

Cours introductif de M2 Groupes et Algèbres de Lie

Jean-François Dat

2012-2013

Résumé

Un groupe de Lie est une variété différentielle munie d'une structure de groupe lisse. L'espace tangent en l'élément neutre se voit alors muni d'une structure d'algèbre de Lie. Dans ce cours on introduit ces notions et on étudie leurs interactions.

Table des matières

1	Groupes de Lie	2
1.1	Définitions	2
1.2	Groupes classiques	4
1.3	Propriétés topologiques	8
1.4	Algèbres de Lie abstraites	12
1.5	L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie	13
1.6	Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$	16
1.7	L'exponentielle d'un groupe de Lie	20
1.8	Action d'un groupe de Lie sur une variété	28
1.9	La correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie	31
1.10	Mesures invariantes et applications	33
1.11	Groupes de Lie complexes. Complexification.	36
1.12	Représentations de dimension finie	38
1.13	Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et de ses avatars	45
2	Algèbres de Lie	49
2.1	Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie	49
2.2	Forme de Killing. Opérateurs de Casimir	53
2.3	Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles	55
2.4	Algèbres de Lie semi-simples	60
2.5	Structure des algèbres semi-simples	63
2.6	Systèmes de racines	69

1 Groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous utilisons le vocabulaire et les concepts basiques de la Géométrie Différentielle. Toutes les variétés et morphismes de variétés seront de classe C^∞ , et nous dirons simplement *lisse* pour “de classe C^∞ ”.

1.1 Définitions

1.1.1 DÉFINITION.— *Un groupe de Lie est un ensemble G muni de deux structures compatibles :*

- Une structure de groupe donnée par une loi de composition $m : G \times G \longrightarrow G, (x, y) \mapsto xy$, et dont on note $i : G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1}$ l’application “passage à l’inverse”.
- Une structure de variété lisse (donnée par une classe d’équivalence d’atlas de classe C^∞ , mais nous n’avons pas besoin d’introduire de notation pour ceux-ci).
- Compatibilité : Les application m et i sont lisses.

Remarque : le caractère C^∞ de m n’implique pas celui de i . On peut trouver des contre-exemples tordus.

Premiers exemples :

- Tout groupe discret (disons dénombrable).
- Le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.
- Le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, son analogue complexe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$, et le cercle unité (S^1, \cdot) .
- Les groupes généraux linéaires

1.1.2 Groupes généraux linéaires. Ce sont en quelque sorte les exemples fondamentaux de groupes de Lie. Nous les rencontrerons sous deux formes.

Forme matricielle. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, muni de la structure C^∞ d’ouvert de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. La multiplication $(A, B) \mapsto AB$ est polynômiale en les entrées de A et B , donc C^∞ . L’application inverse $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{com}(A)$ est analytique, donc en particulier C^∞ .

Forme intrinsèque. Si V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V)$. Bien sûr, si n est la dimension de V , un choix de base de V fournit une bijection $\mathrm{GL}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est un *isomorphisme de groupes de Lie* au sens de la définition suivante.

De même, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est naturellement un groupe de Lie, et si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel, alors $\mathrm{GL}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ est un groupe de Lie.

1.1.3 REMARQUE.— Soit G un groupe de Lie et $g \in G$. Notons $L_g : G \longrightarrow G, x \mapsto gx$ la “translation à gauche” par g . C’est un difféomorphisme de G , qui induit donc un isomorphisme $d_e L_g : T_e G \xrightarrow{\sim} T_g G$ des espaces tangents. En particulier toutes les composantes connexes de G ont même dimension.

1.1.4 DÉFINITION.— *Un morphisme de groupes de Lie (parfois on dira simplement morphisme lisse) est une application $G \xrightarrow{\varphi} G'$ qui est lisse et commute aux lois de groupe.*

Un tel morphisme est appelé plongement, immersion, submersion, s'il l'est en tant qu'application C^∞ . C'est un isomorphisme, s'il admet un inverse.

Exemples.

- Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$.
- L'exponentielle $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}_{>0}^\times, \cdot)$ est un isomorphisme d'inverse le \log .
- L'enroulement de la droite sur le cercle : $\theta \in (\mathbb{R}, +) \mapsto \exp(2i\pi\theta) \in S^1$ est un difféomorphisme local surjectif.
- Les enroulements d'une droite sur le tore : $\theta \in (\mathbb{R}, +) \mapsto (\exp(2i\pi\theta), \exp(2i\pi\theta\alpha)) \in S^1 \times S^1$. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, c'est une immersion injective, mais pas un plongement car l'image est dense.

Cas particuliers remarquables.

- Les morphismes $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$ sont appelés (abusivement) *sous-groupes à 1 paramètre*.
- Un morphisme du type $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ est appelé *représentation (linéaire) de G sur V* . L'espace V est aussi appelé "espace sous-jacent" à la représentation ρ .

1.1.5 REMARQUE.— Si φ est un morphisme de groupes de Lie, la formule $d_h\varphi = d_e L_{\varphi(h)} \circ d_e\varphi \circ (d_e L_h)^{-1}$ montre que φ est de rang constant.

1.1.6 DÉFINITION.— *Un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G est une sous-variété qui est aussi un sous-groupe. De manière équivalente, l'injection $H \hookrightarrow G$ est un plongement de groupes de Lie.*

Exemples.

- $H = \mathbb{Z}$ dans $G = \mathbb{R}$.
- $H = S^1$ dans $G = \mathbb{C}^\times$.

Attention ! Ne pas confondre *sous-groupe de Lie* et *groupe de Lie immergé* (i.e. l'image d'une immersion de groupes de Lie $i : H \hookrightarrow G$). Par exemple l'enroulement d'une droite sur le tore associé à α irrationnel comme ci-dessus fournit un groupe de Lie immergé de $S^1 \times S^1$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ mais qui n'est pas un sous-groupe de Lie.

1.1.7 PROPOSITION.— *Tout sous-groupe de Lie H de G est fermé.*

Démonstration. Cela découle des deux points ci-dessous.

i) Puisque H est une sous-variété, H est localement fermé (i.e. tout point h de H admet un voisinage \mathcal{U} dans G tel que $H \cap \mathcal{U}$ soit fermé dans \mathcal{U}).

ii) Supposons plus généralement que G est un groupe topologique et H un sous-groupe localement fermé. Alors H est fermé. En effet, soit g dans l'adhérence \overline{H} de H dans G :

- choisissons \mathcal{U} voisinage ouvert de e dans G t.q. $\mathcal{U} \cap H$ soit fermé dans \mathcal{U} . Quitte à remplacer \mathcal{U} par $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$ on peut supposer que $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$ (on dit alors que \mathcal{U} est symétrique).

- $g\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de g donc $g\mathcal{U} \cap H \neq \emptyset$. Choisissons h dans cette intersection ; on a donc $g \in h\mathcal{U}^{-1} \cap \overline{H} = h\mathcal{U} \cap \overline{H}$. Puisque $h\mathcal{U}$ est ouvert, $h\mathcal{U} \cap \overline{H}$ est l'adhérence de $h\mathcal{U} \cap H$ dans $h\mathcal{U}$.
- Or, $h\mathcal{U} \cap H = h(\mathcal{U} \cap H)$ est fermé dans $h\mathcal{U}$ par choix de \mathcal{U} .

□

Le théorème suivant donne une réciproque assez spectaculaire, qui est source de nombreux exemples.

1.1.8 THÉORÈME. (Cartan, Von-Neumann)– *Tout sous-groupe fermé H d'un groupe de Lie G est un sous-groupe de Lie. Plus précisément, il existe une structure de groupe de Lie sur H (nécessairement unique) qui fait de H une sous-variété de G .*

Nous démontrerons ce théorème plus tard. Donnons-en un corollaire tout aussi spectaculaire :

1.1.9 COROLLAIRE.– *Soient H et G deux groupes de Lie. Tout homomorphisme de groupes continu $\varphi : H \rightarrow G$ est lisse.*

Démonstration. Considérons l'application graphe de φ :

$$\Gamma_\varphi : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \times G \\ h & \mapsto & (h, \varphi(h)) \end{array} .$$

C'est un homéomorphisme de H sur son image $\Gamma_\varphi(H)$ dont l'inverse est donné par la restriction $pr_1|_{\Gamma_\varphi(H)}$ de la première projection $H \times G \xrightarrow{pr_1} H$. De plus, l'égalité $\Gamma_\varphi(H) = \{(h, g) \in H \times G, \varphi(h) = g\}$ montre que $\Gamma_\varphi(H)$ est fermé. D'après le théorème précédent, c'est donc un sous-groupe de Lie de $H \times G$. Or pr_1 est manifestement lisse, donc $pr_1|_{\Gamma_\varphi(H)}$ est un homéomorphisme lisse et de rang constant (cf remarque plus haut). Le théorème du rang constant implique que c'est un difféomorphisme. Il s'ensuit que Γ_φ est un morphisme lisse et donc, en notant pr_2 la seconde projection, $\varphi = pr_2 \circ \Gamma_\varphi$ aussi. □

1.1.10 REMARQUE.– Il est intéressant de souligner la conséquence suivante du théorème du rang qui est utilisée dans la preuve ci-dessus : *tout morphisme bijectif de groupes de Lie est un isomorphisme*. En effet, il suffit de prouver que la différentielle $d_e\varphi : T_eH \rightarrow T_eG$ de φ au point e est inversible (auquel cas elle est inversible en tout point). Or, si $d_e\varphi$ n'était pas injective, le théorème du rang constant impliquerait immédiatement que φ n'est pas injective au voisinage de e , contredisant l'injectivité de φ . Par ailleurs, si $d_e\varphi$ n'était pas surjective, le théorème du rang constant impliquerait que l'image d'un voisinage convenable de e par φ est d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, il s'ensuit que l'image de φ est d'intérieur vide, contredisant la surjectivité de φ .

1.2 Groupes classiques

Comme autre conséquence intéressante du théorème 1.1.8, tous les “groupes classiques” sont des groupes de Lie. Comme ce sont les exemples les plus intéressants, nous en rappelons

la liste ci-dessous. La lettre K désigne indifféremment les corps \mathbb{R} et \mathbb{C} , et V désigne un K -espace vectoriel de dimension finie n .

1.2.1 Groupes spéciaux linéaires. Le déterminant $\text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}_1(K)$ étant un homomorphisme continu de groupes topologiques, son noyau $\text{SL}(V)$ est fermé donc un sous-groupe de Lie. On l'appelle *groupe spécial linéaire* de V . Un choix de base de V l'identifie à $\text{SL}_n(K)$.

Exercice. – Le centre de $\text{SL}_n(K)$ est formé des homothéties de déterminant 1, donc il est isomorphe au groupe $\mu_n(K)$ des racines n -ièmes de l'unité dans K^* (d'ordre n si $K = \mathbb{C}$, d'ordre 1 ou 2 si $K = \mathbb{R}$).

1.2.2 Groupes orthogonaux. Notons $\text{Sym}_K(V)$ le K -espace vectoriel des formes K -bilinéaires symétriques $\Phi : V \times V \rightarrow K$. On a une action linéaire, donc continue, de $\text{GL}(V)$ sur $\text{Sym}_K(V)$, donnée par $g\Phi(v, w) := \Phi(g^{-1}v, g^{-1}w)$. Le stabilisateur de Φ pour cette action est donc fermé dans $\text{GL}(V)$, donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$\text{O}(\Phi) := \{g \in \text{GL}(V), \Phi(gv, gw) = \Phi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si Φ est *non-dégénérée*, on l'appelle *groupe orthogonal* de Φ .

Rappelons que deux formes quadratiques sont *équivalentes* si elles appartiennent à la même orbite sous $\text{GL}(V)$. Il s'ensuit que leurs groupes orthogonaux sont conjugués dans $\text{GL}(V)$, et en particulier isomorphes. Lorsque $K = \mathbb{C}$, on sait que toutes les formes quadratiques sont équivalentes, de sorte que $\text{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe orthogonal complexe usuel

$$\text{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \text{M}_n(\mathbb{C}), {}^t M M = I_n\}.$$

Lorsque $K = \mathbb{R}$, le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leq n$ et d'une base e_1, \dots, e_n dans laquelle

$$\Phi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

Le couple d'entiers $(p, q := n - p)$ s'appelle la *signature* de Φ . Ainsi $\text{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\text{O}(p, q) := \{M \in \text{M}_{p+q}(\mathbb{R}), {}^t M \cdot D_{p,q} \cdot M = D_{p,q}\}$$

où $D_{p,q} = D(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ est la matrice diagonale où 1 est répété p fois et -1 l'est q fois. Pour $p = n$ et $p = 0$, on retrouve le groupe orthogonal *euclydien* $\text{O}(n, 0) = \text{O}(n)$ qui, comme on le sait bien, est compact. Les autres groupes orthogonaux ne sont pas compacts. On a $\text{O}(p, q) = \text{O}(q, p)$ et on montre que les $\text{O}(p, q)$ pour $q \leq p$ sont deux à deux non isomorphes.

Exemple. – Pour la forme $xx' + yy' + zz' - tt'$ sur l'espace-temps \mathbb{R}^4 , on obtient ainsi le *groupe de Lorentz* $\text{O}(3, 1)$ qui intervient dans la théorie de la relativité générale.

Par ailleurs, on définit les groupes spéciaux orthogonaux par

$$\mathrm{SO}(p, q) := \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

1.2.3 Groupes unitaires. Ici $K = \mathbb{C}$. Notons $\mathrm{Herm}(V)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des formes hermitiennes $\Psi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. On a une action linéaire, donc continue, de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{Herm}(V)$, donnée par $g\Psi(v, w) := \Psi(g^{-1}v, g^{-1}w)$. Le stabilisateur de Ψ pour cette action est donc fermé dans $\mathrm{GL}(V)$, donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$\mathrm{U}(\Psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{C}), \Psi(gv, gw) = \Psi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si Ψ est *non-dégénérée*, on l'appelle *groupe unitaire de Ψ* .

Comme dans le cas symétrique, deux formes hermitiennes sont équivalentes si elles sont dans la même orbite sous $\mathrm{GL}(V)$. Dans ce cas, leurs groupes unitaires sont isomorphes et même conjugués. Ici aussi, les formes hermitiennes sont classifiées par leur *signature* : le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leq n$ et d'une base e_1, \dots, e_n dans laquelle

$$\Psi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^p x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Ainsi, posant $q = n - p$, le groupe topologique $\mathrm{U}(\Psi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\mathrm{U}(p, q) := \{M \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{C}), {}^t \bar{M} \cdot D_{p,q} \cdot M = D_{p,q}\}$$

Pour $pq = 0$, on retrouve le groupe unitaire habituel $\mathrm{U}(n, 0) = \mathrm{U}(n)$ qui, comme on le sait, est compact. Les autres groupes unitaires ne sont pas compacts. On a $\mathrm{U}(p, q) = \mathrm{U}(q, p)$ et on montre que les $\mathrm{U}(p, q)$ pour $q \leq p$ sont deux à deux non isomorphes.

Remarque. – Les groupes $\mathrm{U}(1, n - 1)$ jouent un rôle prépondérant dans des problèmes actuels de théorie des nombres.

De même que précédemment, on a le groupe spécial unitaire

$$\mathrm{SU}(p, q) := \mathrm{U}(p, q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Exercice. – Déterminer les centres de $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$.

1.2.4 Groupes symplectiques. À nouveau, K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Notons $\mathrm{Alt}_K(V)$ le K -espace vectoriel des formes K -bilinéaires alternées $\psi : V \times V \rightarrow K$. On a une action linéaire, donc continue, de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathrm{Alt}_K(V)$, donnée par $g\psi(v, w) := \psi(g^{-1}v, g^{-1}w)$. Le stabilisateur de ψ pour cette action est donc fermé dans $\mathrm{GL}(V)$, donc un sous-groupe de Lie. On le note

$$\mathrm{Sp}(\psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V), \psi(gv, gw) = \psi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

Si ψ est *non-dégénérée* (on parle alors de *forme symplectique*), on l'appelle *groupe symplectique de ψ* . La dimension de V est alors nécessairement paire, et on change la notation en

$\dim_K(V) = 2n$. Comme plus haut, ce groupe ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'équivalence de ψ . Or, on sait que toutes les formes symplectiques sont équivalentes. En particulier, il existe une base e_1, \dots, e_{2n} de V dans laquelle on a

$$\psi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

En d'autres termes, la matrice de ψ dans cette base est la matrice antisymétrique $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$. On voit alors que $\text{Sp}(\psi)$ est isomorphe au *groupe symplectique*

$$\text{Sp}_{2n}(K) = \{M \in \text{GL}_{2n}(K), {}^t M J M = J\}.$$

Ainsi, $\text{Sp}_2(K) = \text{SL}_2(K)$. Plus généralement, on démontre que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1, de sorte que pour tout n , $\text{Sp}_{2n}(K)$ est un sous-groupe fermé, non compact, de $\text{SL}_{2n}(K)$.

Exercice. – Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel V/\mathbb{C} est une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le \mathbb{R} -espace vectoriel sous-jacent \tilde{V} . En déduire que dans $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \{P \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R}), P^{-1} J_{2n} P = J_{2n}\} \subset \text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on a $\text{U}(n) = \text{O}(2n) \cap \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

1.2.5 Groupes quaternioniques. Rappelons que le corps des *quaternions* de Hamilton \mathbb{H} est une algèbre à division de centre \mathbb{R} qui admet une \mathbb{R} -base $1, i, j, k$ dans laquelle la multiplication est donnée par $ij = k, jk = i, ki = j, i^2 = j^2 = k^2 = -1$. En envoyant \mathbb{C} dans \mathbb{H} via $i \mapsto i$, on peut aussi voir $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ comme un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2, mais la multiplication n'est pas \mathbb{C} -linéaire.

Considérons \mathbb{H}^n comme un espace vectoriel à droite sur \mathbb{H} , et soit $\text{GL}_n(\mathbb{H})$ le groupe des automorphismes \mathbb{H} -linéaires de \mathbb{H}^n . Avec l'identification $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n + j\mathbb{C}^n$, on a $\text{GL}_n(\mathbb{H}) = \{P \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C}), P J_{2n} = J_{2n} \bar{P}\}$. C'est donc un sous-groupe fermé de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ et par là un groupe de Lie.

On peut aussi munir \mathbb{H} de l'anti-involution σ telle que $\sigma(i) = -i, \sigma(j) = -j, \sigma(k) = -k$, et \mathbb{H}^n de la forme σ -hermitienne canonique. Le sous-groupe d'isotropie $\text{U}_n(\mathbb{H}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{H})$ de cette forme est encore un groupe de Lie, et comme dans l'exercice ci-dessus, on peut l'identifier à $\text{U}(2n) \cap \text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

1.2.6 Importance des groupes classiques. Ils interviennent dans des domaines assez variés.

Géométrie. C'est leur domaine de prédilection. Ces groupes sont souvent des groupes de symétries d'espaces remarquables (sphères, hyperboloïdes...), et en tant que tels sont des modèles pour des géométries non-euclidiennes.

Théorie des Nombres. Voilà une application un peu plus surprenante, mais depuis une centaine d'années, on étudie des espaces de fonctions, formes différentielles etc sur des

espaces de la forme $G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R}) / K$ où G est un groupe classique réel et K un sous-groupe compact maximal de G . Par exemple pour $G = \mathrm{GL}_1$, on obtient les fonctions trigonométriques, pour $G = \mathrm{GL}_2$ les formes modulaires, pour G général on parle de “formes automorphes”. Ces objets interviennent de manière cruciale dans la preuve du théorème de Fermat, par exemple.

Physique.

- Le groupe de Lorentz de la relativité générale est $O(1, 3)$. C’est le groupe “associé à la géométrie de l’espace-temps”.
- Certaines particules élémentaires sont classifiées par des représentations “irréductibles” de $\mathrm{SU}(3)$.
- Les niveaux d’énergie d’un atome d’hydrogène sont donnés par les valeurs propres du Laplacien sphérique sur la sphère S^2 , que l’on calculera plus tard en utilisant la “décomposition spectrale” de $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ sous l’action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

1.3 Propriétés topologiques

1.3.1 Composante neutre. Soit G un groupe de Lie (ou plus généralement un groupe topologique). La composante connexe de G qui contient l’élément neutre e est souvent notée G^0 et appelée “composante neutre”.

PROPOSITION. – *Soit G un groupe de Lie (ou plus généralement un groupe localement connexe). Alors G^0 est un sous-groupe distingué ouvert et fermé dans G , et engendré par tout voisinage connexe de e .*

Démonstration. G^0 est fermé comme toute composante connexe, et ouvert car G est localement connexe. L’application $x \mapsto x^{-1}$ est continue et envoie e sur e , donc envoie G^0 dans G^0 . De même l’application $(x, y) \mapsto xy$ envoie $G^0 \times G^0$ dans G^0 . Il s’ensuit que G^0 est un groupe. Toujours par le même argument, pour tout $g \in G$, l’application $x \mapsto gxg^{-1}$ envoie G^0 dans G^0 , donc G^0 est distingué.

Soit maintenant \mathcal{U} un voisinage connexe de e dans G , et posons $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$, où $\mathcal{U}^n = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}^{n-1}$. C’est une union de connexes d’intersection non vide, donc c’est un voisinage connexe de e , donc $\mathcal{V} \subset G^0$. Posons $\mathcal{W} := \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$ qui est un voisinage symétrique de e . Alors \mathcal{V} contient $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}^n$ qui est un sous-groupe ouvert de G et donc contient G^0 . Puisque $\mathcal{V} = G^0$, \mathcal{U} engendre bien G^0 . \square

Le quotient G/G^0 est donc un groupe *discret*, noté souvent $\pi_0(G)$ et appelé “groupe des composantes connexes de G ”.

À ce propos, il est utile de faire ou refaire l’exercice suivant :

Exercice. – Rappelons que si on a une surjection $\pi : X \rightarrow Y$ avec X espace topologique, on définit la *topologie quotient* de Y comme la plus fine topologie de Y pour laquelle π est continue. Ceci permet de topologiser les espaces quotients G/H pour H sous-groupe d’un groupe topologique G . Vérifier alors que

- π est une application ouverte.

- G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G .
- G/H est discret si et seulement si H est ouvert dans G .

Comme on l'a déjà remarqué, la classe des groupes de Lie contient celle des groupes discrets et en particulier celle des groupes finis. Les techniques différentielles n'apporteront évidemment rien à l'étude de ces groupes, et ne donneront donc généralement que des informations sur les composantes neutres des groupes de Lie étudiés. Par exemple la proposition ci-dessus implique :

COROLLAIRE. – Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme lisse avec H connexe. Si $d_e\varphi : T_eG \rightarrow T_eH$ est surjective, alors φ est surjective.

Démonstration. Par le théorème du rang, $\text{Im}(\varphi)$ contient un voisinage de e . Comme c'est un groupe et H est connexe, la proposition donne $\text{Im}(\varphi) = H$. \square

Rappelons que la réciproque est vraie : φ surjective $\Rightarrow d_e\varphi$ surjective, cf remarque 1.1.10.

1.3.2 Connexité des groupes classiques.

Groupes linéaires. $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ sont connexes. Par contre, $\text{GL}_n(\mathbb{R})^0 = \{g \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \det(g) > 0\}$ et $\pi_0(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Groupes orthogonaux. Pour $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on a $\text{O}(n, K)^0 = \text{SO}(n, K)$ et $\pi_0(\text{O}(n, K)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sur $K = \mathbb{R}$ et pour $p, q \neq 0$, on a $\pi_0(\text{SO}(p, q)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\pi_0(\text{O}(p, q)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Groupes unitaires et symplectiques. Ils sont tous connexes.

Voici un exercice pour montrer la connexité de $\text{SO}(n, \mathbb{R})$.

Exercice. – On considère l'action naturelle de $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ sur la sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

- Vérifier que le fixateur du vecteur $(0, \dots, 0, 1)$ s'identifie à $\text{SO}(n-1, \mathbb{R})$.
- Montrer que l'application $\text{SO}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n-1, \mathbb{R}) \rightarrow S^1$ ainsi obtenue est un homéomorphisme (utiliser la compacité de $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ et S^{n-1}).
- Montrer que si H est un sous-groupe fermé *connexe* de G , l'application quotient induit une bijection $\pi_0(G) \simeq \pi_0(G/H)$. En déduire la connexité de $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ par récurrence.

On peut procéder de la même manière pour $U(n)$ (agissant sur S^{2n-1}) ou GL_n (agissant sur K^n). Dans ce dernier cas, le troisième point est plus délicat par manque de compacité, cf notes de M1, Thm 1.1.10.

1.3.3 Simple connexité. Rappelons quelques définitions de topologie algébrique. Soit X un espace topologique.

- Un *revêtement trivial* de X est une application de la forme $Y = X \times I \xrightarrow{pr_1} X$ avec I un ensemble discret.
- Un *revêtement* (localement trivial) de X est une application $Y \xrightarrow{\pi} X$ telle que tout point $x \in X$ admet un voisinage \mathcal{U} tel que $\pi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$ soit un revêtement trivial de \mathcal{U} .

- Si X est connexe, il est dit *simplement connexe* si tout revêtement de X est trivial.
- Si X est connexe par arcs et localement simplement connexe (par exemple une variété topologique), il existe un revêtement $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de source \tilde{X} simplement connexe. On l'appelle abusivement *revêtement universel* de X bien qu'il ne soit unique qu'à isomorphisme *non-unique* près (cf ci-dessous). Le groupe $\text{Aut}_X(\tilde{X})$ (qui n'est donc défini qu'à isomorphisme près) est le *groupe fondamental* de X .
- Fixons un point $x \in X$ et choisissons un relèvement $\tilde{x} \in \tilde{X}$ de x . Le revêtement "pointé" (\tilde{X}, \tilde{x}) de (X, x) possède alors la propriété universelle suivante : pour tout revêtement pointé $(Y, y) \xrightarrow{p} (X, x)$ il existe un unique revêtement pointé $(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{q} (Y, y)$ tel que $\pi = p \circ q$. Ainsi la paire (\tilde{X}, \tilde{x}) est unique à isomorphisme unique près.
- Par la propriété universelle, l'application $\text{Aut}_X(\tilde{X}) \rightarrow \pi^{-1}(x), \varphi \mapsto \varphi(\tilde{x})$ est bijective et munit donc $\pi^{-1}(x)$ d'une structure de groupe. Le groupe ainsi obtenu est noté $\pi_1(X, x)$ et est bien défini à isomorphisme *unique* près.

Lorsque X est une variété lisse, tout revêtement de X est canoniquement une application lisse entre variétés lisses. En particulier le revêtement universel de X est une variété lisse.

- Exemples.* - Pour n entier non nul, $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ est un revêtement.
- L'exponentielle $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times$ est un revêtement universel de \mathbb{C}^\times .
 - Si un groupe fini Γ agit librement sur un espace topologique, le quotient $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ est un revêtement (exemple : $X = \text{SL}_n(\mathbb{C}), \Gamma = Z(\text{SL}_n(\mathbb{C})) = \mu_n, X/\Gamma = \text{PSL}_n(\mathbb{C})$). Si X est simplement connexe, alors $\pi_1(X/\Gamma) \simeq \Gamma$.
 - Si X et Y sont simplement connexes, alors $X \times Y$ l'est aussi.

Remarque. - Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ peut aussi être défini comme l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en x , muni de la loi induite par la concaténation des lacets. On pourra le vérifier à titre d'exercice ou consulter un livre de topologie algébrique.

1.3.4 PROPOSITION. - Soit G un groupe de Lie connexe et $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ un revêtement universel de G . Choisissons un élément \tilde{e} dans la fibre $\pi^{-1}(e)$. Alors il existe une unique structure de groupe de Lie sur \tilde{G} ayant \tilde{e} pour élément neutre, et faisant de π un morphisme de groupes de Lie. De plus $\text{Ker}(\pi) \simeq \pi_1(G)$ est un sous-groupe discret et central de \tilde{G} .

Démonstration. Choisissons un élément $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ dans la fibre de e , et remarquons que $\tilde{G} \times \tilde{G}$ est simplement connexe. Il existe donc un unique relèvement \tilde{m} de m , i.e. une unique application continue \tilde{m} rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} \times \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{m}} & \tilde{G} \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

qui envoie (\tilde{e}, \tilde{e}) sur \tilde{e} . On constate que $\tilde{m} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{m}) : \tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ est un relèvement de $m \circ (\text{id}_G \times m)$ qui envoie $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ sur \tilde{e} . De même $\tilde{m} \circ (\tilde{m} \times \text{id}_{\tilde{G}})$ est un relèvement de

$m \circ (m \times \text{id}_G)$ qui envoie $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ sur \tilde{e} . Or, puisque m est associative, on a $m \circ (m \times \text{id}_G) = m \circ (\text{id}_G \times m)$. Par unicité des relèvements “pointés”, on en déduit que $\tilde{m} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{m}) = \tilde{m} \circ (\tilde{m} \times \text{id}_{\tilde{G}})$ et donc que \tilde{m} est une loi associative sur \tilde{G} .

