrer que $\pi := \prod_{p|N}(1 - \pi_p)$ est un projecteur et que $\pi(\sum_n a_n q_N^n) = \sum\limits_{(n,N)=1} a_n q_N^n$.

   (c) En déduire $\{f \in \mathcal{S}_k(N), (n, N) = 1 \Rightarrow a_n(f) = 0\} = \sum_p \mathrm{Im}(\pi_p)$.

iv. Notons H l'image de $\Gamma^1(N)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Montrer que le sous-groupe $\langle H, K_p\rangle$ engendré par H et K_p est l'image de $\Gamma^1(N/p)$. En déduire que (**) est équivalent à l'énoncé suivant où $V = \mathcal{S}_k(\Gamma(N))$:

$$(***) \,:\, V^H \cap \left(\sum_{p|N} V^{K_p} \right) = \sum_{p|N} \left(V^H \cap V^{K_p} \right)$$

v. Nous allons montrer que (***) est vrai pour *toute* représentation linéaire V de $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Pour cela on décompose $G = \prod_{p|N} G_p$ où $G_p = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p(N)}\mathbb{Z})$, et de même $H = \prod_{p|N} H_p$. On remarque que $K_p \subset G_p$.

   (a) On suppose que $V = \bigotimes_{p|N} V_p$ est un produit tensoriel de représentations V_p de G_p.

      i. Montrer l'existence d'une décomposition $V_p = V_p^1 \oplus V_p^2 \oplus V_p^3 \oplus V_p^4$ telle que $V_p^1 \oplus V_p^2 = V_p^{H_p}$ et $V_p^1 \oplus V_p^3 = V_p^{K_p}$.

TSVP

ii. On a donc une décomposition $V = \bigoplus_\lambda V^\lambda$ où λ décrit les fonctions $\lambda : \{p|N\} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ et $V^\lambda = \bigotimes_p V_p^{\lambda(p)}$. Montrer que

- $V^H = \bigoplus_\lambda V^\lambda$ où λ vérifie $\forall p|N,\ \lambda(p) \in \{1,2\}$.
- $\sum_{p|N} V^{K_p} = \bigoplus_\lambda V^\lambda$ où λ vérifie $\exists p|N,\ \lambda(p) \in \{1,3\}$.
- $\sum_{p|N}(V^H \cap V^{K_p}) = \bigoplus_\lambda V^\lambda$ où λ vérifie $\forall p|N,\ \lambda(p) \in \{1,2\}$ et $\exists p|N, \lambda(p) = 1$.

En conclure que (***) est vrai dans ce cas.

(b) Montrer que toute représentation irréductible V se décompose en un produit tensoriel comme au (a).

(c) Montrer que toute représentation est somme directe de représentations irréductibles, et en conclure que (***) est vrai pour tout V.