Université Pierre et Marie Curie - Paris VI — Faculté de Mathématiques

Formes Modulaires — 2014–2015

Pour une fonction f sur $\mathbb{R}_+^\times$, on définit sa transformée de Mellin par

$$g(s) := \int_0^\infty f(t) t^s \frac{dt}{t}, \quad s \in \mathbb{C}$$

Exercice 1 (La fonction Γ)**.** Soit $\Gamma(s)$ la transformée de Mellin de la fonction e^{-t}.

i. Montrer que $\Gamma(s)$ converge absolument et uniformément pour $\Re(s) \geqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Calculer $\Gamma(1)$.

ii. Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ sur son domaine de convergence, et en profiter pour prolonger $\Gamma(s)$ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

iii. Montrer que les pôles de $\Gamma(s)$ sont simples, localisés aux entiers négatifs, et le résidu en $-n$ est $(-1)^n/n!$.

iv. En utilisant la formule $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{t}{n})^{1/n}$, montrer que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$. En déduire que $\Gamma(s)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (Equation fonctionnelle de $L(s,f)$)**.** Soit $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$. Notons $\Lambda_N(s)$ la transformée de Mellin de la fonction $f(\frac{i}{\sqrt{N}}t)$.

i. Montrer que $\Lambda_N(s)$ converge pour $\Re(s) > k/2+1$ et qu'on a $\Lambda_N(s) = (\frac{2\pi}{\sqrt{N}})^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$.

ii. Posons $W_N(f) = i^k f[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}]_k$. Montrer que W_N est une involution de $\mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))$.

iii. Montrer que $\int_0^1 f(\frac{i}{\sqrt{N}}t)t^s\frac{dt}{t} = \int_1^\infty (W_N f)(\frac{i}{\sqrt{N}}t)t^{k-s}\frac{dt}{t}$

iv. Montrer que $\Lambda_N(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe de s et satisfait l'équation fonctionnelle $\Lambda_N(s,f) = \Lambda_N(k-s, W_N f)$.

Exercice 3 (Fonction L d'une représentation de permutation)**.** Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$, $X = \mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$, et ρ la représentation de permutation sur $\mathbb{C}^X$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Montrer que $L(s,\rho) = \zeta_K(s)$. On pourra commencer par chercher et traiter les facteurs locaux non ramifiés.

Exercice 4. (Interprétation modulaire des correspondances.)

i. Notons $\mathcal{E}_0(N)$ l'ensemble des classes d'équivalences de paires (E,C) où E est un tore complexe (de dimension 1) et C un sous-groupe cyclique d'ordre N. Montrer que l'application $\mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{E}_0(N)$, $z \mapsto (\mathbb{C}/\Lambda_z, \langle 1/N + \Lambda_z \rangle)$ induit une bijection $Y_0(N) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0(N)$.

ii. Décrire la projection canonique $Y_0(Np) \longrightarrow Y_0(N)$ en termes de $\mathcal{E}_0$.

iii. Montrer que la correspondance $T(p)$ est donnée en termes de "diviseurs" sur $\mathcal{E}_0(N)$ par la formule $[E,C] \mapsto \sum_{C_p}[E/C_p, C+C_p]$ où C_p décrit les sous-groupes d'ordre p de E.