De même l’application inverse $i : G \rightarrow \tilde{G}$ admet un unique relèvement $\tilde{i} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ envoyant \tilde{e} sur \tilde{e} . Le fait que i est l’application inverse associée à m est équivalent à l’égalité $m \circ (\text{id}_G \times i) = \text{id}_G$. L’application $\tilde{m} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{i})$ relève $m \circ (\text{id}_G \times i)$ et envoie \tilde{e} sur \tilde{e} , tout comme l’application $\text{id}_{\tilde{G}}$. L’unicité du relèvement implique alors que $m \circ (\text{id}_G \times i) = \text{id}_G$ et donc que \tilde{i} est une application “inverse” pour \tilde{m} , qui est donc une loi de groupe.

Par construction, π est surjective de noyau discret et distingué dans \tilde{G} . Comme \tilde{G} est connexe, son action par conjugaison sur $\text{Ker } \pi$ est nécessairement triviale, *i.e.* $\text{Ker } \pi$ est central. Comme dans le troisième exemple ci-dessus et puisque $G = \tilde{G}/\text{Ker } \pi$, on a $\text{Ker } \pi \simeq \pi_1(G)$. \square

1.3.5 Groupe fondamental des groupes classiques. Si $H \subset G$ sont des groupes de Lie connexes avec H fermé, on montrera plus tard que l’application quotient $G \rightarrow G/H$ est une fibration topologique (et même une fibration lisse) de fibre H . Dans ces conditions, la suite exacte longue associée à une fibration (cf cours ou livre de topologie algébrique) nous donne une suite exacte

$$\pi_1(H) \longrightarrow \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(G/H) \longrightarrow \{1\}$$

(ici les groupes fondamentaux sont basés en l’élément neutre). Ceci permet de calculer les π_1 des groupes $\text{SU}(n)$ et $\text{SO}(n)$ par la même stratégie que pour le π_0 (action sur une sphère, etc.) En utilisant la décomposition polaire (cf notes de M1 1.2.4) on peut passer aux groupes linéaires. Voici ce qu’on obtient.

Groupes unitaires. Le groupe $\text{SU}(n)$ est simplement connexe, et le déterminant montre que $\pi_1(\text{U}(n)) \simeq \pi_1(\text{U}(1)) \simeq \mathbb{Z}$.

Groupes orthogonaux. $\pi_1(\text{SO}(2)) \simeq \mathbb{Z}$ (facile). Un exercice classique (voir plus loin) montre que $\text{SU}(2)$ est un revêtement à 2 feuillets de $\text{SO}(3)$, ce qui implique que $\pi_1(\text{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On en déduit par récurrence que $\pi_1(\text{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$, mais il faut compléter la suite exacte ci-dessus par un $\pi_2(G/H)$ à gauche, et savoir que $\pi_2(S^n) = 0$ pour $n \geq 3$. Le revêtement universel de $\text{SO}(n)$ est noté $\text{Spin}(n)$ (groupe spinoriel). On a par exemple $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$.

Groupes linéaires. Le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe et le déterminant fournit $\pi_1(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq \pi_1(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}$. Par contre, $\pi_1(\text{SL}_n(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(\text{GL}_n(\mathbb{R})^0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On montrera plus tard que le revêtement universel de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie *non linéaire*, *i.e.* qui ne se plonge dans aucun $\text{GL}_m(\mathbb{R})$.

Groupes symplectiques. $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ est simplement connexe, mais $\pi_1(\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$. En particulier $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ possède un unique revêtement connexe à 2 feuillets. On l’appelle “groupe métaplectique” ; c’est aussi un exemple de groupes de Lie non-linéaire.

1.4 Algèbres de Lie abstraites

Comme on le verra par la suite, l'outil principal qui permet d'étudier les groupes de Lie connexes, est leur algèbre de Lie. Nous définissons ici cette structure de manière abstraite.

1.4.1 DÉFINITION.— Soit K un corps commutatif. Une K -algèbre de Lie est un K -ev L muni d'une application K -bilineaire

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : L \times L &\rightarrow L \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

appelée "crochet de Lie" et satisfaisant les deux axiomes :

- i) $[X, X] = 0$ pour tout $X \in L$ (ce qui équivaut à $[X, Y] = -[Y, X]$ pour tous X, Y si $\text{car}(K) \neq 2$).
- ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ pour tous $X, Y, Z \in L$. (identité de Jacobi)

Remarque. – Le rôle du second axiome est le même que celui de l'axiome d'associativité dans la définition des algèbres associatives.

Exemple. – Tout K -ev muni du crochet nul!

Voici quelques exemples moins triviaux.

1.4.2 Algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre associative. Si A est une K -algèbre associative, alors $[x, y] := xy - yx$ définit un crochet de Lie sur A (exercice). L'exemple le plus important est ici $A = M_n(K)$ ou plus intrinsèquement $A = \text{End}_K(V)$. Pour une raison qui apparaîtra plus tard, on note l'algèbre de Lie ainsi obtenue $\mathfrak{gl}_n(K)$, resp. $\mathfrak{gl}(V)$.

1.4.3 Dérivations d'une algèbre. Soit A une K -algèbre associative. Une *dérivation* ∂ de A est un endomorphisme du K -espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibniz : $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$. L'ensemble $\text{Der}(A)$ des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $\text{End}_K(A)$. Le composé $\partial \circ \partial'$ de deux dérivations ∂, ∂' n'est en général pas une dérivation (autrement dit, $\text{Der}(A)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\text{End}_K(A)$), mais $[\partial, \partial'] := \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$ est encore une dérivation de A . Ainsi, $\text{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$.

De même, on définit une dérivation d'une K -algèbre de Lie L comme un élément ∂ de $\text{End}_K(L)$ vérifiant $\partial([X, Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$. Ici encore, le sous- K -ev $\text{Der}(L)$ n'est pas stable par produit (composition) mais est stable par crochet. C'est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(L)$.

Exemple. – Voici un exemple très important de dérivation d'une algèbre de Lie. Pour $Z \in L$, notons

$$\begin{aligned} \text{ad}_Z : L &\rightarrow L \\ X &\mapsto \text{ad}_Z(X) := [Z, X] \end{aligned}$$

Compte tenu de l'antisymétrie du crochet, l'identité de Jacobi nous dit exactement que ad_Z est une dérivation de L .

1.4.4 DÉFINITION.— *Un morphisme d'algèbres de Lie est une application K -linéaire $f : L \rightarrow L$ qui commute au crochet, ie $\forall X, Y \in L, f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$.*

Exemple. – La trace $\text{tr} : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow K$ est un morphisme d'algèbres de Lie. (Sur K on met l'unique crochet de Lie possible, à savoir le crochet nul).

Cas particulier remarquable : représentations. Un morphisme d'algèbres de Lie $r : L \rightarrow \mathfrak{gl}_n(K)$ est appelé “représentation matricielle de L ”. Plus intrinsèquement, si V est un K -ev, un morphisme d'algèbres de Lie $r : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est appelé “représentation linéaire de L ”. On dit alors que V est l'espace de la représentation r . Voici un exemple très important.

1.4.5 Représentation adjointe d'une algèbre de Lie. L'identité de Jacobi montre que l'application

$$\begin{aligned} \text{ad} : L &\rightarrow \mathfrak{gl}(L) \\ Z &\mapsto \text{ad}_Z \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. On l'appelle *représentation adjointe de L* .

1.5 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

On s'intéresse ici aux propriétés différentielles des groupes de Lie. On va notamment munir l'espace tangent $T_e G$ d'un groupe de Lie en son élément neutre d'une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie.

1.5.1 Différentielle de la loi et de l'inverse. Soit G un groupe de Lie de loi notée m , d'application “inverse” i , et d'élément neutre e . En différentiant la loi m en (e, e) , on obtient une application \mathbb{R} -linéaire $d_{(e,e)}m : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$. L'associativité de m implique immédiatement que $d_{(e,e)}m$ est une loi associative. En différentiant la relation $m(g, e) = g$ on constate que 0 est élément neutre de cette loi. Enfin, en différentiant i au point e on obtient un endomorphisme $d_e i$ de $T_e G$ dont on voit immédiatement qu'il fournit l'application “inverse” de la loi $T_e G$, laquelle est donc une loi de groupe.

Quelle est cette loi ? Tout simplement l'addition du \mathbb{R} -ev $T_e G$. En effet

$$d_{(e,e)}m(X, Y) = d_e[x \mapsto m(x, e)](X) + d_e[y \mapsto m(e, y)](Y) = d_e \text{id}_G(X) + d_e \text{id}_G(Y) = X + Y.$$

En conséquence, $d_e i(X) = -X$ pour tout $X \in T_e G$.

1.5.2 Représentation adjointe d'un groupe de Lie. Pour un élément $x \in G$, on note

$$\begin{aligned} \text{Int}_x : G &\rightarrow G \\ y &\mapsto xyx^{-1} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \text{Ad}_x := d_e(\text{Int}_x) : T_e G \rightarrow T_e G.$$

Puisque $\text{Int}_x \circ \text{Int}_{x'} = \text{Int}_{xx'}$, on a aussi $\text{Ad}_x \circ \text{Ad}_{x'} = \text{Ad}_{xx'}$, si bien que Ad_x est inversible et que l'application

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{GL}(T_e G) \\ x &\mapsto \text{Ad}_x \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. Comme l'application $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}$ est lisse, l'application obtenue par différentiation $G \times T_e G \longrightarrow T_e G$, $(x, Y) \mapsto \text{Ad}_x(Y)$ est lisse aussi, et par conséquent le morphisme Ad est lisse. On l'appelle *représentation adjointe* de G . Son espace sous-jacent est donc l'espace tangent en e .

1.5.3 Construction du crochet. Comme $\text{GL}(T_e G)$ est un ouvert du \mathbb{R} -espace vectoriel $\text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G)$, on peut identifier ce dernier à l'espace tangent en tout point de $\text{GL}(T_e G)$ et en particulier au point e . En différentiant Ad au point e on obtient alors une application \mathbb{R} -linéaire

$$\text{ad} := d_e \text{Ad} : \begin{array}{ccc} T_e G & \rightarrow & \text{End}_{\mathbb{R}}(T_e G) \\ X & \mapsto & \text{ad}_X \end{array} .$$

Il ne reste plus qu'à définir le crochet par :

$$[X, Y] := \text{ad}_X(Y), \text{ pour } X, Y \in T_e G.$$

Par construction, c'est bien une application bilinéaire $L \times L \longrightarrow L$, mais il reste encore à prouver les axiomes i) et ii) des crochets de Lie.

1.5.4 PROPOSITION.— *Le crochet défini ci-dessus sur $T_e G$ est antisymétrique.*

Démonstration. Considérons l'application commutateur $c : G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. C'est une application lisse qui envoie $G \times \{e\}$ et $\{e\} \times G$ sur $\{e\}$.

Différentions c selon y au point e . On obtient l'application lisse $G \times T_e G \longrightarrow T_e G$, $(x, Y) \mapsto \text{Ad}_x(Y) - Y$. (Remarquer que $c(x, y) = \text{Int}_x(y)i(y)$). En différentiant cette dernière application selon x au point e , on obtient l'application bilinéaire

$$\partial_x \partial_y c : T_e G \times T_e G \longrightarrow T_e G, (X, Y) \mapsto \text{ad}_X(Y).$$

Maintenant, différencions d'abord c selon x au point e . On obtient l'application lisse $T_e G \times G \longrightarrow T_e G$, $(X, y) \mapsto X - \text{Ad}_y(X)$. (Remarquer que $c(x, y) = x \text{Int}_y(i(x))$). En différentiant cette dernière selon y au point e , on obtient l'application bilinéaire

$$\partial_y \partial_x c : T_e G \times T_e G \longrightarrow T_e G, (X, Y) \mapsto -\text{ad}_Y(X).$$

Comme toutes nos applications sont lisses, le théorème de Schwarz sur la commutation des dérivées partielles nous assure que $\partial_x \partial_y c = \partial_y \partial_x c$, d'où l'antisymétrie voulue. □

Avant de prouver l'identité de Jacobi, nous allons d'abord vérifier la functorialité de la construction du crochet.

1.5.5 PROPOSITION.— *Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie.*

i) *Pour tout $x \in G$, on a $d_e \varphi \circ \text{Ad}_x = \text{Ad}_{\varphi(x)} \circ d_e \varphi$.*

ii) *Pour tout $X \in T_e G$, on a $d_e \varphi \circ \text{ad}_X = \text{ad}_{d_e \varphi(X)} \circ d_e \varphi$.*

Démonstration. i) Puisque φ est un morphisme de groupes, on a pour tout $x \in G$ l'égalité $\varphi \circ \text{Int}_x = \text{Int}_{\varphi(x)} \circ \varphi$. On obtient i) en différentiant cette égalité au point e .

ii) L'égalité i) est une égalité de fonctions lisses $G \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_e G, T_e G')$. En différentiant cette égalité au point e , on obtient ii). \square

Appliquons cette proposition dans le cas où $G = G'$ et $\varphi = \text{Int}_g$ pour un élément $g \in G$. Le point ii) nous donne alors $\text{Ad}_g \circ \text{ad}_X = \text{ad}_{\text{Ad}_g(X)} \circ \text{Ad}_g$, ce qui s'écrit encore

$$\text{Ad}_g([X, Y]) = [\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y], \quad \forall Y \in T_e G.$$

1.5.6 COROLLAIRE.— *Le crochet défini ci-dessus sur $T_e G$ vérifie l'identité de Jacobi.*

Démonstration. En différentiant l'identité ci-dessus au point $g = e$, on obtient pour tout $Z \in T_e G$:

$$\begin{aligned} \text{ad}_Z([X, Y]) &= d_{(e,e)}((g, h) \mapsto [\text{Ad}_g X, \text{Ad}_h Y])(Z, Z) \\ &= [\text{ad}_Z X, \text{Ad}_e Y] + [\text{Ad}_e X, \text{ad}_Z Y] \\ &= [\text{ad}_Z(X), Y] + [X, \text{ad}_Z(Y)] \end{aligned}$$

ce qui équivaut à l'identité de Jacobi (au moins lorsqu'on aura prouvé l'antisymétrie du crochet). \square

1.5.7 L'algèbre de Lie de G . Récapitulons ce que nous avons obtenu :

- i) l'espace tangent $T_e G$ muni du crochet 1.5.3 est une \mathbb{R} -algèbre de Lie, que nous noterons $\text{Lie}(G)$.
- ii) tout morphisme de groupes de Lie $\varphi : G \longrightarrow G'$ induit un morphisme d'algèbres de Lie $d\varphi : \text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Lie}(G')$ par dérivation en l'élément neutre.
- iii) $\text{Lie}(G \times G') = \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G')$ (clair).
- iv) $\text{Lie}(G) = \text{Lie}(G^0)$ (clair).
- v) $\text{Lie}(G)$ est l'espace de la représentation adjointe $\text{Ad}_G : G \longrightarrow \text{Lie}(G)$.

Exemples. — i) L'algèbre de Lie d'un groupe discret est nulle.

ii) $\text{Lie}(\mathbb{R}) = \text{Lie}(\mathbb{R}^\times) = \text{Lie}(S^1) = \mathbb{R}$ (muni du crochet nul). Plus généralement, le crochet de Lie d'un groupe de Lie *abélien* est nul.

iii) $\text{Lie}(\text{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ (cf notation plus haut) et la représentation adjointe est donnée par la conjugaison. En effet, l'espace tangent en I_n s'identifie à $M_n(\mathbb{R})$. Soient $x, y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et supposons $y = I_n + Y$ avec $\|Y\| < 1$. L'égalité $xyx^{-1} = I_n + xYx^{-1}$ montre que Ad_x est la conjugaison par x sur $M_n(\mathbb{R})$. Supposons $x = I_n + X$ avec $\|X\| < 1$. On a alors $\text{Ad}_x(Y) = (I_n + X)Y(I_n - X) + o(X) = Y + [X, Y] + o(X)$, ce qui montre que $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$.

iv) Plus intrinsèquement, $\text{Lie}(\text{GL}(V)) = \mathfrak{gl}(V)$.

Exercice. – Montrer que la différentielle du déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^\times$ est la trace $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Voici un exemple d'interaction entre propriétés des groupes et de leurs algèbres de Lie.

1.5.8 PROPOSITION. – Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie.

- i) $d\varphi$ est surjective $\Leftrightarrow \varphi(G) \supset G'^0$,
- ii) $d\varphi$ est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)$ est discret,
- iii) Si G' est connexe, alors $d\varphi$ est bijective $\Leftrightarrow \varphi$ est un revêtement.

Démonstration. Nous avons déjà vu que le i) découle du théorème du rang constant. Le ii) en découle aussi : si $d_e\varphi$ est injective, elle l'est dans un voisinage de e et le théorème du rang constant nous donne l'existence d'un voisinage de e dans lequel la restriction de φ est injective. Le noyau $\mathrm{Ker}(d\varphi)$ est alors discret. La réciproque est aussi claire. Enfin le iii) découle de i) et ii) : soit \mathcal{V} est un voisinage de e tel que $\mathcal{V} \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{e\}$. Par continuité de la multiplication et de l'inverse on peut trouver un voisinage de e tel que $\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} \subset \mathcal{V}$. Alors pour $x \neq y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $x\mathcal{U} \cap y\mathcal{U} = \emptyset$. Soit $\mathcal{U}' := \varphi(\mathcal{U})$. C'est un voisinage ouvert de e' dans G' (car $d\varphi$ est bijective) et $\varphi^{-1}(\mathcal{U}') \simeq \mathrm{Ker}(\varphi) \times \mathcal{U}$. Par translation on obtient $\varphi^{-1}(g'\mathcal{U}') \simeq \mathrm{Ker}(\varphi) \times g\mathcal{U}$ pour tout $g' \in G'$ et $g \in \varphi^{-1}(g')$, ce qui montre que φ est un revêtement. \square

1.6 Sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Notre but ici est de prouver que tout sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est canoniquement un sous-groupe de Lie (cas particulier du théorème de Cartan-Von Neumann), et de donner un moyen de calculer son algèbre de Lie. Ceci s'appliquera donc aux groupes classiques présentés plus haut. Notre outil principal sera l'exponentielle de matrices.

1.6.1 Exponentielle. Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Choisissons une norme sur V et munissons $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ de la norme $\|\cdot\|$ du sup sur la boule unité. Cette norme est sous-multiplicative : $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Il s'ensuit que la série

$$\exp(u) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} u^n$$

est normalement convergente et définit une application analytique, donc lisse de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ dans lui-même. Si u et v commutent, on a $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$. En particulier, $\exp(u)$ est inversible d'inverse $\exp(-u)$. On a $\exp(0) = \mathrm{id}_V$ et $d_0\exp = \mathrm{id}_{\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)}$ est inversible. Ainsi, \exp réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ sur un voisinage de id_V dans $\mathrm{GL}(V)$.

Dans toute cette discussion, on peut bien-sûr remplacer $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ par $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}(V)$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.6.2 *Sous-groupes à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$.* Les propriétés de l'exponentielle montrent que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tX) \in GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe à 1 paramètre. En fait, tous les sous-groupes à 1 paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ sont de cette forme. Plus précisément :

PROPOSITION. – Soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe à 1 paramètre, et soit $\lambda'(0) \in M_n(\mathbb{R})$ sa dérivée en 0. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(t) = \exp(t\lambda'(0))$.

Démonstration. Puisque λ est un morphisme de groupe, on a $\lambda'(t) = \lambda(t)\lambda'(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même on a $\frac{d}{dt}(t \mapsto \exp(t\lambda'(0))) = \exp(t\lambda'(0))\lambda'(0)$ pour tout t . Ainsi λ et $t \mapsto \exp(t\lambda'(0))$ satisfont la même équation différentielle linéaire, et la même condition initiale $\lambda(0) = \exp(0\lambda'(0)) = e$. Par unicité des solutions d'une telle équation, on a bien égalité de ces deux fonctions sur \mathbb{R} . \square

Nous noterons $\mathfrak{X}(G)$ l'ensemble des sous-groupes à 1 paramètre d'un groupe de Lie G . La proposition montre que l'application

$$\mathfrak{X}(GL_n(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \lambda \mapsto \lambda'(0)$$

est une *bijection*, d'inverse $X \mapsto (t \mapsto \exp(tX))$. On peut alors se demander comment exprimer la structure vectorielle et le crochet de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ en termes de sous-groupes à 1 paramètre.

1.6.3 PROPOSITION. – La structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(GL_n(\mathbb{R}))$ est donnée par les formules suivantes :

- $(r.\lambda)(t) = \lambda(rt)$ pour $r \in \mathbb{R}$,
- $(\lambda + \mu)(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda(t/k)\mu(t/k))^k$,
- $[\lambda, \mu](t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda(1/k)\mu(t/k)\lambda(-1/k)\mu(-t/k))^{k^2}$.

Démonstration. La formule pour la multiplication par r est claire. Pour l'addition et le crochet, il suffit de prouver les deux formules suivantes :

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k}))^k = \exp(X + Y)$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k})(\exp(\frac{-X}{k})\exp(\frac{-Y}{k}))^{k^2} = \exp([X, Y])$.

Celles-ci s'obtiennent en faisant un développement limité, cf notes de mon cours de M1 2.1.2. \square

1.6.4 THÉORÈME. – Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est un sous-groupe de Lie et $\text{Lie}(G) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$.

Démonstration. Posons $L := \{X \in M_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$. Le point crucial est que, d'après la proposition suivante, cet ensemble est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel.

Choisissons un supplémentaire E de L dans $M_n(\mathbb{R})$ et considérons l'application

$$F : L \times E \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y).$$

Sa différentielle $d_{(0,0)}F$ est inversible (c'est simplement l'application somme $L \oplus E \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$). Donc il existe

- un voisinage \mathcal{U} de 0 dans L ,
- un voisinage \mathcal{V} de 0 dans E ,
- et un voisinage \mathcal{W} de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

tels que F réalise un difféomorphisme $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$. Noter que $F(\mathcal{U} \times \{0\}) \subset \mathcal{W} \cap G$.

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de 0 dans E , tel que, posant $\mathcal{W}' = F(\mathcal{U} \times \mathcal{V}')$, on a

$$(*) : F(\mathcal{U} \times \{0\}) = \mathcal{W}' \cap G.$$

Ceci montrera que $\mathcal{W}' \cap G$ est une sous-variété de \mathcal{W}' et identifiera l'espace tangent en e de cette sous-variété à l'espace tangent en 0 de \mathcal{U} , c'est-à-dire L . Par translation, on en déduira finalement que G est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $T_e G = L$, comme annoncé.

Admettons un instant que

$$(**) : \text{il existe un voisinage } \mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \text{ de 0 dans } E \text{ tel que } \exp(\mathcal{V}') \cap G = \{I_n\}.$$

Posons alors $\mathcal{W}' = F(\mathcal{U} \times \mathcal{V}')$. Pour tout $g \in \mathcal{W}' \cap G$, il existe $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}'$ tels que $g = F(X, Y)$. Mais alors, $\exp(Y) = \exp(-X)g \in \exp(\mathcal{V}') \cap G = \{I_n\}$, donc $g = \exp(X)$. Il s'ensuit que l'égalité $(*)$ est vérifiée pour \mathcal{V}' .

Reste à prouver $(**)$. Supposons le contraire. On peut alors trouver une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments *non nuls* de E tendant vers 0, telle que $\exp(Y_n) \in G$ pour tout n . Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que la suite $(Y_n / \|Y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite Y dans E (compacité de la sphère). Notons que $Y \neq 0$. Nous allons montrer que $Y \in L$, ce qui contredira le fait que $L \cap E = \{0\}$. Pour cela nous devons prouver que $\exp(tY) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $[x]$ la partie entière d'un réel x , et écrivons

$$\exp(t/\|Y_n\| \cdot Y_n) = \exp(Y_n)^{[t/\|Y_n\|]} \cdot \exp((t/\|Y_n\| - [t/\|Y_n\|])Y_n).$$

Comme le terme $\exp((t/\|Y_n\| - [t/\|Y_n\|])Y_n)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que

$$\exp(tY) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(Y_n)^{[t/\|Y_n\|]} \in G.$$

□

1.6.5 Algèbres de Lie classiques. Nous savons maintenant que les groupes classiques sont bien des groupes de Lie et nous avons un moyen de calculer leur algèbre de Lie. Tous les groupes classiques sont définis dans un $\mathrm{GL}_n(K)$ ou un $\mathrm{GL}(V)$ convenable, et le crochet de leur algèbre de Lie est induit par celui de \mathfrak{gl}_n ou de $\mathfrak{gl}(V)$. Il nous suffit donc de décrire les conditions qui définissent les \mathbb{R} -ev sous-jacents.

Par exemple, l'égalité $\exp(\mathrm{tr}(u)) = \det(\exp(u))$ montre que

$$\mathfrak{sl}(V) := \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(V)) = \{u \in \mathfrak{gl}(V), \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$

Remarquons que c'est toujours un K -sev (pas seulement un \mathbb{R} -sev). En termes matriciels, cela donne

- i) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (matrices de trace nulle). Sa dimension est $n^2 - 1$.

ii) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \operatorname{tr}(X) = 0\}$. Sa dimension réelle est $2n^2 - 2$.

Par ailleurs, supposons $G = \{g \in \operatorname{GL}(V), \Psi(gv, gw), \forall v, w \in V\}$ défini par une forme bilinéaire non dégénérée Ψ (qu'elle soit symétrique, alternée ou hermitienne). En d'autres termes, si g^* désigne l'adjoint de g pour Ψ , on a $G = \{g \in \operatorname{GL}(V), gg^* = \operatorname{id}_V\}$. Comme $\exp(u)^* = \exp(u^*)$ (par passage à la limite), on constate que

$$\mathfrak{g} = \{u \in \mathfrak{gl}(V), u + u^* = 0\}.$$

Notons d'ailleurs que c'est toujours un K -espace vectoriel, sauf dans le cas unitaire, où $K = \mathbb{C}$ mais \mathfrak{g} n'est qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel. En termes matriciels, cela donne :

- iii) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Lie}(\operatorname{O}(n)) = \operatorname{Lie}(\operatorname{SO}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), X + {}^tX = 0\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques. Sa dimension est $n(n-1)/2$.
- iv) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \operatorname{Lie}(\operatorname{O}(n, \mathbb{C})) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^tX = 0\}$. Sa dimension réelle est $n(n-1)$.
- v) $\mathfrak{u}_n = \operatorname{Lie}(\operatorname{U}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^t\bar{X} = 0\}$. Par exemple, $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Sa dimension est n^2 .
- vi) $\mathfrak{su}_n = \operatorname{Lie}(\operatorname{SU}(n)) = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Sa dimension est $n^2 - 1$.
- vii) $\mathfrak{sp}_{2n}(K) = \operatorname{Lie}(\operatorname{Sp}_{2n}(K)) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(K), {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0\}$. Pour calculer la dimension on remarque que ${}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0 \Leftrightarrow (J_{2n}X \text{ antisymétrique})$. On trouve que la dimension réelle est $n(n+1)/2$ si $K = \mathbb{R}$ et $n(n+1)$ si $K = \mathbb{C}$.

1.6.6 Bilan. Pour un sous-groupe fermé G de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, on sait maintenant que :

- i) G est un groupe de Lie.
- ii) L'application $\mathfrak{X}(G) \rightarrow \operatorname{Lie}(G), \lambda \mapsto \lambda'(0)$ est bijective.
- iii) La structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(G)$ est donnée par les formules de la proposition 1.6.3.
- iv) L'application $\exp_G : \operatorname{Lie}(G) \simeq \mathfrak{X}(G) \rightarrow G, \lambda \mapsto \lambda(1)$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\operatorname{Lie}(G)$ sur un voisinage de e dans G .
- v) Si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un morphisme vers un autre sous-groupe fermé d'un $\operatorname{GL}_{n'}(\mathbb{R})$, alors $d\varphi$ s'identifie à l'application de composition $\mathfrak{X}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(G'), \lambda \mapsto \varphi \circ \lambda$. En particulier, on a $\exp_{G'} \circ d\varphi = \varphi \circ \exp_G$.

Exemples. - i) Pour $\varphi = \operatorname{Int}_x$, on obtient $\operatorname{Int}_x \circ \exp_G = \exp_G \circ \operatorname{Ad}_x$.

ii) Pour $\varphi = \operatorname{Ad} : G \rightarrow \operatorname{GL}(\operatorname{Lie}(G))$, on obtient $\operatorname{Ad}_{\exp_G(X)} = \exp_{\operatorname{GL}(T_e G)}(\operatorname{ad}_X)$ pour tout $X \in \operatorname{Lie}(G)$. Même dans le cas $G = \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, l'égalité de matrices (pour $Y \in M_n(\mathbb{R})$) $\exp(X)Y\exp(-X) = \exp(\operatorname{ad}_X)(Y)$ est difficile à prouver directement.

iii) Si φ est un plongement $G \hookrightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $d\varphi$ est un plongement $\operatorname{Lie}(G) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ et l'exponentielle de G est la restriction de l'exponentielle de matrices dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$.

On remarquera que les énoncés de ces propriétés n'utilisent pas de plongement de G dans un $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ (seule l'existence d'un tel plongement a été utilisée pour les prouver). On

peut donc espérer les généraliser à un groupe de Lie quelconque, et c'est ce que nous ferons dans la prochaine section.

Terminologie : un groupe de Lie qui admet un plongement dans un $GL_n(\mathbb{R})$ est appelé *groupe de Lie linéaire*.

Voici un exemple de conséquence des propriétés ci-dessus :

1.6.7 PROPOSITION.— *Soit G un groupe de Lie linéaire connexe. Le noyau de la représentation adjointe $Ad_G : G \rightarrow GL(\text{Lie}(G))$ est le centre $Z(G)$ de G .*

Démonstration. Le fait que $Z(G) \subset \text{Ker}(Ad_G)$ est facile : si $z \in Z(G)$, on a $\text{Int}_z = \text{id}_G$, donc $Ad_z = \text{id}_{T_e G}$. Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(Ad_G)$. D'après la propriété v) on a $\exp_G \circ Ad_x = \text{Int}_x \circ \exp_G$. D'après la propriété iv), on en déduit que Int_x agit par l'identité sur un voisinage \mathcal{U} de e . Puisque l'ensemble des éléments de G qui sont fixes par Int_x est un groupe, il contient le groupe engendré par le voisinage \mathcal{U} , ie G tout entier car celui-ci est connexe. Donc $\text{Int}_x = \text{id}_G$ et $x \in Z(G)$. \square

Exercice. – On veut montrer que $SU(2)$ est le revêtement universel de $SO(3, \mathbb{R})$.

- i) Montrer que $SU(2)$ agit simplement transitivement sur la sphère S^3 et en déduire qu'il est simplement connexe.
- ii) Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ a pour base $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
- iii) Considérons la représentation $Ad_{SU(2)} : SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{su}(2))$. Identifions $GL(\mathfrak{su}(2))$ avec $GL_3(\mathbb{R})$ via la base ci-dessus. Montrer alors que l'image $Ad(SU(2))$ est contenue dans $SO(3, \mathbb{R}) \subset GL_3(\mathbb{R})$.
- iv) Montrer que $\text{Ker } Ad_{SU(2)} = \{\pm I_2\}$. En déduire que $\text{ad}_{\mathfrak{su}(2)}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, puis que $Ad_{SU(2)}$ induit un isomorphisme $SU(2)/\{\pm I_2\} \xrightarrow{\sim} SO(3, \mathbb{R})$.

Pour une autre construction du morphisme $SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ à partir des quaternions \mathbb{H} , cf notes de M1 1.3.6.

1.7 L'exponentielle d'un groupe de Lie

On voudrait généraliser les propriétés 1.6.6 à tout groupe de Lie G , pas nécessairement linéaire. Pour s'assurer que ce travail est bien nécessaire, voici un exemple de groupe de Lie non linéaire.

1.7.1 Un groupe de Lie non linéaire. Notons U_3 le groupe des matrices réelles unipotentes supérieures de taille 3×3 . C'est un sous-groupe fermé de $GL_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Soit $\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{Z} \right\}$ C'est un sous-groupe central et discret de U_3 . Notons

$H := U_3/\Gamma$, muni de la topologie quotient. La projection $\pi : U_3 \longrightarrow H$ est alors un revêtement de H . Il existe donc une seule structure de variété lisse sur H telle que π soit lisse. Ceci fait de H un groupe de Lie.

PROPOSITION. – *Il n'existe pas de plongement de H dans un $GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Identifions $Lie(H)$ à $Lie(U_3)$ par l'application $d\pi$. L'algèbre $Lie(U_3)$ a pour base les trois matrices élémentaires (E_{12}, E_{13}, E_{23}) . Nous allons montrer que pour tout morphisme de groupes de Lie $\varphi : H \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, on a $d\varphi(E_{13}) = 0$. Ceci impliquera évidemment que H ne se plonge dans aucun $GL_m(\mathbb{R})$.

Montrons d'abord que $d\varphi(E_{13})$ est une matrice nilpotente dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de $d\varphi(E_{13})$ et $V_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ son espace propre. Comme $[d\varphi(E_{13}), d\varphi(E_{12})] = [d\varphi(E_{13}), d\varphi(E_{23})] = 0$, l'espace V_λ est stable par $d\varphi(E_{12})$ et $d\varphi(E_{23})$. Or, $[d\varphi(E_{12}), d\varphi(E_{23})] = d\varphi([E_{12}, E_{23}]) = d\varphi(E_{13})$, donc $[d\varphi(E_{12})|_{V_\lambda}, d\varphi(E_{23})|_{V_\lambda}] = d\varphi(E_{13})|_{V_\lambda} = \text{mult. par } \lambda$. Il s'ensuit que $\lambda \dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda) = \text{tr}([d\varphi(E_{12})|_{V_\lambda}, d\varphi(E_{23})|_{V_\lambda}]) = 0$ (trace d'un commutateur) et finalement que $\lambda = 0$. Ainsi $d\varphi(E_{13})$ est bien nilpotente.

Montrons maintenant que $\exp(d\varphi(E_{13})) = I_n$. On a $\exp(d\varphi(E_{13})) = \varphi(\exp_H(E_{13}))$. Or, on a aussi

$$\exp_H(E_{13}) = \pi(\exp_{U_3}(E_{13})) = \pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_H,$$

donc finalement $\exp(d\varphi(E_{13})) = \varphi(e_H) = I_n$.

Pour conclure que $d\varphi(E_{13}) = 0$, il nous reste à remarquer que l'exponentielle (de matrices) induit un difféomorphisme du "cône nilpotent" de $M_n(\mathbb{C})$ défini comme $\{X \in M_n(\mathbb{C}), X^n = 0\}$ sur le lieu unipotent de $GL_n(\mathbb{C})$ défini par $\{g \in GL_n(\mathbb{C}), (g - I_n)^n = 0\}$. En effet, le difféomorphisme inverse est simplement donné par le log : $g \mapsto \sum_{n>0} \frac{1}{n}(g - I_n)^n$. \square

1.7.2 Équations différentielles. L'outil principal pour obtenir ces propriétés était l'exponentielle, laquelle était induite par l'exponentielle de matrices, une fois le groupe plongé dans un $GL_n(\mathbb{R})$. Nous devons donc trouver une définition intrinsèque de l'exponentielle. Plus précisément, considérons l'application $\mathfrak{X}(G) \longrightarrow Lie(G), \lambda \mapsto \lambda'(0)$. On veut montrer que :

- i) Elle est bijective. Notons alors $X \mapsto \lambda_X$ son inverse et posons $\exp_G(X) := \lambda_X(1)$.
- ii) L'application $X \mapsto \exp_G(X)$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $Lie(G)$ sur un voisinage de e dans G .

Comme λ est un morphisme de groupe, tout $\lambda \in \mathfrak{X}(G)$ satisfait l'équation différentielle

$$(*) \begin{cases} \lambda'(t) = d_e L_{\lambda(t)}(X) \text{ avec } \lambda'(0) = X \\ \lambda(0) = e \text{ (condition initiale)} \end{cases}$$

. On voit donc que :

- L'injectivité de $\lambda \mapsto \lambda'(0)$ équivaut à l'unicité des solutions (*).
- La surjectivité de $\lambda \mapsto \lambda'(0)$ équivaut à l'existence de solutions de (*).

- La lissité de \exp_G est une condition de régularité des solutions en fonction du paramètre X .

Nous allons donc montrer comment toutes ces propriétés découlent de la théorie du flot sur les variétés.

1.7.3 Rappels sur les flots de champs de vecteurs. Soit M une variété lisse et $\xi : M \rightarrow TM$ un champ de vecteurs sur M , i.e. une section lisse du fibré tangent $TM \xrightarrow{\pi} M$. La théorie du flot, qui découle “immédiatement” du théorème de Cauchy-Lipschitz, nous dit :

- i) Il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de $\{0\} \times M$ dans $\mathbb{R} \times M$ et une application $\mathcal{U} \rightarrow M$, $(t, m) \mapsto \varphi_t^\xi(m)$ qui vérifie l'équation différentielle

$$ED_\xi : \begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_t^\xi(m) = \xi(\varphi_t^\xi(m)) & \forall (t, m) \in \mathcal{U}. \\ \varphi_0(m) = m & \forall m \in M \end{cases}$$

- ii) Si (\mathcal{U}', φ') est une autre solution de l'équation différentielle ED_ξ , alors $\varphi|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'} = \varphi'|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'}$.

Il existe donc un plus grand ouvert \mathcal{U} sur lequel l'équation ED_ξ admet une solution. On dit que ξ est *complet* si $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times M$.

Le point ii) implique aussi que si $(t_1, m) \in \mathcal{U}$ et $(t_2, \varphi_{t_1}^\xi(m)) \in \mathcal{U}$, alors $(t_1 + t_2, m) \in \mathcal{U}$ et $\varphi_{t_1+t_2}^\xi(m) = \varphi_{t_2}^\xi(\varphi_{t_1}^\xi(m))$.

Lorsque le champ ξ est complet, cela signifie que $t \mapsto \varphi_t^\xi$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de G .

1.7.4 Champs invariants par un groupe. Supposons qu'un groupe G agisse par difféomorphismes sur M . Notons $(g, m) \mapsto \alpha_g(m) = gm$ cette action. Elle induit aussi une action sur l'espace des champs de vecteurs définie par

$$g_*\xi(m) = d_{g^{-1}m}\alpha_g(\xi(g^{-1}m))$$

où $d_{g^{-1}m}\alpha_g : T_{g^{-1}m} \xrightarrow{\sim} T_m$ est le \mathbb{R} -isomorphisme obtenu par dérivation en $g^{-1}m$. On dit que ξ est *G-invariant* si $g_*\xi = \xi$ pour tout $g \in G$.

LEMME. – *Supposons qu'il existe un sous-ensemble compact $C \subset M$ tel que $G.C = M$ (on dit que l'action de G est cocompact). Alors tout champ de vecteurs ξ invariant par G est complet, et son flot est formé de difféomorphismes G -équivariants de M .*

Démonstration. Soit \mathcal{U} le domaine maximal d'existence de solution pour ED_ξ . Puisque ξ est invariant, ce domaine est stable par l'action de G . Ainsi pour tout $m \in M$, il existe un voisinage ouvert G -stable U_m de m dans M et un $t_m > 0$ tels que $] -t_m, t_m[\times U_m \subset \mathcal{U}$. Par compacité de M modulo G , on peut recouvrir M d'un nombre fini de U_m . Posant t_0 le plus petit des t_m associés, on voit que tout point m possède un voisinage de la forme $] -t_0, t_0[\times U_m$ contenu dans \mathcal{U} . Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{t}{n} \in] -t_0, t_0[$. Ainsi $(\frac{t}{n}, m) \in \mathcal{U}$, $(\frac{t}{n}, \varphi_{\frac{t}{n}}(m)) \in \mathcal{U}$, etc... Il s'ensuit que $(t, m) \in \mathcal{U}$ et

$$\varphi_t^\xi(m) = \varphi_{\frac{t}{n}}^\xi(\varphi_{\frac{t}{n}}^\xi(\dots \varphi_{\frac{t}{n}}^\xi(m))).$$

Ainsi le champ de vecteur est complet. Soit maintenant $g \in G$. Puisque ξ est G -invariant, l'application $(t, m) \mapsto g\varphi_t^\xi(g^{-1}m)$ est aussi une solution de ED_ξ , donc égale au flot de ξ . Ce dernier vérifie donc $\varphi_t^\xi(gm) = g\varphi_t^\xi(m)$ pour tout g , *i.e.* est G -équivariant. \square

1.7.5 Champs invariants à gauche sur G . Maintenant, on revient à un groupe de Lie G . On le fait agir sur lui-même par *translations à gauche*, en notant $L_g(x) = gx$ comme plus haut. Ceci induit une action sur le fibré tangent TG , compatible à la projection π , et que nous noterons $(g, \theta) \mapsto L_g^t(\theta)$. L'application

$$\begin{aligned} TG &\rightarrow G \times T_e G \\ \theta &\mapsto (\pi(\theta), L_{\pi^{-1}(\theta)}^t(\theta)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme compatible aux projections sur G , dont l'inverse est donné par

$$\begin{aligned} G \times T_e G &\rightarrow TG \\ (g, X) &\mapsto (g, d_e L_g(X)) \end{aligned}$$

Le fibré tangent de G est donc "parallélisable". Soit alors $X \in \text{Lie}(G) = T_e G$. On peut donc lui associer un *champ de vecteurs invariant à gauche* ξ_X par la formule :

$$\forall g \in G, \xi_X(g) := d_e L_g(X).$$

Soit $\mathcal{V}(G)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des champs de vecteurs sur G et $\mathcal{V}(G)^L$ le sous-espace des champs invariants à gauche.

LEMME. – L'application $X \mapsto \xi_X$ est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $T_e G \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G)^L$ dont l'inverse est $\xi \mapsto \xi(e)$.

Démonstration. clair. \square

L'action de G sur lui-même par translations à gauche est transitive, donc a fortiori cocompacte. Le champ ξ_X est donc complet. Son flot $t \mapsto \varphi_t^X$ est formé de difféomorphismes G -équivariants. On a donc

$$\varphi_t^X(g) = g\varphi_t^X(e), \forall g \in G.$$

Posons alors

$$\lambda_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_X(t) := \varphi_t^X(e) \in G.$$

C'est un sous-groupe à 1 paramètre de G , puisque $\varphi_{t+t'}^X(e) = \varphi_t^X(\varphi_{t'}^X(e)) = \varphi_{t'}^X(e)\varphi_t^X(e)$. C'est aussi l'unique courbe intégrale du champ de vecteurs ξ_X centrée en e .

1.7.6 PROPOSITION.– *Les applications*

$$\begin{array}{ccc} T_e G &\rightarrow \mathfrak{X}(G) & \text{et} & \mathfrak{X}(G) &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto \lambda_X & & \lambda &\mapsto \lambda'(0) \end{array}$$

sont inverses l'une de l'autre. De plus, si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un morphisme lisse, alors $\lambda_{d\varphi(X)} = \varphi \circ \lambda_X$.

Démonstration. Par définition $\lambda'_X(0) = \xi_X(\varphi_0^X(e)) = \xi_X(e) = X$. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathfrak{X}(G)$. On a déjà remarqué qu'il satisfait l'équation différentielle

$$\lambda'(t) = d_e L_{\lambda(t)}(\lambda'(0)) \text{ et } \lambda(0) = e,$$

si bien que $t \mapsto \lambda(t)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs $\xi_{\lambda'(0)}$ centrée en e . Par unicité des courbes intégrales, on a $\lambda = \lambda_{\lambda'(0)}$.

Soit maintenant φ comme dans l'énoncé. On a

$$(\varphi \circ \lambda_X)'(0) = d_e \varphi(\lambda'_X(0)) = d\varphi(X)$$

donc $\varphi \circ \lambda_X = \lambda_{d\varphi(X)}$. □

1.7.7 DÉFINITION.— *On définit l'exponentielle de G par la formule*

$$\begin{aligned} \exp_G : \text{Lie}(G) &\rightarrow G \\ X &\mapsto \exp_G(X) := \lambda_X(1) \end{aligned} .$$

Remarque. — D'après la proposition précédente, si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un morphisme lisse, on a

$$\exp_{G'} \circ d\varphi = \varphi \circ \exp_G.$$

Comme dans le cas linéaire, on a le cas particulier intéressant $\varphi = \text{Ad}$ qui donne

$$\exp_{\text{GL}(T_e G)}(\text{ad}_X) = \text{Ad}_{\exp_G(X)}.$$

1.7.8 PROPOSITION.— *L'application \exp_G est lisse et sa différentielle $d_0 \exp_G : T_e G \rightarrow T_e G$ est l'identité $\text{id}_{T_e G}$. En conséquence, \exp_G induit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\text{Lie}(G)$ sur un voisinage de e dans G .*

Démonstration. Considérons la variété $M = G \times T_e G$. Puisque l'application $(g, X) \mapsto d_e L_g(X)$ est lisse, on peut définir le champ de vecteurs

$$\xi : (g, X) \mapsto (\xi_X(g), X) = (d_e L_g(X), 0)$$

sur cette variété.

Montrons que ξ est complet. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times G \times T_e G$ le domaine maximal du flot de ξ . Puisque G agit transitivement sur lui-même, le même argument que dans le lemme 1.7.4 montre qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 dans $T_e G$ tel que $\mathbb{R} \times G \times \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Soit maintenant W un domaine borné dans $T_e G$, et soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $rW \subset \mathcal{V}$. Alors comme $\xi(g, rX) = r\xi(g, X)$, on voit que $\mathbb{R} \times G \times W \subset \mathcal{U}$ avec $\varphi_t^\xi(g, X) := \varphi_{t/r}^\xi(g, rX)$ pour $(t, g, X) \in \mathbb{R} \times G \times W$. Donc finalement, $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times G \times T_e G$ et ξ est complet.

On veut maintenant montrer que pour tout (t, g, X) , on a

$$\varphi_t^\xi(g, X) = (\varphi_t^X(g), X).$$

Notons $pr_2 : M \longrightarrow T_e G$ la seconde projection. On a alors

$$\frac{d}{dt}(pr_2 \circ \varphi_t^\xi) = pr_2 \circ \frac{d}{dt}\varphi_t^\xi = pr_2 \circ (\xi \circ \varphi_t^\xi) = 0.$$

Il s'ensuit que pour tout (t, g, X) on a

$$pr_2(\varphi_t^\xi(g, X)) = pr_2(\varphi_0^\xi(g, X)) = pr_2(g, X) = X.$$

Posons maintenant $pr_1 : M \longrightarrow G$ la première projection. On a de même

$$\frac{d}{dt}(pr_1 \circ \varphi_t^\xi)(g, X) = pr_1(\xi(\varphi_t^\xi(g, X))) = d_e L_{pr_1(\varphi_t^\xi(g, X))}(pr_2(\varphi_t^\xi(g, X))) = \xi_X(pr_1(\varphi_t^\xi(g, X)))$$

ce qui montre que pour tout X , l'application $(t, g) \mapsto pr_1(\varphi_t^\xi(g, X))$ est le flot de ξ_X . On a donc montré que

$$\varphi_t^\xi(g, X) = (\varphi_t^X(g), X)$$

et il s'ensuit que

$$X \mapsto \exp_G(X) = \lambda_X(1) = pr_1(\varphi_1^\xi(e, X))$$

est lisse.

Pour calculer sa différentielle en 0, on procède comme suit :

$$\begin{aligned} d_0 \exp_G(Y) &= \frac{d}{dt} (t \mapsto \exp_G(tY))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (t \mapsto \lambda_{tY}(1))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (t \mapsto \lambda_Y(t))|_{t=0} = \lambda'_Y(0) = Y \end{aligned}$$

□

Remarque. - i) Pour tout $X \in T_e G$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp_G(nX) = \lambda_{nX}(1) = \lambda_X(n) = \exp_G(X)^n$ comme dans le cas linéaire.

ii) Si $[X, Y] = 0$ dans $\text{Lie}(G)$, alors $\exp_G(X)$ et $\exp_G(Y)$ commutent. En effet :

$$\text{Int}_{\exp_G(X)}(\exp_G(Y)) = \exp_G(\text{Ad}_{\exp_G(X)}(Y)) = \exp_G(\exp_{\text{GL}(T_e G)}(\text{ad}_X)(Y)) = \exp_G(Y).$$

Il s'ensuit que l'application $t \mapsto \exp_G(tX)\exp_G(tY)$ est un sous-groupe à 1 paramètre de G . Comme sa dérivée en 0 est $X + Y$, il est égal à λ_{X+Y} . On a donc montré que

$$[X, Y] = 0 \Rightarrow \exp_G(X + Y) = \exp_G(X)\exp_G(Y)$$

comme dans le cas linéaire.

1.7.9 PROPOSITION. - Pour tous $X, Y \in \text{Lie}(G)$, on a

$$\exp_G(X + Y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\exp_G \left(\frac{X}{k} \right) \exp_G \left(\frac{Y}{k} \right) \right)^k.$$

En particulier l'addition de $\text{Lie}(G)$ s'exprime dans $\mathfrak{X}(G)$ par la même formule que dans la proposition 1.6.3.

Démonstration. D'après la proposition précédente, il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 dans $T_e G$ et une unique application lisse $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow T_e G$ telle que $f(0, 0) = 0$ et

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(f(X, Y)).$$

De plus on a $d_{(0,0)}f(X, Y) = X + Y$. Il s'ensuit que pour $k \gg 0$, on a

$$\exp_G\left(\frac{X}{k}\right)\exp_G\left(\frac{Y}{k}\right) = \exp_G\left(\frac{X+Y}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

puis

$$\left(\exp_G\left(\frac{X}{k}\right)\exp_G\left(\frac{Y}{k}\right)\right)^k = \exp_G(X+Y+o(1))$$

d'où la proposition. \square

Remarque. – Par un raisonnement similaire, on peut prouver que le crochet de $\text{Lie}(G)$ s'exprime dans $\mathfrak{X}(G)$ par la même formule que dans la proposition 1.6.3. Cependant, nous n'en aurons pas besoin pour la suite.

On peut finalement préciser et prouver le théorème de Cartan-Von Neumann :

1.7.10 THÉORÈME.– *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G . Alors H est un sous-groupe de Lie de G et $\text{Lie}(H) = \{X \in \text{Lie}(G), \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'ensemble $L := \{X \in \text{Lie}(G), \forall t \in \mathbb{R}, \exp_G(tX) \in H\}$ est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel. On peut donc choisir un supplémentaire E et raisonner comme dans la preuve du cas linéaire (thm 1.6.4). \square

1.7.11 COROLLAIRE.– *Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe de Lie et $\text{Lie}(\text{Ker}(\varphi)) = \text{Ker}(d\varphi)$.*

Exemple. – Comme dans le cas linéaire (proposition 1.6.7), le noyau de la représentation adjointe $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{GL}(\text{Lie}(G))$ est le centre $Z(G)$. C'est donc un sous-groupe de Lie de G et son algèbre de Lie est le "centre" $\mathfrak{z}(\text{Lie}(G)) = \{X \in \text{Lie}(G), \forall Y \in \text{Lie}(G), [X, Y] = 0\}$.

1.7.12 COROLLAIRE.– *Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, et H un sous-groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Alors H est distingué dans G si et seulement si on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ (on dit alors que \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g}).*

Démonstration. Supposons H distingué dans G . Alors $\text{Int}_x(H) \subset H$ pour tout $x \in G$, donc $\text{Ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout $x \in G$, donc par dérivation $\text{ad}_X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Réciproquement, supposons $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, ie $\text{ad}_X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Comme $\text{Ad}_{\exp_G(X)} = \exp_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(\text{ad}_X)$, on constate que pour tout $g \in \exp_G(\mathfrak{g})$ on a $\text{Ad}_g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Or l'image de \exp_G engendre G car elle contient un voisinage de 0 et G est connexe. Donc finalement $\text{Ad}_g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ pour tout $g \in G$. Par ailleurs, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $\exp_G(\text{Ad}_g(X)) =$

$\text{Int}_g(\exp_G(X))$. Comme $(\exp_G)_|_{\mathfrak{h}} = \exp_H$, ceci montre que l'image $\exp_H(\mathfrak{h})$ est stable par Int_g . Donc le groupe engendré par cette image, à savoir H puisqu'il est connexe, est stable par Int_g et finalement H est distingué dans G . \square

Exercice. – Avec les mêmes hypothèses, montrer que H est central dans G si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$.

1.7.13 Quotients. Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie et \mathfrak{h} un idéal de \mathfrak{g} , i.e. un sous- K -espace vectoriel de \mathfrak{g} tel que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Il existe alors une unique structure de K -algèbre de Lie sur l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ telle que la projection $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit un morphisme d'algèbres de Lie. Concrètement, le crochet est donné par $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] := [X, Y] + \mathfrak{h}$ qui est bien défini grâce à la propriété d'idéal.

PROPOSITION. – Soit G un groupe de Lie, et H un sous-groupe de Lie de G . Il existe sur l'espace quotient G/H une unique structure de variété lisse telle que l'application quotient $\pi : G \rightarrow G/H$ soit une fibration de fibre H . Si de plus H est distingué, alors G/H est un groupe de Lie et il y a un unique isomorphisme $\text{Lie}(G/H) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(G)/\text{Lie}(H)$ tel que $d\pi$ s'identifie à la projection $\text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G)/\text{Lie}(H)$.

Démonstration. Munissons G/H de la topologie quotient. Nous allons construire pour tout $g \in G$ une sous-variété \mathcal{V}_g de G contenant g et telle que

- i) \mathcal{V}_g est transverse à $g'H$ au point g' , pour tout $g' \in \mathcal{V}_g$.
- ii) $\pi(\mathcal{V}_g)$ est ouvert dans G/H .
- iii) L'application produit $\mathcal{V}_g \times H \rightarrow \pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}_g))$ est un difféomorphisme.

En recouvrant G/H par des $\pi(\mathcal{V}_g)$ comme ci-dessus, on obtient un atlas lisse qui satisfait toutes les propriétés souhaitées.

Commençons avec une sous-variété \mathcal{U}_g de G transverse à gH au point g . Comme l'application $\mathcal{U}_g \times H \rightarrow G$, $(g', h) \mapsto g'h$ a une différentielle inversible en (g, e) , et quitte à remplacer \mathcal{U}_g par une sous-variété ouverte, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U}_H de e dans H , et un voisinage ouvert \mathcal{U}_G de g dans G tels que la multiplication induise un difféomorphisme $\mathcal{U}_g \times \mathcal{U}_H \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_G$. En particulier, \mathcal{U}_g vérifie les propriétés i) et ii) ci-dessus.

Pour obtenir iii), il suffit de trouver \mathcal{V}_g ouvert dans \mathcal{U}_g tel que l'application produit de iii) soit injective (elle est alors automatiquement un difféomorphisme). On peut supposer que \mathcal{U}_G est relativement compact. Considérons alors : $K := H \cap \overline{\mathcal{U}_G^{-1}\mathcal{U}_G}$. C'est un compact. Puisque G est séparé, pour tout $h \in K \setminus \mathcal{U}_H$, il existe des ouverts $\mathcal{U}_{g,h} \subset \mathcal{U}_g$ contenant g et $\mathcal{U}_{H,h} \subset \mathcal{U}_H$ contenant e tels que $\mathcal{U}_{g,h}h\mathcal{U}_{H,h} \cap \mathcal{U}_{g,h} = \emptyset$. Comme $K \setminus \mathcal{U}_H$ est compact on peut le recouvrir par un nombre fini de $(h_i\mathcal{U}_{H,h_i} \cap K)$. Posons alors $\mathcal{V}_g := \bigcap_i \mathcal{U}_{g,h_i}$. Soit $h \in H \cap \mathcal{V}_g^{-1}\mathcal{V}_g$. Alors $h \in K$. Pour tout i , on a $h_i\mathcal{U}_{H,h_i} \cap \mathcal{V}_g^{-1}\mathcal{V}_g = \emptyset$, donc $h \in \mathcal{U}_H$, et finalement $h = e$, puisque le produit $\mathcal{V}_g \times \mathcal{U}_H \rightarrow G$ est injectif.

Lorsque H est distingué, on voit facilement, que la structure de groupe quotient est compatible avec la structure de variété. Le théorème du rang montre que $\text{Lie}(G/H)$ est un quotient de $\text{Lie}(G)$ et le corollaire 1.7.11 nous montre que le noyau est $\text{Lie}(H)$. \square

Exercice. – Soit $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et H le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Montrer que $G/H \simeq \mathbb{P}^1$ (droite projective réelle).

1.8 Action d'un groupe de Lie sur une variété

L'idée qu'on veut exprimer ici est que le groupe des difféomorphismes d'une variété lisse M se comporte comme un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie serait l'algèbre $\mathcal{V}(M)$ des champs de vecteurs sur M , munie du crochet issu des dérivations. Une action lisse d'un groupe de Lie G sur M peut alors se dériver en une action de $\text{Lie}(G)$ sur les fonctions sur M , que l'on peut aussi exprimer comme un morphisme d'algèbres de Lie $\text{Lie}(G) \rightarrow \mathcal{V}(M)$.

1.8.1 *L'algèbre de Lie des champs de vecteurs.* Soit M une variété lisse. Un champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{V}(M)$ détermine une *dérivation* ∂_ξ de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M , d'où une application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &\rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M)) \\ \xi &\mapsto \partial_\xi : (m \mapsto d_m f(\xi(m))) \end{aligned}$$

On sait que cette application est *bijection* (cf cours de Geo Diff). On en déduit un crochet de Lie $(\xi, \xi') \mapsto [\xi, \xi']$ sur $\mathcal{V}(M)$, caractérisé par l'égalité $\partial_{[\xi, \xi']} = [\partial_\xi, \partial_{\xi'}] = \partial_\xi \partial_{\xi'} - \partial_{\xi'} \partial_\xi$. On a aussi l'expression :

$$(*) \quad [\xi, \xi'] = \frac{d}{dt} \left((\varphi_t^\xi)^* \xi' \right)_{|t=0} : m \mapsto \frac{d}{dt} \left((d_m \varphi_t^\xi)^{-1} \left(\xi'(\varphi_t^\xi(m)) \right) \right)_{|t=0}$$

Exemple. – Dans $M = \mathbb{R}^n$, on a $[x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, x_k \frac{\partial}{\partial x_l}] = \delta_{jk} x_i \frac{\partial}{\partial x_l} - \delta_{il} x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$

1.8.2 *La dérivée d'une action lisse.* Supposons maintenant qu'un groupe de Lie G agisse sur M de manière lisse, c'est à dire telle que le morphisme $G \times M \rightarrow M, g \mapsto gm$ donnant l'action soit lisse. Notons aussi $\alpha : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ le morphisme de groupes associé. On peut alors "dériver" cette action pour obtenir

$$\begin{aligned} \text{"}d\alpha\text{"} : \text{Lie}(G) &\rightarrow \mathcal{V}(M) \\ X &\mapsto \text{"}d\alpha\text{"}(X) : m \mapsto d_e(g \mapsto gm)(X) \end{aligned}$$

La dérivation $\partial_{d\alpha(X)}$ associée au champ de vecteurs $d\alpha(X)$ est alors donnée par :

$$\partial_{d\alpha(X)}(f) : (m \mapsto d_m f(d_e(g \mapsto gm)(X))) = d_e(g \mapsto f(gm))(X), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Exemple. – Regardons l'action de $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $M = \mathbb{R}^n$. On a une base naturelle $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires. En tant que vecteurs tangents à G en e , ils fournissent des dérivations ponctuelles qui s'écrivent simplement

$$d_e f(E_{ij}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_{|(\delta_{ij})_{i,j}} \left((x_{ij})_{i,j} \mapsto f \left(\sum_{ij} x_{ij} E_{ij} \right) \right), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(G).$$

Il s'ensuit que pour $x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\partial_{d\alpha(E_{ij})}(f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} ((g_{ij})_{ij} \mapsto f((g_{ij}) \cdot x)) \right)_{|(\delta_{ij})_{i,j}} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

d'où $\partial_{d\alpha(E_{ij})} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. On peut remarquer que $E_{ij} \mapsto x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ n'est compatible au crochet qu'au signe près. La proposition ci-dessous éclaircira la situation.

Exemple. – Regardons l'action de $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^3 . Notons x, y, z les coordonnées dans \mathbb{R}^3 . On vérifie facilement que $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ a une base formée des trois matrices $X := E_{32} - E_{23}$, $Y := E_{13} - E_{31}$ et $Z = E_{21} - E_{12}$. Les formules précédentes nous donnent alors

$$\partial_{d\alpha(X)} = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_{d\alpha(Y)} = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_{d\alpha(Z)} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

On remarque que tous ces champs de vecteurs sont tangents à la sphère S^2 .

PROPOSITION. – Avec les notations ci-dessus, " $d\alpha$ " est un anti-morphisme de \mathbb{R} -algèbres de Lie, au sens où $[d\alpha(X), d\alpha(Y)] = -d\alpha([X, Y])$ pour tous $X, Y \in \text{Lie}(G)$.

Démonstration. i) On vérifie que le flot de $d\alpha(X)$ est donné par $(t, m) \mapsto \exp(tX)m$. Il suffit de dériver et de constater.

ii) Pour tout $g \in G$, on a $d\alpha(\text{Ad}_g(X)) = g_*(d\alpha(X))$. En effet, on a pour tout $m \in M$:

$$\begin{aligned} d\alpha(\text{Ad}_g(X))(m) &= d_e(h \mapsto hm)(\text{Ad}_g(X)) = d_e(h \mapsto ghg^{-1}m)(X) \\ &= d_{g^{-1}m}\alpha_g \circ d_e(h \mapsto hg^{-1}m)(X) = d_{g^{-1}m}\alpha_g(d\alpha(X)(g^{-1}m)) \\ &= (g_*(d\alpha(X)))(m) \end{aligned}$$

iii) Différentions en $t = 0$, l'identité

$$d\alpha(\text{Ad}_{\exp(tX)}(Y)) = \exp(tX)_*(d\alpha(Y)) = \exp(-tX)^*(d\alpha(Y)).$$

On obtient l'identité $d\alpha(\text{ad}_X(Y)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto (\varphi_t^{d\alpha(-X)})^*(d\alpha(Y)))$, d'où $d\alpha([X, Y]) = -[d\alpha(X), d\alpha(Y)]$, vu l'expression (*) pour le crochet de champs de vecteurs. \square

1.8.3 Algèbre de Lie d'un fixateur. Soit m un élément de M . Notons G_m le fixateur de m dans G . C'est un sous-groupe fermé de G , donc on sait que c'est un sous-groupe de Lie. La proposition précédente nous suggère un moyen de calculer son algèbre de Lie.

COROLLAIRE. – $\text{Lie}(G_m) = \{X \in \text{Lie}(G), \frac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto \exp(tX)m) = 0\} = \text{Ker}(d\alpha(m))$.

Démonstration. On sait que $\text{Lie}(G_m) = \{X \in \text{Lie}(G), \forall t, \exp(tX) \in G_m\} = \{X \in \text{Lie}(G), \forall t, \exp(tX)m = m\}$. Donc $X \in \text{Lie}(G_m) \Rightarrow \frac{d}{dt}(t \mapsto \exp(tX)m) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\frac{d}{dt}|_{t=0}(t \mapsto \exp(tX)m) = 0$. Ceci s'écrit aussi $d_e(g \mapsto gm)(X) = d\alpha(X)(m) = 0$ (i.e. m est un point d'annulation du champ de vecteurs $d\alpha(X)$), ce qui implique que la courbe constante $t \mapsto m$ est une courbe intégrale du champ $d\alpha(X)$.

Or, on a déjà vu que $t \mapsto \exp(tX)m$ en est une aussi (cf i) de la preuve de la proposition précédente). Par unicité, on a $\exp(tX)m = m$ pour tout t .

La deuxième égalité est claire. \square

Exemple. – On peut recalculer les algèbres de Lie des groupes classiques. Par exemple, $O(\Phi) \subset GL(V)$ est le fixateur de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée Φ pour l'action de $GL(V)$ sur l'ensemble de toutes ces formes (un ouvert d'un espace vectoriel). On obtient

$$\begin{aligned} \text{Lie}(O(\Phi)) &= \{X \in \text{Lie}(G), \frac{d}{dt}_{t=0} (t \mapsto \Phi(\exp(tX)v, \exp(tX)w)) = 0, \forall v, w \in V\} \\ &= \{X \in \text{Lie}(G), \Phi(Xv, w) + \Phi(v, Xw) = 0, \forall v, w \in V\} \\ &= \{X \in \text{Lie}(G), X + X^* = 0\} \end{aligned}$$

COROLLAIRE. – Avec les notations ci-dessus, l'application $g \mapsto gm$ induit une immersion injective $G/G_m \hookrightarrow M$ dont l'image est l'orbite \mathcal{O}_m de m sous G . Si l'action est transitive, on a donc un difféomorphisme $G/G_m \xrightarrow{\sim} M$.

Démonstration. Par construction du quotient, on a bien l'application $g \mapsto gm$ induit une application lisse $G/G_m \rightarrow M$. Puisque $\text{Lie}(G_m) = \text{Ker}(d\alpha(m))$, l'application induite $T_e(G/G_m) = \text{Lie}(G)/\text{Lie}(G_m) \rightarrow T_m M$ est injective. Par translation elle est injective en tout point et l'application est bien une immersion. \square

Exemple. – L'action de $SO(n, \mathbb{R})$ sur la sphère S^n à partir du point $m = (0, \dots, 0, 1)$ induit un difféomorphisme $SO(n, \mathbb{R})/SO(n-1, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S^n$, et donc une fibration de $SO(n, \mathbb{R})$ sur S^n de fibre $SO(n-1, \mathbb{R})$.

1.8.4 Algèbre de Lie et champs de vecteurs invariants sur G . Supposons maintenant que $M = G$ avec l'action par translations à droite : $R_g(h) := hg^{-1}$ pour tout $g, h \in G$. Alors

$$"dR"(X) = (h \mapsto d_e(g \mapsto hg^{-1})(X)) = d_e L_h \circ d_e i(X) = -d_e L_h(X) = -\xi_X.$$

(Comme plus haut, ξ_X est bien le champ de vecteur invariant à gauche associé à X .)

COROLLAIRE. – L'isomorphisme $\text{Lie}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G)^L$ du lemme 1.7.5 est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres de Lie.

Démonstration. En effet, $\xi_{[X, Y]} = -dR([X, Y]) = [dR(X), dR(Y)] = [-\xi_X, -\xi_Y] = [\xi_X, \xi_Y]$. \square

Il est souvent utile, notamment en physique de savoir passer explicitement de l'algèbre de Lie aux champs de vecteurs invariants, ou à leurs dérivations associées. La formule pour la dérivation est :

$$\partial_X(f) : (x \mapsto d_x f(\xi_X(x))) = d_x f \circ d_e L_x(X) = d_e(g \mapsto f(xg))(X).$$

Exemple. – Regardons le cas de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculons la dérivation invariante $\partial_{E_{ij}}$ associée à la matrice élémentaire E_{ij} . On en déduit que pour $x = (x_{ij})_{i,j}$ on a

$$\begin{aligned} \partial_{E_{ij}}(f)(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right)_{|(\delta_{ij})_{ij}} \left((g_{ij})_{i,j} \mapsto f \left(\left(\sum_{ij} x_{ij} E_{ij} \right) \left(\sum_{ij} g_{ij} E_{ij} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_{kj}}(x) \end{aligned}$$

d'où $\partial_{E_{ij}} = \sum_{k=1}^n x_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ki}}$.

1.9 La correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie

Il s'agit ici d'étudier les propriétés du foncteur $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$ de la catégorie des groupes de Lie vers celle des algèbres de Lie. Les questions naturelles que l'on peut se poser sont :

- i) Toute \mathbb{R} -AL est-elle l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie ?
- ii) Toute sous- \mathbb{R} -AL de $\mathrm{Lie}(G)$ est-elle l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie de G ?
- iii) Que peut-on dire de l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp.Lie}}(G, G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-AL}}(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G'))$?

La réponse à i) est oui, mais nous ne le montrerons que partiellement. La réponse à ii) est non, comme le montre l'exemple suivant : $G = S^1 \times S^1$, et $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(G) = \mathbb{R}^2$ une droite de pente irrationnelle. Cette droite s'intègre en un groupe de Lie immergé (enroulement de la droite sur le tore), mais pas en un sous-groupe de Lie. Cet exemple suggère une version affaiblie de ii) qui s'avère exacte :

1.9.1 THÉORÈME. – *Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(G)$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un groupe de Lie immergé $H \hookrightarrow G$ dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{h} .*

Remarque. – Avec ce théorème, la question i) se ramène à déterminer si toute algèbre de Lie se plonge dans une $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. La réponse est oui (théorème d'Ado), mais nous ne le montrerons pas. Remarquons tout de même que si le centre $\mathfrak{z} := \{X \in \mathfrak{g}, [X, \mathfrak{g}] = 0\}$ de \mathfrak{g} est trivial, alors la représentation adjointe $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ fournit un tel plongement.

Démonstration. C'est une application du théorème de Frobenius en géométrie différentielle.

Rappels. Soit M une variété lisse de dimension m et soit $n \leq m$. Supposons donnée une collection $D = (D(x))_{x \in M}$ de \mathbb{R} -sous espaces vectoriels $D(x) \subset T_x M$ de dimension n . On se demande s'il existe des sous-variétés N de M vérifiant la propriété

$$(*) : \forall y \in N, T_y N = D(y).$$

Le théorème de Frobenius répond à cette question, et l'outil principal est

$$\mathcal{V}(D) = \{\xi \in \mathcal{V}(M), \forall x \in M, \xi(x) \in D(x)\}.$$

On a d'abord besoin d'une *propriété de régularité* de D : on dit que D est une *n -distribution* si l'on peut recouvrir M par des ouverts \mathcal{U} pour lesquels il existe $\xi_1^{\mathcal{U}}, \dots, \xi_n^{\mathcal{U}} \in \mathcal{V}(D)$ tels que pour tout $x \in \mathcal{U}$, $D(x)$ est engendré par $\xi_1^{\mathcal{U}}(x), \dots, \xi_n^{\mathcal{U}}(x)$.

THÉORÈME. (Frobenius) – Soit D une n -distribution sur M . Supposons que $\mathcal{V}(D)$ est stable par le crochet de champs de vecteurs. Alors :

- (existence) Par tout point $x \in M$ passe une sous-variété N qui satisfait (*).
- (unicité locale) Si N' vérifie la même propriété, il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de x tel que $\mathcal{U} \cap N = \mathcal{U} \cap N'$.

Par la propriété d'unicité locale, la réunion de toutes les sous-variétés connexes de M passant par x et satisfaisant (*) est une variété immergée connexe $N_{x,D} \hookrightarrow M$. La structure de variété sur $N_{x,D}$ est donnée comme suit. On remarque d'abord que pour N, N' comme dans le théorème, $N \cap N'$ est une sous-variété ouverte de N et de N' . On munit ensuite $N_{x,D}$ de la topologie limite inductive. Alors chaque N est un ouvert de $N_{x,D}$ et il y a donc une unique structure de variété sur $N_{x,D}$ qui fait de chaque N une sous-variété ouverte.

Application. Soit $\mathfrak{h} \subset \text{Lie}(G)$ comme dans le théorème 1.9.1. Considérons la collection $D_{\mathfrak{h}}$ définie par $D_{\mathfrak{h}}(x) := d_e L_x(\mathfrak{h})$. Si X_1, \dots, X_n est une base de \mathfrak{h} alors $D_{\mathfrak{h}}(x)$ est engendré par $\xi_{X_1}(x), \dots, \xi_{X_n}(x)$ pour tout $x \in G$, donc $D_{\mathfrak{h}}$ est une distribution sur G et

$$\mathcal{V}(D_{\mathfrak{h}}) = \mathcal{C}^{\infty}(G)\xi_{X_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{C}^{\infty}(G)\xi_{X_n}.$$

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $[\xi_{X_i}, \xi_{X_j}] = \xi_{[X_i, X_j]} \in \mathbb{R}\xi_{X_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}\xi_{X_n} \subset \mathcal{V}(D_{\mathfrak{h}})$. Mais alors, la formule

$$[f\xi, f'\xi'] = ff'[\xi, \xi'] + f\partial_{\xi}(f')\xi' - f'\partial_{\xi'}(f)\xi, \quad \forall f, f' \in \mathcal{C}^{\infty}(G)$$

montre que $\mathcal{V}(D_{\mathfrak{h}})$ est stable par crochet de champs de vecteurs.

Soit alors $H_{g,D_{\mathfrak{h}}} \hookrightarrow G$ la variété immergée connexe maximale passant par g fournie par le théorème de Frobenius. Notons simplement $H := H_{e,D_{\mathfrak{h}}}$. Puisque $D_{\mathfrak{h}}$ est invariant par translations à gauche, on a $H_{g,D_{\mathfrak{h}}} = L_g(H)$ pour tout $g \in G$. Or, pour $h \in H$, on a aussi $H_{h,D_{\mathfrak{h}}} = H$ par unicité. On en déduit que H est stable par produit. De plus, on a $L_{h^{-1}}(H) = L_{h^{-1}}(H_{h,D_{\mathfrak{h}}}) = H$ donc $h^{-1} = L_{h^{-1}}(e) \in H$ et H est stable par inversion. Comme la lissité du produit et de l'inverse de H découle de celle relative à G , on en conclut que H est un groupe de Lie immergé dans G . Par construction on a $\text{Lie}(H) = D_{\mathfrak{h}}(e) = \mathfrak{h}$. \square

Passons maintenant à la question iii) posée plus haut.

1.9.2 THÉORÈME. – Soient G, G' deux groupes de Lie. L'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{Gp.Lie}(G, G') & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{R}-AL}(\text{Lie}(G), \text{Lie}(G')) \\ \varphi & \mapsto & d\varphi \end{array} \quad \text{est :}$$

- i) injective, si G est connexe.
- ii) bijective, si G est simplement connexe.

Démonstration. i) On sait que pour tout $X \in \text{Lie}(G)$ et tout morphisme $\varphi : G \rightarrow G'$ on a $\varphi(\exp_G(X)) = \exp_{G'}(d\varphi(X))$. Ainsi, si $d\varphi = d\varphi'$ alors φ et φ' coïncident sur l'image de \exp_G . Or celle-ci engendre G connexe, donc $\varphi = \varphi'$.

ii) Soit $f : \text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Lie}(G')$ un morphisme d'algèbres de Lie. Considérons l'image \mathfrak{h} du graphe $\Gamma_f : \text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G')$. D'après le théorème 1.9.1, il existe un groupe de Lie H connexe et une immersion $\iota : H \hookrightarrow G \times G'$ qui induit un isomorphisme $d\iota : \text{Lie}(H) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$. L'application $\pi := pr_1 \circ \iota : H \longrightarrow G$ est un morphisme de groupes de Lie dont la dérivée $d\pi = pr_1 \circ d\iota$ est par construction un isomorphisme. Comme G est connexe, π est un revêtement. Mais comme G est simplement connexe, π est trivial donc est un isomorphisme. Posons alors $\varphi := pr_2 \circ \iota \circ \pi^{-1}$. On a bien $d\varphi = f$. \square

Remarque. – Mettant ensemble le théorème d'existence (réponse à la question i)), le théorème d'existence de revêtements universels, et le théorème ci-dessus, on obtient que *le foncteur $G \mapsto \text{Lie}(G)$ est une équivalence de catégories*

$$\{\text{Gps de Lie simplement connexes}\} \xrightarrow{\sim} \{\mathbb{R}\text{-algs de Lie de dim finie}\}.$$

De plus, *ce foncteur envoie suites exactes courtes sur suites exactes courtes et tout quasi-inverse possède la même propriété.* Ici, une suite

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi'} K \longrightarrow 1$$

est “exacte courte” si φ est un plongement tel que $\varphi(H) = \text{Ker}(\varphi')$ et φ' est surjectif (auquel cas φ' induit un isomorphisme $G/\varphi(H) \xrightarrow{\sim} K$). De l'autre côté, une suite

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{g} \xrightarrow{f'} \mathfrak{k} \longrightarrow 0$$

est exacte courte si elle l'est en tant que suite d'espaces vectoriels (auquel cas elle induit un isomorphisme $\mathfrak{g}/f(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{k}$.) Par ce qu'on a déjà vu jusqu'ici, il est clair que le foncteur Lie envoie une s.e.c. de groupes sur une s.e.c. d'algèbres de Lie. Réciproquement, partons d'une suite exacte d'algèbres de Lie $(*)$ et intégrons-là (de manière essentiellement unique) en une suite $H \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\varphi'} K$ de groupes de Lie *simplement connexes*. Alors on peut montrer que cette suite de groupes est exacte courte. Le point non évident est le fait que φ soit un plongement, et requiert le fait que le π_2 d'un groupe de Lie est trivial.

1.10 Mesures invariantes et applications

Rappel. Une *mesure de Radon* sur un espace localement compact X est une forme linéaire μ sur $\mathcal{C}_c(X)$ (fonctions continues à support compact) qui est *positive*, au sens où $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$. On note indifféremment :

$$\mu(f) = \int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Si un groupe G agit sur X , on le fait agir sur $\mathcal{C}_c(X)$ par la formule $gf(x) := f(g^{-1}x)$ et sur les distributions par la formule $g\mu(f) = \mu(g^{-1}f)$, si bien que l'on a

$$\int_X f(x) d(g\mu)(x) = \int_X (g^{-1}f)(x) d\mu(x) = \int_X f(gx) d\mu(x).$$

La distribution μ est dite *invariante* si $g\mu = \mu$ pour tout g .

1.10.1 THÉORÈME.— *Sur un groupe de Lie G , il existe une mesure de Radon μ invariante à gauche et non nulle, et celle-ci est unique à un facteur positif près.*

Remarque. — Ce résultat est vrai sur tout groupe localement compact et est connu comme le *théorème de Haar*. La mesure μ est appelée *mesure de Haar (à gauche)*.

Démonstration. Notons n la dimension de G . Soit dX une n -forme alternée non nulle sur $\text{Lie}(G)$. C'est aussi une mesure de Lebesgue sur $\text{Lie}(G)$ (pour une orientation convenable). Pour tout $g \in G$ posons $\omega(g) := L_g^*(dX)$, qui est une n -forme alternée sur T_gG . On obtient ainsi une *forme volume* ω sur G , i.e. une section lisse du fibré canonique $\Omega G = \bigwedge^n T^*G$ qui ne s'annule nulle part, et qui est invariante par translations à gauche : $L_g^*\omega = \omega$ pour tout $g \in G$. La théorie de l'intégration sur les variétés associe alors à ω une mesure positive μ qui, comme ω , est invariante par translations à gauche.

On peut dans notre cas construire μ de la manière suivante. Soit \mathcal{U} un voisinage ouvert de 0 dans $\text{Lie}(G)$ tel que \exp_G réalise un difféomorphisme $\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V} = \exp(\mathcal{U})$. La mesure $\exp^*(\omega|_{\mathcal{V}})$ sur \mathcal{U} est de la forme $\varepsilon(X)dX$ pour une fonction lisse ε sur \mathcal{U} qui ne s'annule pas et vaut 1 en 0, donc est (strictement) positive. Soit $f \in \mathcal{C}_c(G)$ de support $\text{Supp}(f)$ inclus dans \mathcal{V} . On pose alors

$$\mu(f) := \int_{\mathcal{U}} f(\exp(X))\exp^*(\omega) = \int_{\mathcal{U}} f(\exp(X))\varepsilon(X)dX.$$

Si $g \in G$ est tel que $\text{Supp}(gf) = g\text{Supp}(f) \subset \mathcal{V}$, alors l'invariance de ω par L_g implique que $\mu(f) = \mu(gf)$. Par conséquent, si plus généralement on part de $f \in \mathcal{C}_c(G)$ dont le support est inclus dans un $g\mathcal{V}$ pour un $g \in G$, alors on peut poser $\mu(f) := \mu(g^{-1}f)$ et cela ne dépend pas du choix de g . Finalement, pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$ quelconque, on peut avec une partition de l'unité l'écrire sous la forme $f = \sum_{i=1}^m f_i$ où $\text{Supp}(f_i)$ est inclus dans un translaté de \mathcal{V} . Alors l'expression $\mu(f) := \sum_{i=1}^m \mu(f_i)$ ne dépend pas de cette écriture et définit la mesure de Radon invariante à gauche μ souhaitée.

On peut aussi préciser la forme de $\exp^*(\omega)$ sur \mathcal{U} ou du moins sur un ouvert symétrique $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tel que $(\exp(\mathcal{U}'))^2 \subset \mathcal{V}$. En effet, pour $X \in \mathcal{U}'$ considérons l'application $\alpha_X : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$, $Y \mapsto \exp^{-1}(\exp(X)\exp(Y))$. C'est un difféomorphisme de \mathcal{U}' sur son image, qui envoie 0 sur X . En suivant la définition de ω , on trouve $\exp^*(\omega) = \det(d_0(\alpha_X))dX$.

On a donc prouvé l'existence. Pour l'unicité, on peut remarquer que l'espace des sections *invariantes* de $\Omega G = \bigwedge^n(T^*G)$ est clairement de dimension 1. □

Exemples. — Notons dx la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} ou sur un \mathbb{R} -ev de dimension finie.

- i) Sur $G = \mathbb{R}$, la mesure dx est invariante (à gauche et à droite).
- ii) Sur $G = \mathbb{R}^\times$, la mesure $d^\times x := \frac{dx}{|x|}$ est invariante.
- iii) Sur $G = S^1$, "la" mesure invariante est donnée par $\int_{S^1} f\mu = \int_0^1 f(\exp(2i\pi\theta))d\theta$.
- iv) Sur $G = \mathbb{C}^\times$, la mesure $\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ est invariante.

v) Sur $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})^0$, la mesure $\frac{dx}{|\det(x)|^n}$ est invariante à gauche et à droite. En effet, commençons par faire agir G sur \mathbb{R}^n et notons $dx = dx_1 \cdots dx_n$ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Alors on sait bien que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(gx)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|\det(g)|^{-1}dx, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n).$$

Faisons maintenant agir G sur $M_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et notons $dx = dx_{11} \cdots dx_{n1} dx_{12} \cdots dx_{nn}$ la mesure de Lebesgue sur $M_n(\mathbb{R})$. Alors en décomposant $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^n$ selon les colonnes, on trouve

$$\int_{M_n(\mathbb{R})} f(gx)dx = \int_{M_n(\mathbb{R})} f(x)|\det(g)|^{-n}dx, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(M_n(\mathbb{R})).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_G f(gx)|\det(x)^{-n}|dx &= \int_G f(x)\det(g^{-1}x)^{-n}|\det(g)|^{-n}|dx \\ &= \int_G f(x)|\det(x)^{-n}|dx, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(G). \end{aligned}$$

Remarque. – Si $\varphi : G' \xrightarrow{\sim} G$ est un isomorphisme et ω une forme volume invariante à gauche sur G , alors $\varphi^*(\omega)$ est clairement une forme volume invariante à gauche sur G' . Ceci s'applique à $G' = G$ et $\varphi = \text{Int}_g$. Par unicité de la forme volume invariante à un scalaire près, on obtient que $\text{Int}_g^*(\omega) = \lambda(g)\omega$ et l'application $g \mapsto \lambda(g) \in \mathbb{R}^\times$ est multiplicative. Pour calculer $\lambda(g)$ on regarde au point e . On a $\text{Int}_g^*(\omega)(e) = \text{Ad}_g^*(\omega(e)) = \text{Ad}_g^*(dX) = \det(\text{Ad}_g).dX$ d'où $\lambda(g) = \det(\text{Ad}_g)$. Passant aux mesures invariantes, on obtient $\text{Int}_g^*(\mu) = |\det(\text{Ad}_g)|\mu$.

1.10.2 Mesures invariantes à droite. Le théorème ci-dessus reste évidemment valable pour les mesures invariantes à droite. Mais la remarque précédente donne un moyen de passer de gauche à droite (!). En effet, si ω est une forme volume invariante à gauche, on a

$$R_g^*(\omega) = R_g^*L_g^*(\omega) = \text{Int}_g^*(\omega) = \det(\text{Ad}_g)\omega.$$

On a donc obtenu :

PROPOSITION. – *Si μ est une mesure invariante à gauche, la mesure $|\det(\text{Ad})|\mu$ est invariante à droite.*

On dit que G est unimodulaire, si $|\det(\text{Ad})| \equiv 1$. On peut montrer que les groupes classiques sont unimodulaires, mais l'exemple le plus simple est le suivant :

Exemple. – Supposons G compact. Puisque l'image de G par $|\det \text{Ad}|$ est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_{>0}^\times$, on a $|\det(\text{Ad})| \equiv 1$. Ainsi toute mesure invariante à gauche μ sur G compact est invariante à droite. On normalise généralement μ par $\mu(G) = \mu(1_G) = 1$.

1.10.3 Applications. Beaucoup d'applications de l'existence de mesures invariantes sont des variantes de l'énoncé suivant :

LEMME. – Supposons G compact et notons μ la mesure de Haar normalisée sur G . Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation et $v \in V$. Alors $\bar{v} := \int_G \rho(x)(v) d\mu(x)$ est un vecteur G -invariant de V .

Démonstration. En effet, on a $\rho(g)(\bar{v}) = \int_G \rho(gx)(v) d\mu(x) = \int_G \rho(x)(v) d\mu(x) = \bar{v}$ pour tout $g \in G$. \square

Exemple. – Soit G un sous-groupe compact de $\text{GL}(V)$, et \langle , \rangle un produit scalaire euclidien sur V . Posons

$$\Phi(v, w) := \int_G \langle xv, xw \rangle d\mu(x).$$

C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive puisque \langle , \rangle l'est. Elle est de plus invariante par G , ce qui signifie aussi que $G \subset O(\Phi)$. On en déduit :

COROLLAIRE. – Tout sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$.

Exercice. – Montrer que tout sous-groupe compact de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $U(n)$.

1.11 Groupes de Lie complexes. Complexification.

1.11.1 Groupes de Lie complexes. Un groupe de Lie complexe est une variété complexe munie d'une structure de groupe telle que la multiplication m et l'inverse i sont holomorphes.

Exemples. – $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, $\text{SO}_n(\mathbb{C})$, mais pas $U(n)$!

Si V est une variété complexe, alors sa variété lisse sous-jacente M est munie d'une "structure presque complexe", *i.e.* une section J de $\text{End}_{\mathbb{R}}(TM)$ telle que $J^2 = -\text{id}$ (celle-ci donne la multiplication par i sur chaque espace tangent $T_x M$.) On en déduit que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie complexe est une \mathbb{C} -algèbre de Lie.

Réciproquement, si G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est munie d'une structure complexe (donc est une \mathbb{C} -algèbre de Lie), alors on peut étendre celle-ci par translation en une structure presque complexe sur G .

Fait. – Cette structure presque complexe provient d'une (unique) structure complexe sur G . De plus, un morphisme lisse $\varphi : G \rightarrow G'$ entre groupes de Lie complexes est holomorphe si et seulement si $d_e \varphi$ est \mathbb{C} -linéaire.

La première assertion est une conséquence du critère de Newlander-Nirenberg d'"intégrabilité" d'une structure presque complexe. La seconde est plus facile.

PROPOSITION. – *Tout groupe de Lie complexe compact connexe est abélien, et de la forme \mathbb{C}^n/Γ pour un réseau cocompact Γ de \mathbb{C}^n .*

Démonstration. Les coefficients de $g \mapsto \text{Ad}_g \in \mathfrak{gl}_n(\text{Lie}(G))$ sont holomorphes, donc constants puisque G est compact et connexe. Donc $\text{Ad}_g = \text{id}_{\text{Lie}(G)}$ pour tout g et par connexité $\text{Int}_g = \text{id}_G$ pour tout g . Ainsi G est abélien. Il s'ensuit que $\exp_G : \text{Lie}(G) \rightarrow G$ est un morphisme de groupes de Lie, et puisque sa différentielle en 0 est l'identité, c'est un revêtement. Le noyau Γ est discret et cocompact, et on a $\text{Lie}(G)/\Gamma \xrightarrow{\sim} G$. \square

1.11.2 Complexification des algèbres de Lie réelles. Si \mathfrak{g} est une \mathbb{R} -algèbre de Lie, alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ est naturellement une \mathbb{C} -algèbre de Lie appelée “complexification de \mathfrak{g} ”. Le couple $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \iota : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ possède la propriété universelle suivante : pour toute \mathbb{C} -algèbre de Lie \mathfrak{h} l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-AL}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-AL}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ f &\mapsto f \circ \iota \end{aligned}$$

est une bijection. Cela découle de la propriété universelle du produit tensoriel. On dit aussi que \mathfrak{g} est une *forme réelle* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Exemple. – $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est évidemment une forme réelle de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, mais $\mathfrak{u}(n)$ en est une autre. En effet l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) &\rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \\ z \otimes M &\mapsto zM \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres de Lie. L'isomorphisme inverse est donné comme suit. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ on l'écrit sous la forme $M = A + H$ avec A anti-hermitienne et H hermitienne (on a donc $A = \frac{1}{2}(M - {}^t\bar{M})$ et $H = \frac{1}{2}(M + {}^t\bar{M})$), et on envoie M sur $1 \otimes A - i \otimes iH$ dans $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$.

1.11.3 Complexification des groupes de Lie. Il n'y a pas moyen d'étendre les scalaires aussi facilement que pour les algèbres de Lie. Néanmoins la discussion précédente suggère la définition suivante :

DÉFINITION. – *Soit G un groupe de Lie. Un couple $(G_{\mathbb{C}}, \iota : G \rightarrow G_{\mathbb{C}})$ formé d'un groupe de Lie complexe $G_{\mathbb{C}}$ et d'un morphisme de groupe de Lie est appelé complexification de G s'il possède la propriété universelle suivante : pour tout groupe de Lie complexe H , l'application*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{GpLieComp}(G_{\mathbb{C}}, H) &\rightarrow \text{Hom}_{GpLie}(G, H) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \iota \end{aligned}$$

est bijective.

La propriété universelle assure l'unicité d'une éventuelle complexification. Pour l'existence, on peut citer le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas.

THÉORÈME. – *Tout groupe de Lie compact connexe G admet une complexification $(G_{\mathbb{C}}, \iota)$. De plus on a*

- i) ι est un plongement et $\iota(G)$ est un sous-groupe compact maximal de $G_{\mathbb{C}}$.
 ii) $(\text{Lie}(G_{\mathbb{C}}), d\iota)$ est la complexification de $\text{Lie}(G)$.

On dit encore que G est une *forme réelle* de $G_{\mathbb{C}}$.

Exemple. – $\text{SU}(n)$ et $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ sont des formes réelles de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$. Pour $\text{SU}(n)$ cela découle du diagramme suivant (où G désigne un groupe de Lie complexe)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{GpLieComp}(\text{SL}_n(\mathbb{C}), G) & \xrightarrow{res} & \text{Hom}_{GpLie}(\text{SU}(n), G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}-AL}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \text{Lie}(G)) & \xrightarrow{res} & \text{Hom}_{\mathbb{R}-AL}(\mathfrak{su}(n), \text{Lie}(G)) \end{array}$$

dans lequel la flèche du bas est bijective puisqu'on a vu que $\mathfrak{su}(n)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, et les flèches verticales sont bijectives puisque $\text{SU}(n)$ et $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ sont simplement connexes. Pour $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ on peut former le même diagramme, mais on ne sait pas a priori que la flèche de droite est surjective car $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas simplement connexe. Cependant on sait qu'elle est injective et cela suffit pour conclure à la bijectivité de la flèche du haut.

Exemple. – Les plongements suivants sont des complexifications :

i) $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, ii) $\text{U}(n) \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, iii) $\text{SO}(n) \hookrightarrow \text{SO}(n, \mathbb{C})$, iv) $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
 Pour i), si $S^1 \xrightarrow{\varphi} G$ est un morphisme vers G complexe, soit $X := \frac{1}{2i\pi} d\varphi(1)$. Alors le morphisme $\mathbb{C} \rightarrow G$, $z \mapsto \exp_G(zX)$ est un morphisme de groupes holomorphe, qui est trivial sur $2i\pi\mathbb{Z}$. Il se factorise donc par le quotient $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ (induit par $z \rightarrow e^z$) en un morphisme $\mathbb{C}^{\times} \rightarrow G$ qui prolonge φ si l'on identifie S^1 à $\{z \in \mathbb{C}^{\times}, |z| = 1\}$.

1.12 Représentations de dimension finie

1.12.1 Catégories de représentations. Désignons par \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et rappelons les définitions de base.

- i) Si G est un groupe de Lie,
 – une *représentation à coefficients dans \mathbb{K}* est un couple (V, ρ) où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ un morphisme lisse¹. On simplifie souvent la notation en posant $gv = \rho(g)(v)$ pour $g \in G$ et $v \in V$.
 – Un *morphisme de représentations à coefficients dans \mathbb{K}* entre (V, ρ) et (V', ρ') est une application \mathbb{K} -linéaire $f : V \rightarrow V'$ telle que $\forall g \in G, \rho'(g) \circ f = f \circ \rho(g)$, ce qui en notation simplifiée donne $\forall g \in G, \forall v \in V, f(gv) = g'f(v)$. On note $\text{Hom}_{\mathbb{K}G}(V, V')$ le \mathbb{K} -e.v. formé par ces morphismes, et on pourra omettre \mathbb{K} s'il n'y a pas d'ambiguïté.
- ii) Si \mathfrak{g} est une \mathbb{R} -algèbre de Lie,
 – une *représentation à coefficients dans \mathbb{K}* est un couple (V, r) où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $r : \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$ un morphisme de \mathbb{R} -algèbres de Lie. On simplifie souvent la notation en posant $Xv = r(X)(v)$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$.

1. ou continu, on a vu que c'est équivalent.

- Un *morphisme de représentations à coefficients dans \mathbb{K}* entre (V, r) et (V', r') est une application \mathbb{K} -linéaire $f : V \rightarrow V'$ telle que $\forall X \in \mathfrak{g}, r'(X) \circ f = f \circ r(X)$, ce qui en notation simplifiée donne $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, f(Xv) = Xf(v)$. On note $\text{Hom}_{\mathbb{K}\mathfrak{g}}(V, V')$ le \mathbb{K} -e.v. formé par ces morphismes, et on pourra omettre \mathbb{K} s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque. – Plusieurs exemples naturels sont avec coefficients réels (comme la représentation adjointe), mais on verra que la théorie est plus agréable avec coefficients complexes.

Avec ces définitions, on obtient deux *catégories* $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ et $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$, dont les objets sont les représentations *de dimension finie*. On voit aisément que ces catégories sont *abéliennes* et que les noyaux, conoyaux et sommes directes commutent au foncteur d'oubli vers la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels. En d'autres termes, si $f : V \rightarrow V'$ est un morphisme de représentations, alors son noyau est une sous-représentation de V , son image une sous-représentation de V' , et son conoyau possède une unique structure de représentation rendant la projection depuis V' continue ("représentation quotient"). De même on définit la somme directe de deux représentations comme la somme directe des espaces sous-jacents munie de l'action évidente de G ou \mathfrak{g} .

Exercice. – Vérifier les assertions de la phrase précédente.

1.12.2 *Le foncteur "dérivation".* Si (V, ρ) est une représentation de G , on peut lui associer par dérivation une représentation $(V, d\rho)$ de $\text{Lie}(G)$. De plus, si $f : V \rightarrow V'$ est un morphisme de représentations de G , c'est aussi un morphisme des représentations de $\text{Lie}(G)$ associées, puisque en dérivant au point $g = e$ l'égalité $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$ on trouve $\forall X \in \text{Lie}(G), f \circ d\rho(X) = d\rho'(X) \circ f$. On obtient ainsi un *foncteur exact*

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_{\mathbb{K}}(G) & \rightarrow & \text{Rep}_{\mathbb{K}}(\text{Lie}(G)) \\ (V, \rho) & \mapsto & (V, d\rho) \end{array},$$

qui est l'outil le plus important pour étudier les représentations de G .

PROPOSITION. – *Le foncteur "dérivation" ci-dessus est :*

- i) pleinement fidèle si G est connexe.
- ii) essentiellement surjectif (et donc une équivalence de catégories) si G est simplement connexe.

Démonstration. i) Il s'agit de prouver que l'application $\text{Hom}_G(V, V') \rightarrow \text{Hom}_{\text{Lie}(G)}(V, V')$ est bijective pour tous $V, V' \in \text{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$. L'injectivité est tautologique. Pour la surjectivité, on utilise la formule $\rho(\exp_G(X)) = \exp_{\text{GL}(V)}(d\rho(X))$ qui montre que si $f \in \text{Hom}_{\text{Lie}(G)}(V, V')$, alors pour tout g dans $\exp_G(\text{Lie}(G))$, on a $f \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ f$. Or, l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels cette égalité est vraie est un sous-groupe. Mais puisque G est connexe, il est engendré par $\exp_G(\text{Lie}(G))$ et cette égalité est donc vraie pour tout g .

ii) découle du ii) du théorème 1.9.2 appliqué à $r : \text{Lie}(G) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. □

Remarque. – Il est important ici de se limiter aux représentations de dimension finie. Il existe des représentations de dimension infinie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ qui ne s'intègrent pas à $\text{SL}_2(\mathbb{C})$.

1.12.3 Variantes complexes et astuce de Weyl unitaire. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

i) Si G est un groupe de Lie complexe, une représentation *holomorphe* de G est une représentation complexe (V, ρ) telle que ρ soit holomorphe. Ces représentations forment une sous-catégorie pleine $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(G)$ de $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$.

ii) Si \mathfrak{g} est une \mathbb{C} -algèbre de Lie, on dira par analogie qu'une représentation complexe (V, r) de \mathfrak{g} est "holomorphe"² si r est \mathbb{C} -linéaire. On obtient aussi une sous-catégorie pleine $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\mathfrak{g})$ de $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.

iii) Le foncteur dérivation envoie $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(G)$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\text{Lie}(G))$, est pleinement fidèle si G est connexe, et essentiellement surjectif si G est simplement connexe.

Complexification : partons d'une \mathbb{R} -algèbre de Lie \mathfrak{g} . Toute représentation complexe $r : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ se prolonge uniquement en une représentation "holomorphe" $r_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. En fait la propriété universelle de l'extension des scalaires montre que le foncteur

$$\text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

ainsi obtenu est une *équivalence de catégories*, inverse du foncteur de restriction

$$\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}).$$

De même, si l'on part d'un groupe de Lie G et d'une complexification $G \xrightarrow{\iota} G_{\mathbb{C}}$ on a, par restriction, un foncteur

$$\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(G_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\text{res}} \text{Rep}_{\mathbb{C}}(G).$$

La propriété universelle d'une complexification montre que ce foncteur est essentiellement surjectif. En passant aux algèbres de Lie, on constate qu'il est aussi pleinement fidèle, et donc une *équivalence de catégories* si ces groupes sont connexes.

Exemple. (Astuce unitaire de Weyl) – Regardons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\text{SL}_n(\mathbb{R})) & \xleftarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\text{SL}_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\text{SU}(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})) & \xleftarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{su}(n)) \end{array}$$

On vient de voir que tous les foncteurs de restriction sont des équivalences de catégories. Les deux foncteurs de dérivation pour $\text{SU}(n)$ et $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ sont aussi des équivalences de catégories car ces groupes sont simplement connexes. Il s'ensuit que le foncteur de dérivation pour $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est aussi une équivalence de catégories, bien que celui-ci ne soit pas simplement connexe. De cette manière on ramène l'étude des représentations de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ à celle du groupe $\text{SU}(n)$ qui est *compact*.

On en déduit aussi la propriété suivante : *un revêtement non trivial de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ ne se plonge dans aucun $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.*

2. Cette terminologie est non-conventionnelle mais assez logique ici. On la changera un peu plus loin...

1.12.4 Représentations triviales, unités, vecteurs invariants. Soit V l'espace vectoriel d'une représentation d'un groupe de Lie G ou d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . On note

- (groupes) : $V^G := \{v \in V, \forall g \in G, gv = v\}$ le s.e.v. des vecteurs invariants sous G .
- (algèbres) : $V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, Xv = 0\}$ le s.e.v. des vecteurs annulés par \mathfrak{g} .

Exercice. – Si (V, ρ) est une représentation de G connexe, montrer que $V^{\text{Lie}(G)} = V^G$.

Une représentation V de G , resp. de \mathfrak{g} , est dite *triviale* si $V = V^G$, resp. si $V = V^{\mathfrak{g}}$.

La *représentation unité* de G , resp. \mathfrak{g} , est l'espace vectoriel \mathbb{K} muni de la représentation triviale. On la note simplement \mathbb{K} en l'absence d'ambiguïté.

1.12.5 Produit tensoriel, contragrédiente, Hom interne. Soient V, V' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels sous-jacents de représentations ρ, ρ' d'un groupe de Lie G , ou r, r' d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

i) On munit $V \otimes_{\mathbb{K}} V'$ de la représentation *produit tensoriel* définie par :

- (groupes) $g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$, ou encore $g(v \otimes v') := gv \otimes gv', \forall v \in V, v' \in V'$.
- (algèbres) $X \mapsto r(X) \otimes \text{id}_{V'} + \text{id}_V \otimes r'(X)$, ou encore $X(v \otimes v') := Xv \otimes v' + v \otimes Xv', \forall v \in V, v' \in V'$.

Exercice. – Vérifier que la seconde définition fournit bien une représentation de \mathfrak{g} , puis vérifier que la dérivée de $\rho \otimes \rho'$ est bien $d\rho \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d\rho'$.

Exercice. – Si $V' = \mathbb{K}$ est la représentation unité, vérifier que $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \simeq V$ (ceci expliquant la terminologie “représentation unité”).

ii) On munit $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$ de la représentation *Hom interne* définie par

- (groupes) $(g, f) \mapsto \rho'(g) \circ f \circ \rho(g^{-1})$, ou encore : $(gf)(v) := gf(g^{-1}v), \forall v \in V$.
- (algèbres) $(X, f) \mapsto r'(X) \circ f - f \circ r(X)$, ou encore : $(Xf)(v) := Xf(v) - f(Xv), \forall v \in V$.

On notera $\mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, V')$ cette représentation Hom-interne (avec un \mathcal{H}).

Exercice. – Vérifier que ces formules définissent bien des représentations, et que la dérivée du Hom interne pour G est le Hom interne pour $\text{Lie}(G)$.

Remarque. – On a $\text{Hom}_G(V, V') = \mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, V')^G$ et $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V') = \mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, V')^{\mathfrak{g}}$.

iii) Un cas particulier important du ii) est lorsque $V' = \mathbb{K}$ est la représentation unité. Dans ce cas on note simplement $V^{\vee} := \mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ et on l'appelle *contragrédiente* (ou aussi *duale*) de V .

Le produit tensoriel et le Hom interne sont liés de la manière suivante :

LEMME. – *Le morphisme $V^{\vee} \otimes_{\mathbb{K}} V' \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, V')$ qui envoie $v^* \otimes v'$ sur le morphisme $(v, v') \mapsto \langle v, v^* \rangle v'$ est un isomorphisme de représentations.*

Démonstration. Exercice. □

1.12.6 Réduction des représentations. Une représentation V (d'un groupe de Lie ou d'une algèbre de Lie) est dite :

- *irréductible* si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V .
- *complètement réductible* si elle est somme directe de sous-représentations *irréductibles*.
- *indécomposable* si elle n'est pas *somme directe* de deux sous-représentations.

Exemple. (Le cas $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$) – Une représentation (V, r) à coefficients dans \mathbb{K} de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ est déterminée par l'endomorphisme $X := r(1) \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on voit que :

- V est irréductible si et seulement si $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$ (existence de droites propres.)
- V est complètement réductible si et seulement si X est diagonalisable.
- V est indécomposable si et seulement si dans la décomposition de Jordan $X = X_s + X_n$, l'ordre de nilpotence de X_n est la dimension de V (et X_s est alors une homothétie).

Par contre, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une représentation irréductible de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ peut être de dimension 2. Par exemple, celle donnée par $r(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice. – Soit (V, ρ) une représentation de dimension finie d'un groupe de Lie *connexe* G . Montrer que (V, ρ) est irréductible, resp. indécomposable, resp. complètement réductible, si et seulement si $(V, d\rho)$ l'est.

Exercice. – Montrer que V est irréductible, indécomposable ou complètement réductible si et seulement si V^{\vee} l'est.

On voit facilement par récurrence descendante sur la dimension que toute représentation de dimension finie est somme directe de sous-représentations indécomposables. Ainsi, comprendre la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ ou $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ nécessite a priori de classifier les représentations indécomposables. Dans l'exemple ci-dessus, elles sont classifiées par la dimension et l'unique valeur propre de X . Mais en général, ce problème peut devenir trop difficile, voire sans espoir, par exemple pour l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ (pour laquelle une représentation revient à ce donner 3 endomorphismes commutant 2 à 2 d'un espace V).

Les choses se simplifient beaucoup si l'on sait que les représentations de G ou de \mathfrak{g} sont toutes *complètement réductibles*. Dans ce cas, il suffit de classifier les irréductibles, et cela s'avère souvent plus facile.

Nous verrons que cette propriété de complète réductibilité est satisfaite pour les groupes classiques "semi-simples". En attendant, montrons qu'elle l'est pour les groupes *compacts*.

LEMME. – *Pour une représentation V , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *toute sous-représentation W de V admet un supplémentaire stable (donc une sous-représentation) $W' \oplus W = V$.*
- ii) *V est complètement réductible,*
- iii) *V est somme de ses sous-représentations irréductibles.*

Démonstration. i) \Rightarrow ii). Par récurrence sur la dimension de V . Si V est irréductible (donc en particulier si $\dim(V) = 1$) il n'y a rien à faire. Sinon, prenons une sous-représentation W de V de dimension > 0 minimale. Elle est donc irréductible et, par hypothèse, admet

un supplémentaire stable V' . Montrons que V' satisfait encore i). Soit $W' \subset V'$ une sous-représentation, et soit W'' un supplémentaire stable de $W \oplus W'$ dans V . Alors sa projection sur V' (le long de W) est un supplémentaire stable de W' dans V' . Ainsi V' satisfait i) et par hypothèse de récurrence, V est somme directe d'irréductibles. Donc $V = W \oplus V'$ aussi.

ii) \Rightarrow iii) est tautologique.

iii) \Rightarrow i). Montrons que $W \subset V$ admet un supplémentaire stable par récurrence sur la codimension de W . Si la codimension est nulle il n'y a rien à faire. Sinon, il existe (par hypothèse) une représentation irréductible U de V telle que $U \not\subset W$, et donc $W \cap U = \{0\}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $W \oplus U$ nous fournit W'_1 supplémentaire de $W \oplus U$ et il n'y a plus qu'à poser $W' := U \oplus W'_1$. \square

LEMME. – Soit V une représentation complexe (resp. réelle) munie d'un produit scalaire hermitien (resp. euclidien) invariant au sens suivant :

- (groupes) $\forall v, v' \in V, \forall g \in G, \langle gv, gv' \rangle = \langle v, v' \rangle$
- (algèbres) $\forall v, v' \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, \langle Xv, v' \rangle + \langle v, Xv' \rangle = 0$.

Alors V est complètement réductible.

Démonstration. En effet, soit $W \subset V$ un sous-espace stable. Alors son orthogonal $W^\perp = \{v \in V, \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0\}$ est en somme directe $W \oplus W^\perp$ (puisque \langle, \rangle est défini positif) et est stable. \square

Remarque. – Si l'on écrit $\Psi(v, w) = \langle v, w \rangle$, la condition d'être "invariant" équivaut à $G \subset U(\Psi)$ (groupes) ou $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}(\Psi)$ (algèbres) dans le cas complexe et $G \subset O(\Psi)$ ou $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(\Psi)$ dans le cas réel.

1.12.7 COROLLAIRE. – Soit G un groupe de Lie compact. Toutes les représentations de dimension finie de G sont complètement réductibles.

Démonstration. On a vu comme application de l'existence des mesures de Haar que pour tout sous-groupe compact H de $GL(V)$, il existe sur V un produit hermitien/euclidien invariant sous H . Il suffit de l'appliquer à l'image de G dans $GL(V)$ par la représentation considérée, puis d'appliquer le lemme précédent. \square

Exemple. (Le cas $G = S^1$) – Une représentation complexe irréductible de S^1 fournit par dérivation une représentation complexe irréductible de $\text{Lie}(G) = \mathbb{R}$, donc est de dimension 1, donnée par un homomorphisme $S^1 \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$. Un tel homomorphisme est de la forme $z \mapsto z^n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$, si on identifie $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Ainsi, toute représentation V de S^1 est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n^{\oplus e_n}$ où $V_n = (\mathbb{C}, z \mapsto z^n)$ et e_n est la "multiplicité" avec laquelle V_n apparaît comme sous-représentation de V .

Application. – Toutes les représentations complexes de $SU(n)$ sont complètement réductibles. Il en va donc de même de celles de $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$, ainsi que des représentations holomorphes de $SL_n(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Il suffira de classifier les irréductibles de l'un de ces objets pour classifier celles des autres. Nous le ferons pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ au prochain paragraphe.

1.12.8 Lemme de Schur. Soit $f : V \rightarrow V'$ un morphisme de représentations irréductibles. Si f est non nul, on a $\text{Ker}(f) \neq V$ donc $\text{Ker}(f) = 0$ par irréductibilité de V , et de même $\text{Im}(f) \neq 0$ donc $\text{Im}(f) = V'$ par irréductibilité de V' . Ainsi, f est soit nul, soit inversible.

En particulier, si V est irréductible de dimension finie, $\text{End}_{\mathbb{K}G}(V)$ est une \mathbb{K} -algèbre à division de dimension finie. On sait que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cela implique $\text{End}_{\mathbb{C}G}(V) = \mathbb{C}$ (lemme de Schur). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut avoir $\text{End}_{\mathbb{R}G}(V) = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} .

Application. – Une représentation complètement réductible V s'écrit de manière unique (à l'ordre près) sous la forme $V = V_1^{\oplus e_1} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus e_r}$ avec V_1, \dots, V_r des représentations irréductibles 2 à 2 non isomorphes. En effet, on retrouve la multiplicité e_i comme $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}G}(V_i, V)) / \dim_{\mathbb{K}}(\text{End}_{\mathbb{K}G}(V_i))$.

La fin du 1.12 n'a pas été traitée en cours.

1.12.9 Représentations d'un produit. Soient G, G' deux groupes, ou $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie. Si W est une représentation complexe de G , resp. \mathfrak{g} , et W' une représentation de G' , resp. \mathfrak{g}' , on munit $W \otimes_{\mathbb{C}} W'$ de la représentation $(g, g')(v \otimes v') := (gv, gv')$ de $G \times G'$, resp. $(X, X')(v \otimes v') := Xv \otimes v' + v \otimes Xv'$ de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$.

PROPOSITION. – Dans chacune des deux situations (groupes ou algèbres), on a :

- i) Si W et W' sont irréductibles, alors $W \otimes_{\mathbb{C}} W'$ l'est aussi (**pour le produit !**).
- ii) Toute représentation complexe irréductible V de $G \times G'$, resp. $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$, est de la forme $W \otimes_{\mathbb{C}} W'$ comme ci-dessus.
- iii) Si W et W' sont complètement réductibles, alors $W \otimes_{\mathbb{C}} W'$ aussi.

Démonstration. Pour fixer les notations, nous traitons le cas des groupes. Celui des algèbres est totalement analogue. Commençons par une construction générale. Si $W \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ et $V \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}(G \times G')$, on munit $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V|_G)$ de la représentation de G' définie par $(g'f)(w) := (e, g')f(w)$ (c'est une variante de la construction "Hom interne"). On a alors une application d'évaluation :

$$\begin{aligned} ev_{W,V} : \quad W \otimes_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V) &\rightarrow V \\ w \otimes f &\mapsto f(w) \end{aligned}$$

On vérifie aisément que c'est un morphisme de représentations de $G \times G'$ (exercice : le vérifier!).

Supposons maintenant que V et W sont irréductibles, et que W est isomorphe à une sous-représentation irréductible de $V|_G$. Dans ce cas, $ev_{W,V}$ est non nulle, et donc surjective. Soit $n' := \dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V|_G))$. On a donc une surjection $W^{\oplus n'} \rightarrow V|_G$. Cela montre que $V|_G$ est complètement réductible, isomorphe à $W^{\oplus e}$ pour un $e \leq n'$. Mais alors le lemme de Schur nous dit que $n' = e$, et finalement on a montré que $ev_{W,V}$ est un isomorphisme. Il s'ensuit aussi que W' est irréductible pour G' et que $V|_{G'} \simeq W'^{\oplus n}$ où $n = \dim_{\mathbb{C}}(W)$.

On a donc prouvé ii). On en déduit aussi i) en appliquant ceci à une sous-représentation irréductible non nulle de $W \otimes_{\mathbb{C}} W'$.

Il reste à prouver iii). Mais si $W = \bigoplus_i W_i$ et $W' = \bigoplus_j W'_j$ avec les W_i et les W'_j irréductibles, alors $W \otimes W' = \bigoplus_{i,j} W_i \otimes W'_j$ est une décomposition en somme d'irréductibles. \square

1.12.10 COROLLAIRE.— Soit \mathfrak{g} une \mathbb{C} -algèbre de Lie,

- i) Si les représentations “holomorphes” de \mathfrak{g} sont complètement réductibles, il en est de même de toutes les représentations complexes.
- ii) Les irréductibles de \mathfrak{g} sont de la forme $(V, \rho) \otimes (V', \bar{\rho}')$ pour (V, ρ) et (V', ρ') deux irréductibles holomorphes, et $\bar{\rho}'$ la représentation conjuguée de ρ' (qui est donc “antiholomorphe”, ie \mathbb{C} -semilinéaire).

Démonstration. L’idée est d’utiliser l’équivalence de catégories $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^{\text{hol}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ donnée par restriction des représentations. Notons $\bar{\mathfrak{g}}$ la \mathbb{C} -algèbre de Lie \mathfrak{g} sur laquelle l’action de \mathbb{C} est la conjuguée de celle sur \mathfrak{g} . Ainsi l’“identité” est un isomorphisme *semi-linéaire* entre \mathfrak{g} et $\bar{\mathfrak{g}}$, et les représentations “holomorphes” de $\bar{\mathfrak{g}}$ sont les représentations “antiholomorphes” de \mathfrak{g} . Maintenant, le morphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \oplus \bar{\mathfrak{g}} \\ z \otimes X &\mapsto (zX, \bar{z}X) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de \mathbb{C} -algèbres de Lie. D’après la proposition précédente, toute représentation irréductible “holomorphe” de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est donc de la forme $V \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}$ avec V irréductible holomorphe de \mathfrak{g} et \bar{V} irréductible holomorphe de $\bar{\mathfrak{g}}$. Par restriction à $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ on en déduit le ii). Le i) se prouve de manière analogue. \square

1.13 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et de ses avatars

Nous allons ici classifier les représentations complexes irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, puis en déduire une classification des irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et des groupes $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, $\text{SU}(2)$, $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ ainsi que $\text{SO}_3(\mathbb{R})$. Nous avons vu que les représentations de tous ces objets sont *complètement réductibles*, donc cela décrit, à isomorphisme près, toutes les représentations de ces objets.

Les techniques et résultats intermédiaires utilisés pour classifier les irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ seront fondamentaux pour notre étude ultérieure des algèbres de Lie “semi-simples”.

1.13.1 Représentations irréductibles de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Rappelons que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})) = 3$. On utilisera la base (E, H, F) suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le crochet de $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y est déterminé par les formules suivantes :

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Si (V, r) est une représentation de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on notera

$$V_{\lambda} := \text{Ker}(r(H) - \lambda \text{id}_V).$$

Si $V_{\lambda} \neq 0$, c’est l’espace propre de la valeur propre λ de $r(H)$. On dit alors que λ est *un poids de H dans V* .

LEMME. – Soit (V, r) une représentation complexe de \mathfrak{g} et $\lambda \in \mathbb{C}$ un poids de H dans V . Alors $r(E)V_\lambda \subset V_{\lambda+2}$ et $r(F)V_\lambda \subset V_{\lambda-2}$.

Démonstration. Soit $v \in V_\lambda$. On a $HEv = EHv + [H, E]v = \lambda Ev + 2Ev = (\lambda + 2)Ev$. De même $HFv = (\lambda - 2)Fv$. \square

PROPOSITION. – Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe une unique (à isomorphisme près) représentation complexe irréductible (V_m, r_m) de \mathfrak{g} de dimension $m + 1$. De plus, les poids de H dans V_m sont $\{-m, -m + 2, \dots, m - 2, m\}$.

Démonstration. i) Montrons d'abord l'unicité. Soit V une représentation complexe irréductible de \mathfrak{g} , soit λ_0 un poids de partie réelle maximale et soit $v_0 \in V_{\lambda_0}$ non nul. D'après le lemme précédent, on a alors $EV_{\lambda_0} = 0$.

Posons $v_k := \frac{1}{k!}F^k v_0$ et $W = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{v_k, k \in \mathbb{N}\}$ l'espace engendré par les v_k . Par construction, cet espace est stable par F , et puisque les v_k sont vecteurs propres de H (lemme précédent), il est aussi stable par H . Montrons qu'il est stable par E . On a vu que $Ev_0 = 0$. Pour $k > 1$, on a

$$Ev_k = \frac{1}{k}EFv_{k-1} = \frac{1}{k}(FEv_{k-1} + [E, F]v_{k-1}) = \frac{1}{k}(FEv_{k-1} + (\lambda_0 - 2k + 2)v_{k-1}).$$

Ceci nous permet de montrer par récurrence que $Ev_k = (\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}$.

On en conclut que W est une sous-représentation non nulle de V , donc par irréductibilité, que $W = V$. Les v_k non nuls sont linéairement indépendants, puisque associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de H , d'où une base v_0, \dots, v_m de V , en posant $m = \dim_{\mathbb{C}}(V) - 1$.

Pour déterminer λ_0 , on remarque que puisque $H = [E, F]$, on doit avoir $\text{tr}(r(H)) = 0$. Or, $\text{tr}(r(H)) = \lambda_0 + (\lambda_0 - 2) + \dots + (\lambda_0 - 2m) = (m + 1)\lambda_0 - m(m + 1)$. Il vient $\lambda_0 = m$ et finalement les poids sont bien ceux annoncés.

ii) Il faut maintenant vérifier l'existence. Pour cela, il suffit de vérifier que les matrices de $M_{m+1}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$H_m := \sum_{i=1}^{m+1} (m - 2i + 2)E_{i,i}, \quad E_m := \sum_{i=1}^m (m - i + 1)E_{i,i+1}, \quad \text{et} \quad F_m := \sum_{i=1}^m iE_{i+1,i}$$

satisfont les relations $[H_m, E_m] = 2E_m$, $[H_m, F_m] = -2F_m$ et $[E_m, F_m] = H_m$. Après quoi il ne reste qu'à poser $r_m(H) := H_m$, $r_m(E) := E_m$ et $r_m(F) := F_m$. \square

Remarque. – En petite dimension, on reconnaît des représentations familières :

- (V_0, r_0) est la représentation unité de \mathfrak{g} .
- (V_1, r_1) est la représentation "standard" donnée par l'inclusion $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.
- (V_2, r_2) est la représentation adjointe (complexifiée) $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$.

En général, on peut montrer que $(V_m, r_m) \simeq \text{Sym}^m(V_1, r_1)$, la puissance symétrique m -ème (V_1, r_1) dont l'espace sous-jacent est $\text{Sym}^m(V_1) = (V_1 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_1)^{\mathfrak{S}_m}$ et l'action de \mathfrak{g} est quotient de la représentation produit tensoriel.

Remarque. – La représentation (V_m, r_m) est appelée représentation irréductible *de plus haut poids* m . Notons que les seules propriétés de la base E, H, F qui entrent dans la preuve sont les formules $[H, E] = 2E$, $[H, F] = 2F$ et $[E, F] = H$. Toute autre base (E', H', F') vérifiant ces propriétés est *conjuguée* à (E, H, F) sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. En effet, les formules du ii) de la preuve ci-dessus appliquées à la représentation standard nous fournissent une base v_0, v_1 de \mathbb{R}^2 dans laquelle les matrices de (E', H', F') sont justement E, H, F .

Par ailleurs, pour tout réel $\lambda > 0$ on peut construire une représentation irréductible de plus haut poids λ , mais de dimension infinie...

Exercice. – Soit (V, r) une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

- i) Montrer que V est somme de ses sous-espaces de poids, que ses poids sont entiers, et que la fonction multiplicité $\lambda \mapsto \mathrm{mult}(\lambda, V) := \dim(V_\lambda)$ est une fonction décroissante de la valeur absolue $|\lambda|$ lorsqu'on la restreint à $2\mathbb{Z}$ ou à $2\mathbb{Z} + 1$.
- ii) Montrer que $V \simeq \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} V_m^{\oplus e_m}$ où $e_m = \mathrm{mult}(m, V) - \mathrm{mult}(m + 2, V)$.

1.13.2 Représentations irréductibles des algèbres apparentées.

i) la \mathbb{C} -algèbre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Par ce qu'on a vu jusqu'ici, les représentations irréductibles "holomorphes" de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont classifiées par leur plus haut poids $m \in \mathbb{N}$ et données par les mêmes formules ($r_m(H) = H_m$, etc...) que pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, étendues par \mathbb{C} -linéarité. Les "antiholomorphes" irréductibles sont données de même, mais étendues par \mathbb{C} -semilinéarité, et toute irréductible est de la forme $(V_m, r_m) \otimes (V_{m'}, \bar{r}_{m'})$.

ii) la \mathbb{R} -algèbre $\mathfrak{su}(2)$. Toute irréductible s'obtient par restriction d'une irréductible holomorphe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, donc de la forme (V_m, r_m) . Noter qu'une base agréable de $\mathfrak{su}(2)$ est

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

et le crochet est donné par $[X_1, X_2] = 2X_3$, $[X_2, X_3] = 2X_1$ et $[X_3, X_1] = 2X_2$. On pourra calculer explicitement l'action de ces éléments sur V_m . Notamment, les valeurs propres de X_3 sont $-im, -i(-m + 2), \dots, im$.

iii) La \mathbb{R} -algèbre $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. On sait qu'elle est isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$ donc ses représentations irréductibles sont encore paramétrées par l'entier m . Une base agréable de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ est

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et le crochet est donnée par $[J_x, J_y] = J_z$, $[J_y, J_z] = J_x$, et $[J_z, J_x] = J_y$. L'isomorphisme $\mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ donné par la représentation adjointe de $\mathfrak{su}(2)$ envoie X_1 sur $2J_x$, X_2 sur $2J_y$ et X_3 sur $2J_z$. En particulier, les valeurs propres de J_z dans V_m sont $-\frac{i}{2}m, \frac{i}{2}(-m + 2), \dots, \frac{i}{2}m$. Les physiciens appellent $m/2$ le "spin" de la représentation V_m .

1.13.3 Représentations des groupes de Lie associés. La théorie nous dit que les représentations (V_m, r_m) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ se relèvent respectivement aux groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et fournissent toutes les irréductibles (holomorphes pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). Néanmoins, cela ne nous fournit pas de formule explicite pour ces relèvements. Il est donc légitime de chercher un modèle naturel pour ces relèvements. En voici un.

Soit $\mathcal{P}_m := \{f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y], \text{ homogènes de degré } m\}$. On fait agir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par la formule

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right] (x, y) := f(ax + cy, bx + dy).$$

On obtient ainsi une représentation holomorphe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ que nous noterons (\mathcal{P}_m, ρ_m) .

LEMME. – $(\mathcal{P}_m, d\rho_m) \simeq (V_m, r_m)$.

Démonstration. On calcule (comparer avec les exemples du paragraphe 1.8.1)

$$\begin{aligned} [d\rho_m(H)f](x, y) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (t \mapsto \rho_m(\exp(tH))f(x, y)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (t \mapsto f(\exp(t)x, \exp(-t)y)) \\ &= (x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y})(f)(x, y) \end{aligned}$$

Soit alors $f_j := x^{m-j}y^j$. La famille f_0, \dots, f_m est une base de \mathcal{P}_m et on constate que $d\rho_m(H)f_j = (m - 2j)f_j$. Les poids de \mathcal{P}_m sont donc $-m, -m + 2, \dots, m - 2, m$ et de multiplicité 1 (espaces propres de dimension 1). Cela suffit à conclure que $(\mathcal{P}_m, d\rho_m) = (V_m, r_m)$. En effet, on sait que $(\mathcal{P}_m, d\rho_m)$ est isomorphe à une somme directe d'irréductibles $\bigoplus_n V_n^{\oplus e_n}$. Comme $\dim \mathcal{P}_m = m + 1$, on voit que $e_n = 0$ pour $n > m$. Mais alors comme m est un poids de \mathcal{P}_m on doit avoir $e_m \geq 1$, et pour des raisons de dimension on obtient $e_m = 1$ et $e_n = 0$ pour $n \neq m$. (On peut aussi appliquer le ii) de l'exercice ci-dessus.) \square

Par restriction, les (\mathcal{P}_m, ρ_m) fournissent les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SU}(2)$. Pour obtenir celles de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ on utilise le revêtement à deux feuilletés $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, dont le noyau est $\{\pm I_2\}$. Il montre que les représentations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ s'identifient à celles (V, ρ) de $\mathrm{SU}(2)$ telles que $\rho(-I_2) = \mathrm{id}_V$. On vérifie alors (exercice) que (\mathcal{P}_m, ρ_m) "descent" à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si m est pair.

COROLLAIRE. – *Les représentations irréductibles complexes de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sont de dimension impaire, et sont uniquement déterminées par cette dimension.*

En particulier, on voit que les représentations de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ ne s'intègrent pas toutes en des représentations de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

1.13.4 Action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur les fonctions sur la sphère S^2 . On a déjà expliqué comment l'action de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère S^2 induit une action sur $\mathcal{C}_\infty(S^2)$ (on prend ici des fonctions à valeurs complexes). Notons $\mathcal{P}_{\leq n}^{\mathrm{sph}}$ le sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ formé des fonctions obtenues par restriction de polynômes de degré $\leq n$ en $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ à coefficients complexes.

1.13.5 PROPOSITION.— *La représentation $\mathcal{P}_{\leq n}^{sph}$ est isomorphe à $V_0 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{2n}$, où V_{2m} désigne l'unique représentation irréductible de $SO_3(\mathbb{R})$ de dimension $2m + 1$.*

Démonstration. Posons $u = x + iy$ et $v = x - iy$. L'égalité $1 - z^2 = x^2 + y^2 = uv$ montre que $\mathcal{P}_{\leq n}^{sph}$ est engendré par les fonctions $z^p, z^p u^k$ et $z^p v^k$ pour $p + k \leq n$.

L'action dérivée de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ a été calculée dans le deuxième exemple de 1.8.1. Celle de J_z est donnée par $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = iu \frac{\partial}{\partial u} - iv \frac{\partial}{\partial v}$. On constate donc que

$$J_z(z^p u^k) = ik(z^p u^k) \text{ et } J_z(z^p v^k) = -ik(z^p v^k).$$

Les valeurs propres de J_z dans $\mathcal{P}_{\leq n}^{sph}$ sont donc de la forme $-in, i(-n + 1), \dots, i(n - 1), in$ et par conséquent les seules représentations irréductibles de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ qui peuvent apparaître dans $\mathcal{P}_{\leq n}^{sph}$ sont les V_{2m} avec $m \leq n$. Remarquons maintenant que pour k fixé, les fonctions $u^k, zu^k, \dots, z^{n-k}u^k$ sont linéairement indépendantes. Ceci montre que la multiplicité de la valeur propre ik de J_z (et donc du poids $2k$) est $n - k$. Utilisant le dernier exercice, on en déduit la décomposition annoncée. \square

2 Algèbres de Lie

Ce chapitre est consacré à l'étude de la structure des algèbres de Lie et ses conséquences sur la théorie des représentations. La plupart des concepts introduits sont valable sur un corps de base quelconque K .

2.1 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Rappelons que toute K -algèbre associative peut être vue comme une K -algèbre de Lie avec pour crochet $[a, b] = ab - ba$.

- 2.1.1 THÉORÈME.**— *Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie. Il existe une paire $(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \iota)$ formée*
- *d'une K -algèbre associative $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ et*
 - *d'un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$.*

satisfaisant la propriété universelle suivante : pour toute K -algèbre associative A , l'application $\text{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, A) \longrightarrow \text{Hom}_{K\text{-ALie}}(\mathfrak{g}, A)$, $f \mapsto f \circ \iota$ est bijective.

La propriété universelle assure l'unicité, à isomorphisme unique près, de la paire $(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \iota)$.

Pour ceux qui aiment les catégories, on peut paraphraser le théorème en disant, au choix, que

- pour toute \mathfrak{g} , le foncteur $A \mapsto \text{Hom}_{K\text{-ALie}}(\mathfrak{g}, A)$ est représentable.
- le foncteur qui à une algèbre associative associe son algèbre de Lie sous-jacente possède un adjoint à gauche. Cette formulation parait plus forte car elle inclut la functorialité de $\mathfrak{g} \mapsto \mathcal{U}\mathfrak{g}$, mais elle est en fait équivalente.

Démonstration. Considérons $T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n \mathfrak{g}$ où $T^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathfrak{g} \otimes_K \mathfrak{g} \otimes_K \dots \otimes_K \mathfrak{g}$. On munit ce K -espace vectoriel du produit de concaténation, qui envoie $T^n \mathfrak{g} \times T^m \mathfrak{g}$ dans

$T^{n+m}G$ et qui est donné sur les tenseurs élémentaires par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m.$$

On obtient ainsi une K -algèbre associative graduée $T\mathfrak{g}$, appelée *algèbre tensorielle de \mathfrak{g}* . Noter que cette construction ne dépend en fait que du K -ev sous-jacent à \mathfrak{g} , et s'applique à n'importe quel K -ev. L'algèbre $T\mathfrak{g}$, munie de l'application $\mathfrak{g} = T^1\mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g}$ possède la propriété universelle suivante : pour toute K -algèbre associative A , l'application $\text{Hom}_{K\text{-alg}}(T\mathfrak{g}, A) \longrightarrow \text{Hom}_K(\mathfrak{g}, A)$ est bijective. En d'autres termes, le foncteur $V \mapsto TV$ est adjoint à gauche du foncteur qui à une algèbre associe son espace vectoriel sous-jacent. La vérification de ceci est facile mais on ne donne pas de détails, voir tout livre d'algèbre (Lang par exemple).

Considérons maintenant l'idéal bilatère I engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \in T^{\leq 2}\mathfrak{g}.$$

Noter que ce n'est pas un idéal homogène. Posons enfin $\mathcal{U}\mathfrak{g} := T\mathfrak{g}/I$. C'est une algèbre associative, non graduée, mais tout de même filtrée : si $\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n}$ est l'image de $T^{\leq n}\mathfrak{g}$, alors $\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n}\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq m} \subset \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq n+m}$. Par construction, on a

$$\text{Hom}_{K\text{-alg}}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, A) = \{f \in \text{Hom}_{K\text{-alg}}(T\mathfrak{g}, A), \forall x, y \in \mathfrak{g}, f(x)f(y) - f(y)f(x) = f([x, y])\}.$$

La propriété universelle annoncée pour $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ munie de $\iota : \mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$ découle donc de celle de $T\mathfrak{g}$. □

Application. – Si (V, ρ) est une K -représentation de \mathfrak{g} (on dit aussi que V est un \mathfrak{g} -module à gauche), le morphisme $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ provient d'un (unique) morphisme d'algèbre $\mathcal{U}\mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}_K(V)$ qui fait de V un $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -module à gauche. On obtient ainsi une *équivalence de catégories*

$$\text{Rep}_K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\text{-Mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}\mathfrak{g}\text{-Mod}$$

entre la catégorie des \mathfrak{g} -modules à gauche et celle des $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -modules à gauche. Notamment les représentations irréductibles de \mathfrak{g} correspondent aux modules simples de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.

Exemples. – Remarquons d'abord que $\mathcal{U}\mathfrak{gl}_n(K) \neq M_n(K)$!!! Par exemple pour $n = 2$, l'élément $E = E_{12}$ est nilpotent d'ordre 2 dans $M_2(K)$. Mais dans la représentation V_m qu'on a construite plus haut, son image est nilpotente d'ordre $m + 1$, ce qui implique, puisque m est arbitraire, que dans $\mathcal{U}\mathfrak{gl}_2$, son image n'est pas nilpotente du tout! En fait, $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ est de dimension infinie en général.

- i) $\mathfrak{g} = K$. On vérifie que $\mathcal{U}\mathfrak{g} = K[T]$ avec $\mathfrak{g} = K \xrightarrow{\sim} K.T$ convient.
- ii) \mathfrak{g} abélienne. Dans ce cas, l'idéal par lequel on quotiente $T\mathfrak{g}$ est engendré par les $x \otimes y - y \otimes x$. L'algèbre obtenue est l'*algèbre symétrique* $S\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n\mathfrak{g}$, qui est commutative et graduée, et dont la construction s'applique à tout K -ev. Le foncteur $V \mapsto SV$ est adjoint à gauche du foncteur qui à une algèbre *commutative* associe son e.v. sous-jacent. On a $S^m\mathfrak{g} = (T^m\mathfrak{g})_{\mathfrak{S}_m}$ (coinvariants sous le groupe symétrique). Tout choix de base de \mathfrak{g} induit un isomorphisme $S\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} K[T_1, \dots, T_{\dim\mathfrak{g}}]$.

- iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$. On peut donner la présentation suivante : $\mathcal{U}\mathfrak{sl}_2$ est l'algèbre associative de générateurs e, f, h soumis aux relations $he - eh = 2e$, $hf - fh = -2f$ et $ef - fe = h$. Elle contient un élément remarquable, l'opérateur de Casimir donné par

$$C := ef + fe + \frac{1}{2}h^2.$$

Exercice. –

- (a) Montrer que C commute à e, f, h , et donc appartient au centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.
 (b) Si $K = \mathbb{C}$ (plus généralement si K est algébriquement clos), en déduire que C agit par un scalaire sur chaque représentation irréductible.
 (c) Montrer que ce scalaire, sur la représentation V_m est $\lambda_m = \frac{1}{2}m(m+2)$.
 iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. On peut donner la présentation suivante : $\mathcal{U}\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ est l'algèbre associative de générateurs J_x, J_y, J_z soumis aux relations $J_x J_y - J_y J_x = J_z$, $J_y J_z - J_z J_y = J_x$ et $J_z J_x - J_x J_z = J_y$. Considérons l'opérateur

$$C = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

Exercice. –

- (a) Montrer que C appartient au centre de $\mathcal{U}\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.
 (b) Vérifier que C agit sur V_m par multiplication par $-\frac{1}{4}m(m+2)$.

2.1.2 Algèbre enveloppante et opérateurs différentiels. Supposons qu'un groupe de Lie agisse sur une variété M de manière lisse. On a vu comment dériver cette action en une action de $\text{Lie}(G)$ sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ par dérivations, donnée par un (anti)morphisme d'algèbres de Lie

$$d\alpha : \text{Lie}(G) \longrightarrow \mathcal{V}(M) = \text{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)).$$

Soit $\text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(M))$ l'algèbre des opérateurs différentiels de M , ie la sous- \mathbb{R} -algèbre de $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(M))$ engendrée par les dérivations. La propriété universelle de $\mathcal{U}\text{Lie}(G)$ nous permet d'étendre $d\alpha$ en un (anti)morphisme d'algèbres

$$d\alpha : \mathcal{U}\text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(M))$$

de l'algèbre enveloppante vers celle des opérateurs différentiels de M .

Exemple. (Action de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ sur la sphère S^2 et spectre du Laplacien sphérique) – On a déjà calculé dans ce cas que

$$d\alpha(J_z) = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad d\alpha(J_y) = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{et} \quad d\alpha(J_x) = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}.$$

En tenant compte de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on trouve que

$$d\alpha(C) = d\alpha(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) = \Delta - \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le Laplacien de \mathbb{R}^3 . Introduisons le Laplacien sphérique

$$\begin{aligned} \Delta^{sph} : \mathcal{C}^\infty(S^2) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(S^2) \\ f &\mapsto \Delta(f)|_{S^2} \end{aligned}$$

où \tilde{f} désigne le prolongement de f à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ donné par $\tilde{f}(v) := f(v/||v||)$. En dérivant $\lambda \mapsto \tilde{f}(\lambda v)$ on trouve que $(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})(\tilde{f}) = 0$, et finalement que

$$d\alpha(C) = \Delta^{sph}.$$

On en déduit le spectre de Δ^{sph} sur $\mathcal{C}^\infty(S^2)$:

$$\text{Sp}(\Delta^{sph}) = \{-k(k+1), k \in \mathbb{N}\}.$$

En effet, nous avons vu que le sous-espace $\mathcal{P}(S^2)$ des applications polynomiales en x, y, z , se décompose en une somme directe $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_{2k}$ où V_{2k} désigne la représentation irréductible de dimension $2k+1$ de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, et que C agit sur V_{2k} par le scalaire $-k(k+1)$. Cela nous donne l'inclusion $\text{Sp}(\Delta^{sph}) \supset \{-k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$. Pour l'autre inclusion, plongeons $\mathcal{C}^\infty(S^2)$ dans $L^2(S^2)$. Le produit hermitien de $L^2(S^2)$ est invariant par $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, donc l'opérateur $d\alpha(C)$ est auto-adjoint. De plus, la somme $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_{2k}$ est orthogonale, et par densité des applications polynômiales, on a donc $L^2(S^2) = \widehat{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} V_{2k}}$ (somme hilbertienne). L'inclusion $\text{Sp}(\Delta^{sph}) \subset \{-k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$ en résulte.

Remarque. – Dans le cas particulier où G agit par translations à droite sur $M = G$, l'image du morphisme d'algèbres $\mathcal{ULie}(G) \rightarrow \text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(G))$ est incluse dans la sous-algèbre $\text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(G))^L$ des opérateurs différentiels invariants à gauche. On peut montrer que ce morphisme est un isomorphisme

$$\mathcal{ULie}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Diff}(\mathcal{C}^\infty(G))^L.$$

2.1.3 Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Ici on suppose que \mathfrak{g} est de dimension finie sur K .

THÉORÈME. (Première formulation) – Soit x_1, \dots, x_n une base de \mathfrak{g} sur K . Alors les monômes de la forme $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ avec $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ forment une base de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ sur K .

Nous ne démontrons pas ce théorème ici (voir par exemple le livre de Carter). Signalons tout de même qu'il est facile de voir que cette famille est génératrice en itérant les relations du type $x_i x_j = x_j x_i + [x_i, x_j]$ lorsque $i > j$ (faire l'exercice). Il est plus pénible de prouver que la famille est libre.

Donnons maintenant une formulation plus intrinsèque du même résultat. Pour cela, rappelons la filtration croissante $(\mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq k})_{k \in \mathbb{N}}$ de l'algèbre $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ qu'elle hérite de la même filtration pour l'algèbre tensorielle $T\mathfrak{g}$ (cf preuve du théorème d'existence ci-dessus). Notons $gr(\mathcal{U}\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq k} / \mathcal{U}\mathfrak{g}^{\leq k-1}$ l'algèbre graduée associée. On vérifie facilement qu'elle est commutative car le commutateur de deux monômes de longueur k est une combinaison

linéaire de monômes de longueur $\leq k-1$. Ainsi, le morphisme canonique $T\mathfrak{g} = gr(T\mathfrak{g}) \longrightarrow gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$ se factorise par l'algèbre symétrique (cf exemple ii) ci-dessus) pour donner un morphisme d'algèbres graduées $S\mathfrak{g} \longrightarrow gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$.

THÉORÈME. (Deuxième formulation) – *Le morphisme $S\mathfrak{g} \longrightarrow gr(\mathcal{U}\mathfrak{g})$ ci-dessus est un isomorphisme.*

Quelle que soit la formulation choisie, on obtient les conséquences suivantes :

COROLLAIRE. – *i) L'application $\iota : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g}$ est injective.*

ii) Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathcal{U}\mathfrak{h}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.

Noter que le i) découle aussi du théorème d'Ado qui dit que \mathfrak{g} se plonge dans un $\mathfrak{gl}(V)$ et donc dans $\text{End}_K(V)$.

2.1.4 Structure de bigèbre. Terminons par la remarque suivante, qui montre qu'une algèbre enveloppante possède plus de structure que celle d'algèbre associative. Considérons l'application $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{g}$ qui envoie x sur $\iota(x) \otimes 1 + 1 \otimes \iota(x)$. On peut montrer que c'est un morphisme d'algèbres de Lie (exercice). Il induit donc un morphisme d'algèbres $\Delta : \mathcal{U}\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}\mathfrak{g} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{g}$. On peut alors montrer l'identité $(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ (axiome de coassociativité). On dit que Δ est un coproduit, et que $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ est une bigèbre (et même une "algèbre de Hopf"). Nous n'en ferons rien de plus ici, mais ce point de vue est fondamental dans la théorie des *groupes quantiques*. Ces derniers ne sont pas vraiment des groupes, mais plutôt des "déformations" d'une algèbre enveloppante classique.

2.2 Forme de Killing. Opérateurs de Casimir

2.2.1 DÉFINITION. – *Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie. Une forme K -bilinéaire B sur \mathfrak{g} est dite invariante si $B(\text{ad}_Z(X), Y) + B(X, \text{ad}_Z(Y)) = 0$ pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

Exemple. – Le paradigme de forme bilinéaire invariante est la forme

$$(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY) \text{ sur } \mathfrak{gl}_n(K).$$

Cela donne un moyen d'en construire plein d'autres : pour toute représentation $r : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$, la forme bilinéaire $B_r(X, Y) := \text{tr}(r(X)r(Y))$ sur \mathfrak{g} est invariante.

Propriété. – Si B est une forme bilinéaire invariante sur \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal de \mathfrak{g} , alors son orthogonal $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h}, B(X, Y) = 0\}$ est aussi un idéal de \mathfrak{g} . En particulier, \mathfrak{g}^\perp est un idéal de \mathfrak{g} .

Forme de Killing. – La forme de Killing B_{ad} sur \mathfrak{g} est la forme bilinéaire invariante associée à la représentation $r = \text{ad}$ comme ci-dessus. On a donc $B_{\text{ad}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$.

2.2.2 LEMME. – *Si \mathfrak{h} est un idéal³ de \mathfrak{g} , alors la forme de Killing de \mathfrak{h} est la restriction à \mathfrak{h} de la forme de Killing de \mathfrak{g} .*

3. Attention ce n'est pas vrai si \mathfrak{h} est simplement une sous-algèbre de Lie

Démonstration. Pour $X, Y \in \mathfrak{h}$, on a $\text{ad}_X \text{ad}_Y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$. Donc $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y|\mathfrak{g}) = \text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y|\mathfrak{h})$. \square

2.2.3 Formes bilinéaires invariantes non dégénérées. Supposons maintenant donnée une forme bilinéaire B non dégénérée sur \mathfrak{g} . On lui associe un élément de l'algèbre enveloppante $C_B \in \mathcal{U}\mathfrak{g}$, appelé *opérateur de Casimir*, et défini par

$$C_B = \sum_{i=1}^n X_i X_i^*$$

où X_1, \dots, X_n désigne une base de \mathfrak{g} et X_1^*, \dots, X_n^* désigne la base duale pour la forme non dégénérée B .

LEMME. – Cette définition ne dépend pas du choix de la base.

Démonstration. Soit en effet Y_1, \dots, Y_n une autre base de \mathfrak{g} . On a $Y_i = \sum_k B(Y_i, X_k^*) X_k$ et $Y_i^* = \sum_l B(Y_i^*, X_l) X_l^*$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i Y_i^* &= \sum_{k,l} \left(\sum_i B(Y_i, X_k^*) B(Y_i^*, X_l) \right) X_k X_l^* \\ &= \sum_{k,l} \left(B \left(\sum_i Y_i B(Y_i^*, X_l), X_k^* \right) \right) X_k X_l^* = \sum_{k,l} B(X_l, X_k^*) X_k X_l^* = C_B \end{aligned}$$

\square

Exemple. – Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$, et $B = B_{\text{std}}$ la forme bilinéaire standard définie par $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$. On vérifie aisément qu'elle est non dégénérée et que la base duale de la base (E, H, F) est $(F, \frac{1}{2}H, E)$. On retrouve l'opérateur $C = EF + \frac{1}{2}H^2 + FE$ introduit plus haut.

Exercice. – i) Vérifier que $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ est non dégénérée sur $\mathfrak{gl}_n(K)$ et sur les algèbres de Lie classiques (\mathfrak{so} , \mathfrak{sl} , \mathfrak{sp}).

ii) ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Montrer que pour toute sous-algèbre de Lie \mathfrak{g} de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ stable par transposition, la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$ est non dégénérée.

On a vu que la vertu de l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ était d'appartenir au centre de $\mathcal{U}\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Plus généralement :

PROPOSITION. – L'opérateur C_B appartient au centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il commute à tout $X \in \mathfrak{g}$. Or on a

$$\begin{aligned} X C_B - C_B X &= \sum_i (X X_i X_i^* - X_i X_i^* X) = \sum_i ([X, X_i] X_i^* - X_i [X_i^*, X]) \\ &= \sum_i \sum_k (B([X, X_i], X_k^*) X_k X_i^* - B(X_k, [X_i^*, X]) X_i X_k^*) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,k} (B([X, X_k], X_i^*) + B(X_k, [X, X_i^*])) X_i X_k^* = 0$$

par invariance de la forme bilinéaire B . □

Comme dans le cas de \mathfrak{sl}_2 , une conséquence intéressante est que sur toute représentation (V, r) de \mathfrak{g} , l'élément C induit un opérateur $r(C) = \sum_i r(X_i)r(X_i^*)$ qui commute à l'action de \mathfrak{g} . En particulier, si V est irréductible et si K est algébriquement clos ($K = \mathbb{C}$ par exemple), alors $r(C)$ est une homothétie.

2.3 Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie. Pour deux idéaux $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ de \mathfrak{g} , on définit

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = \{K\text{-esp.vect. engendré par les } [x_1, x_2], x_1 \in \mathfrak{h}_1, x_2 \in \mathfrak{h}_2\}.$$

C'est encore un idéal de \mathfrak{g} , d'après l'identité de Jacobi.

Exemple. (idéal dérivé) – L'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est appelé *idéal dérivé* de \mathfrak{g} . Il est nul si et seulement si \mathfrak{g} est abélienne. En général, il est contenu dans tout morphisme de \mathfrak{g} vers une algèbre de Lie abélienne, si bien que $\mathfrak{g}_{\text{ab}} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le *plus grand quotient* abélien de \mathfrak{g} .

Plus généralement, on définit deux suites décroissantes (pour l'inclusion) d'idéaux :

- i) la *suite centrale* définie par $C^0 \mathfrak{g} := \mathfrak{g}$ et $C^{n+1} \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^n \mathfrak{g}]$, pour $n \geq 0$.
- ii) la *suite dérivée* définie par $D^0 \mathfrak{g} := \mathfrak{g}$ et $D^{n+1} \mathfrak{g} := [D^n \mathfrak{g}, D^n \mathfrak{g}]$, pour $n \geq 0$.

On a $C^1 \mathfrak{g} = D^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et pour $n \geq 1$ on a $C^n \mathfrak{g} \supset D^n \mathfrak{g}$.

2.3.1 DÉFINITION. – On dit que \mathfrak{g} est

- nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C^n \mathfrak{g} = 0$.
- résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n \mathfrak{g} = 0$.

On a donc “abélienne” \Rightarrow “nilpotente” \Rightarrow “résoluble”. On remarquera aussi le parallèle avec les notions de nilpotence et de résolubilité des groupes finis.

Exercice. – Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie.

- i) (a) Montrer que \mathfrak{g} est nilpotente si et seulement s'il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de \mathfrak{g} tels que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ pour tout i .
- (b) En déduire que toute sous-algèbre de Lie et toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente.
- (c) Montrer que \mathfrak{g} est nilpotente si et seulement si $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ l'est.
- ii) (a) Montrer que \mathfrak{g} est résoluble si et seulement s'il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de \mathfrak{g} tels que $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ est abélienne pour tout i .
- (b) En déduire que si \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} , alors \mathfrak{g} est résoluble *si et seulement si*⁴ \mathfrak{h} et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ le sont.

4. Attention, le “si” n'est pas vrai pour “nilpotente”

2.3.2 DÉFINITION.— Soit V un K -ev de dimension finie n . Un drapeau complet de V est une suite croissante de s.e.v $\mathcal{V} = (0 = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_n = V)$ avec $\dim(\mathcal{V}_i) = i$. On lui associe deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{V}) := \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}, \text{ et}$$

$$\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V}) := \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}.$$

Remarque. – Si on choisit une base v_1, \dots, v_n telle que $\mathcal{V}_i = \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$ alors l'isomorphisme $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$ qui en résulte identifie $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$, resp. $\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ à l'espace des matrices triangulaires supérieures, resp. strictement triangulaires supérieures, dans $M_n(K)$.

Exercice. – Vérifier que $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, puis montrer :

- i) $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}), \mathfrak{b}(\mathcal{V})] = \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$, et $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}), \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})] = \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$.
- ii) pour $k \geq 1$, $C^k(\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})) = \{X \in \mathfrak{gl}(V), X(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-k}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.\}$

En déduire que $\mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ est nilpotente, et que $\mathfrak{b}(\mathcal{V})$ est résoluble mais pas nilpotente.

2.3.3 Caractérisation par la théorie des représentations. On suppose ici K **algébriquement clos et de caractéristique nulle**, et il n'y a pas de mal à se limiter à $K = \mathbb{C}$. Nous allons d'abord voir que l'exemple d'algèbre résoluble ci-dessus est typique.

THÉORÈME. (Lie) – Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie avec K algébriquement clos. On a équivalence entre :

- i) \mathfrak{g} est résoluble.
- ii) Toute représentation irréductible de \mathfrak{g} est de dimension 1.
- ii)' Toute représentation de \mathfrak{g} contient un vecteur propre pour \mathfrak{g} .
- iii) Toute représentation (V, r) de \mathfrak{g} est trigonalisable, au sens où il existe un drapeau \mathcal{V} de V tel que $r(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$.

Démonstration. L'équivalence $ii) \Leftrightarrow ii)'$ est claire, tout comme l'implication $iii) \Rightarrow ii)'$, et l'implication $ii) \Rightarrow iii)$ se voit par une récurrence évidente.

Montrons que $iii) \Rightarrow i)$. Appliquons $iii)$ à la représentation adjointe. On obtient un drapeau complet de sous-espaces $0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}$ tel que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, ce qui signifie que les \mathfrak{h}_i sont des idéaux de \mathfrak{g} . Comme le quotient $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ est de dimension 1, c'est une algèbre de Lie abélienne, et on peut appliquer le critère de l'exercice ci-dessus pour en déduire que \mathfrak{g} est résoluble.

Montrons maintenant que $i) \Rightarrow ii)'$ par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, le résultat est clair puisque tout endomorphisme d'un K -ev de dimension finie possède un vecteur propre (K est algébriquement clos). Supposons $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ et soit \mathfrak{h} un hyperplan de \mathfrak{g} contenant $D\mathfrak{g}$ (noter que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g} \neq 0$). Alors, \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} , et par hypothèse de récurrence il existe un vecteur propre v de V commun à tous les éléments de \mathfrak{h} . Soit λ la forme linéaire sur \mathfrak{h} définie par $X.v = \lambda(X)v$ pour tout X dans \mathfrak{h} . Posons

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, X.v = \lambda(X)v\},$$

le sous-espace “ λ -propre” de V sous l’action de \mathfrak{h} , qui est donc non nul. Admettons un instant que V_λ est stable par \mathfrak{g} . Soit Y un générateur d’une droite supplémentaire de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . Comme K est algébriquement clos, Y admet un vecteur propre $v' \in V_\lambda$. Alors, v' , qui est propre pour \mathfrak{h} , l’est pour \mathfrak{g} toute entière, et le théorème est démontré.

Il reste à prouver que V_λ est stable par \mathfrak{g} . Par l’égalité

$$XYv = YXv + [X, Y]v = \lambda(X)Yv + \lambda([X, Y])v$$

valable pour tout $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, v \in V_\lambda$, on est ramené à prouver que $\lambda([X, Y]) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Pour cela, fixons un vecteur $w \neq 0$ de V_λ , et notons

$$W_k := \text{vect}\{w, Yw, \dots, Y^k w\}$$

La formule $XY^k w = YXY^{(k-1)}w + [X, Y]Y^{(k-1)}w$ montre par récurrence que

$$\forall X \in \mathfrak{h}, \quad XW_k \subset W_k \quad (*) : XY^k w \in \lambda(X)Y^k w + W_{k-1}.$$

Considérons alors la réunion W des W_k . C’est un sous-espace stable par \mathfrak{h} et $(*)$ montre que $\forall X \in \mathfrak{h}$ on a $\text{tr}(X|_W) = \dim(W) \cdot \lambda(X)$. En particulier on a $\dim(W) \cdot \lambda([X, Y]) = \text{tr}([X, Y]|_W)$. Or, par construction, W est aussi stable par Y , si bien que $\text{tr}([X, Y]|_W) = \text{tr}([X|_W, Y|_W]) = 0$. On a donc $\lambda([X, Y]) = 0$ comme voulu (car $\dim(W)$ est non nul dans K supposé de caractéristique nulle). \square

Remarque. – Ce théorème généralise le résultat classique d’algèbre linéaire qui dit qu’une famille d’endomorphismes commutant 2 à 2 est simultanément trigonalisable.

Afin de donner une caractérisation des algèbres nilpotentes par leurs représentations, introduisons quelques définitions et notations. Si $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow K$ est une application et (V, r) une représentation, on note

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{g}, r(X)v = \lambda(X)v\}$$

l’espace propre associé, et

$$V^\lambda := \{v \in V, \exists n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathfrak{g}, (r(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

l’espace propre “généralisé” associé.

DÉFINITION. – Si $V_\lambda \neq 0$, on dit que λ est un poids de \mathfrak{g} dans la représentation (V, r) . Alors V_λ est l’espace de poids λ et V^λ l’espace de poids généralisé.

Exercice. – Si λ est un poids d’une représentation, alors λ est K -linéaire et $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. C’est donc un élément du dual $\mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$ de l’abélianisée de \mathfrak{g} .

Remarquer que, en général, il n’est pas clair que V^λ soit stable par \mathfrak{g} .

PROPOSITION. (Théorème de Engel) – Si $V = V^\lambda$ alors $\lambda \in \mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$ et il existe un drapeau complet \mathcal{V} de V tel que $(r - \lambda)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$.

Remarque. – Concrètement, cela dit que si pour tout X il existe une base dans laquelle $r(X)$ est triangulaire supérieures avec des $\lambda(X)$ sur la diagonale, alors il existe en fait une base dans laquelle *tout* $r(X)$ est de cette forme.

Démonstration. Par hypothèse, on a $\text{tr}(r(X)) = \lambda(X) \dim(V)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Ceci montre (si K est de caractéristique 0 pour que $\dim(V) \neq 0$ dans K) que λ est K -linéaire et nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc provient de $\mathfrak{g}_{\text{ab}}^*$. Mais alors l'application $X \mapsto r(X) - \lambda(X) \text{id}_V$ définit une représentation de \mathfrak{g} sur le même espace V . Quitte à remplacer r par $r - \lambda$, on peut donc supposer que $\lambda = 0$. Par un argument de récurrence, il nous suffit alors de prouver :

(*) pour toute représentation (V, r) t.q. $r(X)$ est nilpotent $\forall X$, on a $V^{\mathfrak{g}} \neq 0$.

Nous le ferons par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, on a $V^{\mathfrak{g}} = \text{Ker}(r(X))$ pour tout X non nul de \mathfrak{g} . Comme $r(X)$ est supposé nilpotent, son noyau est non nul, comme voulu. Supposons maintenant $\dim(\mathfrak{g}) > 1$, et supposons que l'on dispose d'un idéal \mathfrak{h} non trivial, i.e. distinct de $\{0\}$ et de \mathfrak{g} . Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à \mathfrak{h} nous dit que $V^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$. De plus, $V^{\mathfrak{h}}$ est stable par l'action de \mathfrak{g} , laquelle se factorise par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ainsi l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nous dit que $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \neq 0$. Or, on a $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Il reste donc à prouver l'existence d'un idéal \mathfrak{h} non trivial. Quittes à remplacer \mathfrak{g} par $r(\mathfrak{g})$, on peut supposer que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. Choisissons alors une sous-algèbre de Lie propre \mathfrak{h} de \mathfrak{g} de dimension maximale. La représentation adjointe ad de \mathfrak{g} restreinte à \mathfrak{h} induit une représentation de \mathfrak{h} sur le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'image de \mathfrak{h} par cette représentation est formée d'endomorphismes nilpotents. En effet, d'après l'exercice ci-dessous, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\text{ad}(X)$ de \mathfrak{g} est nilpotent. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence pour en déduire l'existence d'un élément $\bar{X} \neq 0$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ annulé par l'action de \mathfrak{h} . Soit $X \in \mathfrak{g}$ au-dessus de \bar{X} . On a donc $X \notin \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, X] = \text{ad}(\mathfrak{h})(X) \subseteq \mathfrak{h}$. Ceci implique que $\mathfrak{h} \oplus K.X$ est une algèbre de Lie contenant \mathfrak{h} comme idéal. Mais par maximalité de \mathfrak{h} , on a $\mathfrak{h} \oplus K.X = \mathfrak{g}$. Ainsi, \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} de codimension 1. \square

Exercice. – Soit A une K -algèbre associative et $\text{ad}(x)(y) = [x, y] := xy - yx$ pour $x, y \in A$. Montrer que $\text{ad}(x)^n(y) \in \text{Vect}_K\{x^k y x^{n-k}, k = 0, \dots, n\}$.

COROLLAIRE. – Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie de dimension finie. Alors \mathfrak{g} est nilpotente si et seulement si ad_X est nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. Puisque $\text{ad}_X^n(\mathfrak{g}) \subset C^n \mathfrak{g}$, on voit que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons ad_X nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$. D'après la proposition ci-dessus (avec $\lambda = 0$), il existe un drapeau $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}$ tel que $\text{ad}_X(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i-1}$ pour tout X , ie tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i-1}$. Quitte à renuméroter \mathfrak{h}_i en \mathfrak{h}_{n-i} , on reconnaît là le critère de nilpotence qui suit la définition. \square

LEMME. – Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie nilpotente, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie, $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow K$ une application, et V^λ l'espace propre généralisé. Alors V^λ est stable par \mathfrak{g} .

Démonstration. Soit $Y \in \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{h}$ et $v \in V^\lambda$. On veut montrer que

$$(r(X) - \lambda(X))^n r(Y)v = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

Or, pour f, g deux endomorphismes de V , on montre par récurrence (exercice) que

$$f^n \circ g = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} (\text{ad}_f)^k(g) \circ f^{n-k}.$$

Posons $f = r(X) - \lambda(X)$ et $g = r(Y)$. Choisissons m tel que $f^m(v) = 0$ et $\text{ad}_f^m(g) = 0$ (en effet $\text{ad}_f = \text{ad}_{r(X)}$ et \mathfrak{g} , donc $r(\mathfrak{g})$ est nilpotente). Alors la formule ci-dessus nous donne $f^{2m} \circ g(v) = 0$. On a donc montré que V^λ est stable par \mathfrak{g} . \square

THÉORÈME. – *Supposons K algébriquement clos, et soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie de dimension finie. On a alors équivalence entre :*

i) \mathfrak{g} est nilpotente,

ii) toute représentation (V, r) se décompose $V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda$ où λ parcourt les poids de \mathfrak{g} dans V et V^λ est stable par \mathfrak{g} .

Démonstration. *ii) \Rightarrow i).* Appliquons ii) à la représentation adjointe. On en tire une décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}^\lambda$ en somme direct d'idéaux. Montrons que $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$. En effet soit $Y \in \mathfrak{g}^\lambda$. L'endomorphisme $(\text{ad}_Y - \lambda(Y))|_{\mathfrak{g}^\lambda}$ est nilpotent et $(\text{ad}_Y)|_{\mathfrak{g}^\lambda}$ n'est pas inversible puisque $\text{ad}_Y(Y) = 0$. Il s'ensuit que $\lambda(Y) = 0$ et donc $\lambda|_{\mathfrak{g}^\lambda} = 0$. Mais puisque $[\mathfrak{g}^{\lambda'}, \mathfrak{g}^\lambda] \subset \mathfrak{g}^{\lambda'} \cap \mathfrak{g}^\lambda$, on a aussi $\lambda|_{\mathfrak{g}^{\lambda'}} = 0$ pour les autres poids, et donc finalement, $\lambda = 0$. D'après le corollaire ci-dessus, \mathfrak{g} est donc nilpotente.

i) \Rightarrow ii). Par récurrence sur $\dim(V)$. Si tous les $r(X)$ n'ont qu'une valeur propre, alors $V = V^\lambda$ pour une fonction λ , et on a vu que λ est un poids (proposition ci-dessus). Sinon, il existe X ayant au moins deux valeurs propres distinctes (K algébriquement clos). D'où une décomposition non triviale $V = V_X^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_X^{\lambda_k}$ en sous-espaces propres généralisés de $r(X)$. D'après le lemme précédent, chaque $V_X^{\lambda_i}$ est stable par \mathfrak{g} et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. \square

Remarque. – Ce théorème donne une “forme de Jordan simultanée” pour les éléments de $r(\mathfrak{g})$.

2.3.4 Caractérisation par la forme de Killing. On suppose toujours K algébriquement clos de caractéristique nulle.

PROPOSITION. – *Soit \mathfrak{g} une K -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(K)$ telle que $\text{tr}(XY) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Alors, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente, et donc \mathfrak{g} est résoluble.*

Remarque. – La résolubilité de \mathfrak{g} découle du ii)(b) de l'exercice sous la définition 2.3.1 appliqué à $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\text{ab}}$ qui est abélien.

Démonstration. Par simplicité, nous supposons que $K = \mathbb{C}$ ou $K = \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ (remarquons que si K a au plus la puissance du continu (at most second-countable), il est connu (en admettant l'axiome du choix non dénombrable) que K est en effet isomorphe à \mathbb{C} ou à $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$). Par le théorème de Engel, il suffit de voir que tout élément X de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{gl}_n(K)$

est nilpotent, autrement dit, que ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont nulles. Choisissons un polynôme $f \in K[T]$ tel que $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ pour tout i (un polynôme interpolateur de Lagrange par exemple). Soit $X = X_s + X_n$ la décomposition de Jordan de X . Alors $\text{tr}(f(X_s)X) = \sum_i \bar{\lambda}_i \lambda_i = \sum_i |\lambda_i|^2$. Il nous suffira donc de prouver que $\text{tr}(f(X_s)X) = 0$. Comme $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est une combinaison linéaire de $[Y, Z]$ avec $Y, Z \in \mathfrak{g}$, et comme

$$\text{tr}(f(X_s)[Y, Z]) = \text{tr}([f(X_s), Y]Z),$$

il suffit de montrer que $\text{ad}_{f(X_s)}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, pour pouvoir appliquer l'hypothèse. Or, l'endomorphisme $\text{ad}_{f(X_s)}$ de $\mathfrak{gl}_n(K)$ est diagonalisable dans une même base que l'endomorphisme ad_{X_s} . Plus précisément, si (e_1, \dots, e_n) est une base de K^n qui diagonalise X_s (avec valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) et si $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base de $\mathfrak{gl}_n(K)$ correspondante, alors E_{ij} est vecteur propre de ad_{X_s} , resp. de $\text{ad}_{f(X_s)}$ pour la valeur $\lambda_i - \lambda_j$, resp. $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = \bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j$. Il s'ensuit que pour tout polynôme $g \in K[T]$ tel que $g(\lambda_i - \lambda_j) = \bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j$ (et il en existe, par exemple un polynôme interpolateur), on a $\text{ad}_{f(X_s)} = g(\text{ad}_{X_s})$. Il nous suffit donc de prouver que $\text{ad}_{X_s}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Or, ad_{X_s} est la partie semi-simple de ad_X dans sa décomposition de Jordan (cf remarque ci-dessous), donc c'est un polynôme en ad_X , et puisque $\text{ad}_X(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, on a terminé. \square

Remarque. – On a utilisé le fait que si $X = X_s + X_n$ est la décomposition de Jordan d'un endomorphisme K -linéaire d'un K -ev V , alors $\text{ad}_X = \text{ad}_{X_s} + \text{ad}_{X_n}$ est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme ad_X de $\mathfrak{gl}(V)$. En effet, on a déjà remarqué que ad_{X_n} est nilpotent (exercice sous le théorème de Engel), et on vient d'expliquer dans la preuve ci-dessus que ad_{X_s} est diagonalisable. Il suffit donc de remarquer que ad_{X_s} et ad_{X_n} commutent.

COROLLAIRE. (Critère de Cartan) – *Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de dimension finie. Alors \mathfrak{g} est résoluble si et seulement si on a $B_{\text{ad}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.*

Démonstration. \Rightarrow . Si \mathfrak{g} est résoluble, le théorème de Lie nous dit qu'il existe un drapeau $\mathcal{V} = (\mathfrak{h}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{h}_n)$ dans \mathfrak{g} tel que $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$. Mais alors $\text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset [\text{ad}(\mathfrak{g}), \text{ad}(\mathfrak{g})] \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$, donc pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a $\text{ad}_X \text{ad}_Y \in \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$, et par conséquent $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$.

\Leftarrow . Soit $\mathfrak{h} := \text{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ où $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe de \mathfrak{g} . Puisque $\mathfrak{h} \simeq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] / (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ et $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne, on voit que \mathfrak{g} est résoluble si et seulement si \mathfrak{h} l'est (cf ii)(b) de l'exercice sous la définition 2.3.1). Or la résolubilité de \mathfrak{h} découle de la proposition précédente. \square

2.4 Algèbres de Lie semi-simples

Si $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ sont deux idéaux résolubles d'une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors leur somme $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ est encore résoluble, puisque c'est un quotient de la somme directe $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$. Cela permet de définir le *radical* $\text{rad}(\mathfrak{g})$ comme le plus grand idéal résoluble de \mathfrak{g} .

2.4.1 DÉFINITION. – *Une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite*

- simple si $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ et ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et \mathfrak{g} .
- semi-simple si $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ (ie si \mathfrak{g} n'a pas d'idéal abélien non nul).
- réductive si $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Remarque. – La condition $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ dans la définition de “simple” est là pour éviter l’algèbre “triviale” $\mathfrak{g} = K$ qui a pour seuls idéaux $\{0\}$ et \mathfrak{g} . Avec ces définitions on a

$$\mathfrak{g} \text{ simple} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ semi-simple} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ réductive}$$

Exercice. –

- i) Montrer que \mathfrak{g} simple \Rightarrow \mathfrak{g} semi-simple.
- ii) Montrer que pour \mathfrak{g} quelconque, $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.
- iii) Montrer qu’une somme directe de semi-simples est semi-simple.

Nous allons voir que toutes les algèbres de Lie classiques sont réductives, et même simples dès que leur centre est trivial.

2.4.2 Caractérisation par la forme de Killing. On suppose dorénavant que K est algébriquement clos de caractéristique nulle.

LEMME. – Soit (V, r) une représentation irréductible de \mathfrak{g} . Alors tout $X \in \text{rad}(\mathfrak{g})$ agit par un scalaire, et donc $r([\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]) = 0$.

Démonstration. Par le théorème de Lie, il existe dans V un vecteur propre pour $\text{rad}(\mathfrak{g})$. Notons $\lambda : \text{rad}(\mathfrak{g}) \rightarrow K$ la “valeur propre” associée et V_λ l’espace propre. Il nous suffit de prouver que V_λ est stable par \mathfrak{g} . Or pour tous $Y \in \mathfrak{g}$, $X \in \text{rad}(\mathfrak{g})$ et $v \in V_\lambda$, on a $XYv = [X, Y]v + YXv = \lambda([X, Y])v + \lambda(X)Yv$. Comme dans la preuve du théorème de Lie, on prouve que $\lambda([X, Y]) = 0$ et on conclut. \square

COROLLAIRE. – Si \mathfrak{g} admet une représentation (V, r) telle que la forme bilinéaire B_r est non-dégénérée, alors \mathfrak{g} est réductive.

Démonstration. D’après le lemme, l’idéal $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ agit trivialement sur toute représentation irréductible de \mathfrak{g} . Soit alors $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_l = V$ une suite croissante de sous-représentations de V dont les quotients successifs V_i/V_{i-1} sont irréductibles. On a donc $r(Y)(V_i) \subset V_i$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$ et $r(X)(V_i) \subset V_{i-1}$ pour $X \in [\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$. Par conséquent $r(X)r(Y)$ est nilpotent, donc de trace nulle, et il s’ensuit que $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})]$ est inclus dans le noyau de B_r . Comme celle-ci est supposée non-dégénérée, on a $[\mathfrak{g}, \text{rad}(\mathfrak{g})] = 0$, ce qui équivaut à $\text{rad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. L’inclusion réciproque est tautologique. \square

Exemples. – En appliquant ce corollaire à la représentation *standard* d’une algèbre de Lie classique, on constate que $\mathfrak{gl}_n(K)$ et $\mathfrak{u}(n)$ (pour $K = \mathbb{R}$) sont réductives, et que $\mathfrak{sl}_n(K)$, $\mathfrak{so}_n(K)$ (pour $n > 2$), $\mathfrak{sp}_{2n}(K)$, $\mathfrak{su}(n)$ (pour $K = \mathbb{R}$) sont réductives, et même *semi-simples* puisque (exercice) leur centre est nul.

THÉORÈME. (Cartan) – Une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} est semi-simple si et seulement si la forme de Killing B_{ad} est non dégénérée.

Démonstration. Supposons B_{ad} non-dégénérée. Cela implique évidemment que $\text{Ker}(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, et d'après le corollaire ci-dessus cela implique aussi que \mathfrak{g} est réductive. Donc \mathfrak{g} est semi-simple.

Réciproquement, supposons \mathfrak{g} semi-simple. Alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ donc $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est injective. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\perp$ le noyau de B_{ad} . D'après le critère de Cartan, \mathfrak{h} est résoluble, donc $\mathfrak{h} = 0$. \square

THÉORÈME. – *Une K -algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} est somme directe d'idéaux simples. En particulier, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Démonstration. Soit \mathfrak{h} un idéal de \mathfrak{g} et \mathfrak{h}^\perp son orthogonal pour la forme de Killing de \mathfrak{g} . Alors la forme de Killing de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$, qui est la restriction de celle de \mathfrak{g} , est nulle donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ est un idéal résoluble, donc il est nul. Comme B_{ad} est non dégénérée, il s'ensuit que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ et que les formes de Killing de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^\perp sont non dégénérées. Une récurrence sur la dimension permet alors de conclure. \square

2.4.3 Caractérisation par les représentations. On suppose toujours K algébriquement clos de caractéristique nulle.

THÉORÈME. (Weyl) – *Une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} est semi-simple si et seulement si toutes ses représentations (de dimension finie) sont complètement réductibles.*

La preuve originale de ce théorème par Weyl (pour $K = \mathbb{C}$) utilisait son astuce unitaire et l'existence d'une forme réelle apparaissant comme algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact, comme on l'a fait pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ avec la forme réelle $\mathfrak{su}(n)$ et le groupe compact $\text{SU}(n)$. Voici une preuve plus directe due à Casimir.

Démonstration. Si les représentations sont complètement réductibles, en particulier la représentation adjointe l'est. Écrivons $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ avec \mathfrak{g}_i sous-représentations irréductibles de $(\mathfrak{g}, \text{ad})$. Alors les \mathfrak{g}_i sont des idéaux (car stables par $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$) et simples ou de dimension 1 (car irréductibles). Or \mathfrak{g} ne peut pas avoir de facteur direct de dimension 1 puisqu'on a vu que les représentations de K ne sont pas nécessairement complètement réductibles. Donc \mathfrak{g} est semi-simple.

Supposons maintenant \mathfrak{g} semi-simple. Soit $(V, r) \in \text{Rep}_K(\mathfrak{g})$ et $W \subset V$ une sous-représentation ; on veut trouver un supplémentaire de W stable sous \mathfrak{g} . Pour cela, il suffit de trouver un $\varphi \in \text{Hom}_{K\mathfrak{g}}(V, W)$ tel que $\varphi|_W = \lambda \text{id}_W$ avec $\lambda \neq 0$. Car en effet, on aura $V = W \oplus \text{Ker}(\varphi)$ avec $\text{Ker}(\varphi)$ stable.

Première étape : on se ramène au cas où V/W est la représentation unité. Considérons la représentation Hom interne $H = \mathcal{H}om_K(V, W)$, et ses sous-espaces $A := \{\varphi \in H, \varphi|_W \in K \text{id}_W\}$ et $B := \{\varphi \in A, \varphi|_W = 0\}$. Si $\varphi \in A$, on voit que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $(X\varphi)(w) = X\varphi(w) - \varphi(Xw) = X\lambda w - \lambda Xw = 0$, donc $X\varphi \in B$. En particulier A et B sont des sous-représentations de H et B/A est la représentation unité. Supposons que B admette un supplémentaire, c'est-à-dire une droite $D \subset A^{\mathfrak{g}}$ telle que $B \oplus D = A$. Alors, comme expliqué ci-dessus, on a $W \oplus \text{Ker}(\varphi) = V$.

Deuxième étape : opérateurs de Casimir et récurrence. On suppose dorénavant que V/W est la représentation unité, et on montre l'existence d'une droite stable supplémentaire de W par récurrence sur $\dim(V)$. Fixons une suite croissante $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{l-1} = W \subset V_l = V$ de sous-représentations telles que V_i/V_{i-1} soit irréductible pour tout $i = 1, \dots, l$.

Si tous les V_i/V_{i-1} sont isomorphes à la représentation unité, alors on est en présence d'un drapeau complet \mathcal{V} de V tel que $r(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$. Mais comme $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = C^n \mathfrak{g}$ pour tout n , on en déduit pour $n = \dim(V)$ que $r(\mathfrak{g}) = r(C^n \mathfrak{g}) = C^n \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V}) = 0$, donc V est une représentation triviale et n'importe quelle droite supplémentaire de W est stable.

Sinon, il existe i tel que $(U, r_U) := V_i/V_{i-1}$ soit distinct de la représentation unité. L'image $r_U(\mathfrak{g})$ est alors non nulle, et on peut choisir un facteur simple \mathfrak{g}_U de \mathfrak{g} tel que $r_U(\mathfrak{g}_U) \neq 0$. Alors, $\mathfrak{g}_U \xrightarrow{\sim} r_U(\mathfrak{g}_U)$ donc $r_U(\mathfrak{g}_U)$ est simple et la forme bilinéaire B_{r_U} associée à r_U est non nulle (à cause du critère de Cartan qui impliquerait la résolubilité de $r_U(\mathfrak{g}_U)$). Son noyau est alors un idéal propre de \mathfrak{g}_U , donc nul, et finalement, B_{r_U} est non dégénérée sur \mathfrak{g}_U . Soit alors C_U l'opérateur de Casimir associé, qui appartient au centre de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_U$ et donc à celui de $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ (en effet $\mathcal{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}') = \mathcal{U}\mathfrak{h} \otimes_K \mathcal{U}\mathfrak{h}'$). Alors $r(C_U)$ est un endomorphisme de V qui commute à l'action de \mathfrak{g} , donc \mathfrak{g} stabilise ses sous-espaces caractéristiques. On a $r(C_U)(V) \subset W$, donc 0 est valeur propre et l'espace caractéristique $V_0 := \text{Ker}(r(C_U)^n)$ n'est pas contenu dans W . Soit V^0 la somme des autres sous-espaces caractéristiques de $r(C_U)$. On a alors une somme directe $V^0 \oplus V_0$ de V en sous-espaces stables. Si l'on prouve que $V^0 \neq 0$, alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à V_0 . Nous devons donc prouver que $r(C_U)$ possède une valeur propre non nulle. Il suffit pour cela de vérifier que $r_U(C_U)$ en possède une. Notons que $r_U(C_U)$ est une homothétie, par le lemme de Schur. Il suffit donc de montrer que sa trace est non nulle. Or $\text{tr}(r_U(C_U)) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_U} \text{tr}(r_U(X_i)r_U(X_i^*))$ où X_i est une base de \mathfrak{g}_U et X_i^* la base duale pour la forme bilinéaire $B_{r_U}(X, Y) = \text{tr}(r_U(X)r_U(Y))$. On a donc $\text{tr}(r_U(C_U)) = \dim \mathfrak{g}_U \neq 0$. \square

COROLLAIRE. — Une K -algèbre de Lie \mathfrak{g} est réductive si et seulement si $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ avec $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ semi-simple.

Démonstration. Que la condition soit suffisante est clair. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit \mathfrak{g} réductive. Alors la représentation adjointe $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ se factorise par $\text{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ qui est semi-simple. Elle est donc complètement réductible. Comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ est stable par $\text{ad}(\mathfrak{g})$, il existe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ avec les \mathfrak{g}_i irréductibles donc simples. Il s'ensuit que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$. \square

2.5 Structure des algèbres semi-simples

Dans toute cette partie, K désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

2.5.1 Sous-algèbres de Cartan. Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie, on note $N(\mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{g}, \text{ad}_X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$ son normalisateur, qui est aussi une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} (le vérifier).

DÉFINITION. – Une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} est une sous-algèbre nilpotente \mathfrak{h} telle que $N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Nous allons montrer que de telles sous-algèbres existent bel et bien. Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons $\mathfrak{g}_{X,0} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(\text{ad}_X)^n \subset \mathfrak{g}$ l'espace caractéristique de ad_X pour la valeur propre 0, puis

$$\text{rk}(\mathfrak{g}) := \min_{X \in \mathfrak{g}} (\dim_K(\mathfrak{g}_{X,0})).$$

Notons que $\dim_K(\mathfrak{g}_{X,0})$ est la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de ad_X . L'entier $\text{rk}(\mathfrak{g})$ est appelé *rang de \mathfrak{g}* et l'élément X est dit *régulier* si $\text{rk}(\mathfrak{g}) = \dim_K(\mathfrak{g}_{X,0})$.

Exercice. – Montrer que $\text{rk}(\mathfrak{gl}_n(K)) = n$ et que $X \in \mathfrak{gl}_n(K)$ est régulier si et seulement si toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer aussi que $\text{rk}(\mathfrak{sl}_n(K)) = n - 1$.

PROPOSITION. – Si X est régulier, $\mathfrak{g}_{X,0}$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Démonstration. i) Notons que $\mathfrak{g}_{X,0}$ est toujours une sous-algèbre de Lie. Cela découle en effet de la formule (à prouver par récurrence)

$$(\text{ad}_X)^n([Y, Z]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad}_X)^k(Y), (\text{ad}_X)^{n-k}(Z)].$$

ii) Supposons maintenant X régulier et montrons que $\mathfrak{g}_{X,0}$ est nilpotente. Il suffit de montrer que pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{X,0}$, l'endomorphisme $(\text{ad}_Y)|_{\mathfrak{g}_{X,0}}$ est nilpotent. Posons $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}_{X,0}$ et $r := \text{rk}(\mathfrak{g})$ pour simplifier les notations. Nous noterons $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}} \in K[T]$ le polynôme caractéristique de ad_Y dans $\text{End}_K(\mathfrak{g})$. Comme Y stabilise \mathfrak{h} , on a une factorisation $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}} = \Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}} \Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et nous voulons prouver que $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}} = T^r$. Fixons une base X_1, \dots, X_r de \mathfrak{h} et écrivons $Y = \sum_i y_i X_i$ avec $y_i \in K$. Alors il existe des polynômes $\Phi^{\mathfrak{g}}$, $\Phi^{\mathfrak{h}}$ et $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ dans $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$, uniques puisque K est infini, qui par spécialisation $Y_i \mapsto y_i$ donnent $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}}$, $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}}$ et $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$. On a aussi une factorisation $\Phi^{\mathfrak{g}} = \Phi^{\mathfrak{h}} \Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ dans l'anneau $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$ qui est *factoriel*. Or, on sait que :

- par régularité de X , T ne divise pas $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ dans $K[T]$. Comme $\Phi_{\text{ad}_X}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est une spécialisation de $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, il s'ensuit que T ne divise pas $\Phi^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ dans $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$.
- par définition du rang, T^r divise $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{g}}$ dans $K[T]$ pour tout Y . En écrivant $\Phi^{\mathfrak{g}} = \sum_k f_k T^k$ avec $f_k \in K[Y_1, \dots, Y_r]$, on en déduit que $f_0 = \dots = f_{r-1} = 0$ et donc que T^r divise $\Phi^{\mathfrak{g}}$ dans $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$.

Il s'ensuit que T^r divise $\Phi^{\mathfrak{h}}$ dans $K[Y_1, \dots, Y_r, T]$ et donc divise $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}}$ pour tout Y . Comme $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}}$ est de degré r , on a $\Phi_{\text{ad}_Y}^{\mathfrak{h}} = T^r$, comme voulu.

iii) Reste à vérifier que $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$. Mais puisque $X \in \mathfrak{h}$, on a $\text{ad}_X(N(\mathfrak{h})) \subset \mathfrak{h}$ donc $(\text{ad}_X)^{r+1}(N(\mathfrak{h})) = 0$, et en particulier $N(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_{X,0} = \mathfrak{h}$. \square

Remarque. – On peut montrer, mais nous ne le ferons pas, que toute sous-algèbre de Cartan est de cette forme.

Exemple. – Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$ et $X = \sum_{i=1}^n x_i E_{ii}$ avec les x_i tous distincts. Alors (exercice) on calcule que $\mathfrak{g}_{X,0}$ est la sous-algèbre des matrices diagonales (de trace nulle). En particulier $\mathfrak{g}_{X,0}$ est une sous-algèbre de Cartan abélienne dans ce cas.

2.5.2 Racines d'une sous-algèbre de Cartan. Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Faisons agir \mathfrak{h} sur \mathfrak{g} par la restriction à \mathfrak{h} de la représentation adjointe $(\mathfrak{g}, \text{ad})$ de \mathfrak{g} . Pour toute forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}_{\text{ab}}^*$, on a l'espace propre généralisé

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{Y \in \mathfrak{g}, \forall X \in \mathfrak{h}, (\text{ad}_X - \lambda(X))^n(Y) = 0 \text{ pour } n \geq \dim \mathfrak{g}\}.$$

LEMME. – On a $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, et pour toutes $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\text{ab}}^*$, on a $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$.

Démonstration. Puisque \mathfrak{h} est nilpotente, $(\text{ad}_X)|_{\mathfrak{h}}$ est nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$. Réciproquement, \mathfrak{h} agit par opérateurs nilpotents sur $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$. Donc si $\mathfrak{g}^0 \supsetneq \mathfrak{h}$, il existe $X \in \mathfrak{g}^0 \setminus \mathfrak{h}$ dont l'image \bar{X} dans $\mathfrak{g}^0/\mathfrak{h}$ est annihilée par \mathfrak{h} . Mais cela signifie que $[\mathfrak{h}, X] \subset \mathfrak{h}$ donc $X \in N(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$: contradiction.

La deuxième assertion découle de la formule

$$(\text{ad}_X - \lambda(X) - \mu(X))^n([Y, Z]) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\text{ad}_X - \lambda(X))^k(Y), (\text{ad}_X - \mu(X))^{n-k}(Z)],$$

laissée au lecteur. □

DÉFINITION. – Une racine de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} est un poids non nul de \mathfrak{h} dans $(\mathfrak{g}, \text{ad})$. Nous noterons Φ l'ensemble des racines.

Le théorème sur les représentations d'algèbres nilpotentes nous fournit une décomposition

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha,$$

et la proposition précédente nous dit que pour $\alpha, \beta \in \Phi$, le crochet $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta]$ est nul si $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$, est contenu dans \mathfrak{h} si $\alpha + \beta = 0$, et dans $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta \in \Phi$.

On suppose dorénavant que \mathfrak{g} est semi-simple.

On notera $\langle X, Y \rangle = B_{\text{ad}}(X, Y)$ la forme de Killing de \mathfrak{g} , qui est donc non dégénérée. Notre but est de prouver le théorème suivant :

2.5.3 THÉORÈME. – Pour \mathfrak{g} semi-simple et \mathfrak{h} sous-algèbre de Cartan, on a :

i) \mathfrak{h} est abélienne, Φ engendre \mathfrak{h}^* , et $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{h}}$ est non dégénérée, donnée par la formule

$$\langle H, H' \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H').$$

ii) Pour tout $\alpha \in \Phi$, $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1, ainsi que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.

- iii) Le K -espace vectoriel $\mathfrak{sl}_\alpha := \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(K)$. Plus précisément :
- Il existe un unique $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$,
 - Si l'on fixe $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, il existe un unique $F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$.
- Le triplet $(E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha)$ est alors un \mathfrak{sl}_2 -triplet.
- iv) Pour $\alpha, \beta \in \Phi$ et $\beta \neq -\alpha$, on a $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Exemple. - Regardons le cas de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$ et \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan des matrices diagonales. La formule $[\sum x_{ii}E_{ii}, \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}] = \sum_{i,j} (x_{ii} - x_{jj})a_{ij}E_{ij}$ montre que

$$\Phi = \{\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*, 1 \leq i \neq j \leq n\}, \text{ où } \alpha_{ij} \left(\sum_i x_{ii}E_{ii} \right) = x_{ii} - x_{jj}$$

et que $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = KE_{ij}$. De plus, $[\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}, \mathfrak{g}_{\alpha_{ji}}] = K(E_{ii} - E_{jj})$ et $(E_{ij}, E_{ii} - E_{jj}, E_{ji})$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet.

Afin de prouver le théorème, nous commençons par le résultat suivant.

2.5.4 PROPOSITION. - Pour \mathfrak{g} semi-simple et \mathfrak{h} sous-algèbre de Cartan, on a :

- i) Pour $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ telles que $\alpha + \beta \neq 0$, on a $\langle \mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta \rangle = 0$.
- ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}}$ est non dégénérée.
- iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^{-\alpha}}$ induit une dualité entre \mathfrak{g}^α et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Démonstration. i) Soit $\lambda \in \Phi \cup \{0\}$, $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}^\beta$. Alors $\text{ad}_X \text{ad}_Y(\mathfrak{g}^\lambda) \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\alpha+\beta}$ et $\lambda + \alpha + \beta \neq \lambda$. Il s'ensuit que dans une base subordonnée à la décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_\lambda \mathfrak{g}^\lambda$, la matrice de $\text{ad}_X \text{ad}_Y$ a une diagonale nulle, donc $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$.

ii) Soit $X \in \mathfrak{h}$. On a $X \in \mathfrak{g}^{\alpha, \perp}$ pour toute racine $\alpha \in \Phi$ d'après le i). Donc si $X \in \mathfrak{h}^\perp$, on a $X \in \mathfrak{g}^\perp$ et donc $X = 0$.

iii) Soit $X \in \mathfrak{g}^\alpha$. On a $X \in \mathfrak{g}^{\beta, \perp}$ pour tout poids $\beta \neq -\alpha$ d'après le i). Donc si $X \in \mathfrak{g}^{\perp - \alpha}$, on a $X \in \mathfrak{g}^\perp$ et donc $X = 0$. \square

COROLLAIRE. - Mêmes hypothèses. Alors \mathfrak{h} est abélienne et Φ engendre son dual \mathfrak{h}^* .

Démonstration. i) Soit \mathcal{V} un drapeau de \mathfrak{g} tel que $\text{ad}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V})$ (puisque \mathfrak{h} est résoluble). On a donc $\text{ad}([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) \subset \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$. Soit alors $Y \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Pour tout $X \in \mathfrak{h}$, on a $\text{ad}_X \text{ad}_Y \in \mathfrak{b}^{\text{nilp}}(\mathcal{V})$ donc $\text{tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = 0$. On a donc $Y \in \mathfrak{h}^\perp$ et par le ii) de la proposition précédente, il vient $Y = 0$. Donc $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ et \mathfrak{h} est bien abélienne.

ii) Soit Y tel que $\alpha(Y) = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Alors toutes les valeurs propres de ad_Y sont nulles, donc ad_Y est nilpotent. Comme ci-dessus, on montre que $Y \in \mathfrak{h}^\perp$ et le ii) de la proposition nous donne $Y = 0$. \square

2.5.5 PROPOSITION. - Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on a $\dim(\mathfrak{g}^\alpha) = 1$ (et donc $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$) et $\{n \in \mathbb{Z}, n\alpha \in \Phi\} = \{\pm 1\}$.

Démonstration. Soit $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ (attention, \mathfrak{g}_α est l'espace propre, qui est non nul puisque α est un poids.) On a donc $\forall H \in \mathfrak{h}$, $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$. Choisissons $F \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ tel que $\langle E_\alpha, F \rangle = 1$ et posons $H'_\alpha := [E_\alpha, F] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$. Alors pour tout $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$(*) \quad \langle H, H'_\alpha \rangle = \langle H, [E_\alpha, F] \rangle = \langle [H, E_\alpha], F \rangle = \alpha(H)\langle E_\alpha, F \rangle = \alpha(H).$$

Montrons que $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$. En effet, le corollaire ci-dessus assure l'existence de β telle que $\beta(H'_\alpha) \neq 0$. Considérons alors $W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$. Alors W est stable par ad_{E_α} et par ad_F , donc aussi par $\text{ad}_{[E_\alpha, F]} = \text{ad}_{H'_\alpha}$ et on a de plus $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_W) = \text{tr}([\text{ad}_{E_\alpha}|_W, (\text{ad}_F)|_W]) = 0$. Or $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_W) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_{\mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\beta+n\alpha)(H'_\alpha) \dim_{\mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}}$. Puisque $\beta(H'_\alpha) \neq 0$, on doit donc avoir $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$.

Montrons que $\text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \subset K.H'_\alpha$. En effet, pour tout $Y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ et tout $H \in \mathfrak{h}$, on a $\langle H, [E_\alpha, Y] \rangle = \langle [H, E_\alpha], Y \rangle = \alpha(H)\langle E_\alpha, Y \rangle$, donc, vu (*), on a $[E_\alpha, Y] = \langle E_\alpha, Y \rangle H'_\alpha$.

Posons maintenant

$$V := K.E_\alpha \oplus K.H'_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{n < 0} \mathfrak{g}^{n\alpha} \right).$$

Par construction, V est stable par ad_F , et on vient de voir qu'il est stable aussi par ad_{E_α} . Comme ci-dessus, on en déduit qu'il est stable par $\text{ad}_{H'_\alpha}$ et que $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_V) = 0$. Or, $\text{tr}((\text{ad}_{H'_\alpha})|_V) = \alpha(H'_\alpha)(1 + \sum_{n < 0} n \dim(\mathfrak{g}^{n\alpha}))$. Comme $\alpha(H'_\alpha) \neq 0$, on en déduit le théorème. \square

COROLLAIRE. – Pour $H, H' \in \mathfrak{h}$, on a $\langle H, H' \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(H)\alpha(H')$.

Démonstration. Clair puisque $\text{ad}_H \text{ad}_{H'}(\mathfrak{g}^\alpha) \subset \mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1. \square

COROLLAIRE. – Le point iii) du théorème 2.5.3 est vrai.

Démonstration. Avec les notations de la preuve précédente, on a $\text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = K.H'_\alpha$, donc $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = K.H'_\alpha$ est de dimension 1. Il existe donc un unique $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. Explicitement, on a $H_\alpha = \frac{2H'_\alpha}{\alpha(H'_\alpha)} = \frac{2H'_\alpha}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}$. Il existe maintenant un unique $F_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que $\langle E_\alpha, F_\alpha \rangle = \frac{2}{\langle H'_\alpha, H'_\alpha \rangle}$. On a alors $[E_\alpha, F_\alpha] = H_\alpha$ et le triplet $(E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha)$ est donc un \mathfrak{sl}_2 -triplet. \square

2.5.6 PROPOSITION. – Soit $\beta \in \Phi$ telle que $\beta \neq \pm\alpha$. Alors

- i) $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\beta - \beta(H_\alpha) \in \Phi$. De plus, $\{n \in \mathbb{Z}, \beta + n\alpha \in \Phi\}$ est un intervalle de \mathbb{Z} .
- ii) Si $\beta + \alpha \in \Phi$ alors $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Démonstration. Considérons $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+n\alpha}$. C'est un sous-espace de \mathfrak{g} stable par ad_{E_α} et ad_{F_α} donc une représentation de \mathfrak{sl}_α . Les poids de H_α dans $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$ sont

$$\{\beta(H_\alpha) + 2n, \text{ avec } n \text{ tel que } \mathfrak{g}_{\alpha+n\beta} \neq 0\}.$$

La théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2(K)$ nous dit que ces poids sont entiers, donc $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Elle nous dit aussi que, puisque ces poids ont multiplicité 1 et sont de même parité, $\mathfrak{g}_{\beta+\mathbb{Z}\alpha}$

est une représentation *irréductible* de \mathfrak{sl}_α , et ses poids sont aussi de la forme $\{-m, -m + 2, \dots, m - 2, m\}$. On en déduit la propriété d'intervalle du i) et aussi que $-\beta(H_\alpha)$ est un poids, puisque $\beta(H_\alpha)$ en est un. Donc $\mathfrak{g}_{\beta - \beta(H_\alpha)\alpha} \neq 0$ et $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Phi$.

ii) Supposons $\mathfrak{g}_{\beta + \alpha} \neq 0$. C'est donc l'espace de poids $\beta(H_\alpha) + 2$ pour H_α . D'après la structure connue d'une représentation irréductible de \mathfrak{sl}_2 , on a $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \text{ad}_{E_\alpha}(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{\alpha + \beta}$ car \mathfrak{g}_β est l'espace de poids $\beta(H_\alpha)$ pour H_α . \square

Nous avons maintenant achevé la preuve du théorème 2.5.3. La proposition ci-dessus a aussi la conséquence suivante :

COROLLAIRE. – Pour $\alpha \in \Phi$, on a $\Phi \cap K\alpha = \{\pm\alpha\}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\beta \in \Phi \cap K\alpha$ distincte de α et $-\alpha$. Comme $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$, on a $\beta \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\alpha$. Écrivons $\beta = \frac{n}{2}\alpha$ avec n impair. Alors puisque $-\beta \in \Phi$ la propriété d'intervalle du i) de la proposition nous assure que $\frac{1}{2}\alpha \in \Phi$. Mais d'après la proposition 2.5.5, les seuls multiples de $\frac{1}{2}\alpha$ dans Φ sont $\pm\frac{1}{2}\alpha$, d'où une contradiction, puisque $\alpha \in \Phi$. \square

2.5.7 Propriétés de rationalité de Φ . Récapitulons ce que nous avons prouvé jusqu'ici à propos de l'ensemble Φ :

- i) Φ engendre le K -espace vectoriel \mathfrak{h}^* ,
- ii) Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, on a $\Phi \cap K\alpha = \{\pm\alpha\}$
- iii) Pour deux racines β, α , on a $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ et si $\beta \neq -\alpha$ alors $\{n \in \mathbb{Z}, \beta + n\alpha \in \Phi\}$ est un intervalle contenant $-\beta(H_\alpha)$.

Posons maintenant

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} := \text{Vect}_\mathbb{Q}\{H_\alpha, \alpha \in \Phi\}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^* := \text{Vect}_\mathbb{Q}\{\alpha, \alpha \in \Phi\}$$

PROPOSITION. – Avec les notations ci-dessus,

- i) $\dim_\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_\mathbb{Q}) = \dim_\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_\mathbb{Q}^*) = \text{rk}(\mathfrak{g}) (= \dim_K(\mathfrak{h}))$,
- ii) la dualité $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \longrightarrow K$ induit une dualité $\mathfrak{h}_\mathbb{Q} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$,
- iii) la forme de Killing induit une forme rationnelle $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$,
- iv) L'extension de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est définie positive.

Démonstration. i) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ une base de \mathfrak{h}^* formée d'éléments de Φ . Alors les H_{α_i} sont une K -base de \mathfrak{h} (notons que $\langle H_{\alpha_i}, H \rangle = \frac{\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i} \rangle}{2} \alpha_i(H) = \frac{2}{\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i} \rangle} \alpha_i(H)$). Pour $\alpha \in \Phi$, écrivons $H_\alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i H_{\alpha_i}$ avec $\lambda_i \in K$. Nous devons montrer que $\lambda_i \in \mathbb{Q}, \forall i$. Soit $M \in M_r(K)$ la matrice $(\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}$. Alors M est inversible (puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée) et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ est l'unique solution du système linéaire $M \cdot \lambda = \mu_\alpha$ avec $\mu_\alpha = (\langle H_{\alpha_1}, H_\alpha \rangle, \dots, \langle H_{\alpha_r}, H_\alpha \rangle) \in K^r$. Or pour deux racines α, β on a

$$\langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(H_\alpha) \gamma(H_\beta) \in \mathbb{Z},$$

donc $M \in M_r(\mathbb{Q})$, $\mu_\alpha \in \mathbb{Q}^r$, et finalement $\lambda \in \mathbb{Q}^r$. Il s'ensuit que les H_{α_i} , $i = 1, \dots, r$ forment une \mathbb{Q} -base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$. On prouve de la même manière que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ forment une \mathbb{Q} -base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

ii) la K -dualité entre \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* envoie bien $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ dans \mathbb{Q} puisque $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour toutes $\alpha, \beta \in \Phi$. Comme $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, resp. $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, engendrent \mathfrak{h} , resp. \mathfrak{h}^* , sur K , l'accouplement est parfait.

iii) idem. On a vu que $\langle \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \rangle \subset \mathbb{Q}$ et comme $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ engendrent \mathfrak{h} , l'accouplement est non dégénéré.

iv) Comme $\langle H, H \rangle = \sum_\alpha \alpha(H)^2$, la forme bilinéaire réelle considérée est positive. Or, on sait qu'elle est non dégénérée, donc elle est aussi définie. \square

2.6 Systèmes de racines

2.6.1 DÉFINITION.— Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Un système de racines (réduit) dans V est la donnée de deux ensembles $\Phi \subset V$ et $\Phi^\vee \subset V^*$ munis d'une bijection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ tels que :

- i) Φ est fini, engendre V sur \mathbb{R} , et $0 \notin \Phi$,
- ii) $\forall \alpha \in \Phi, \alpha^\vee(\Phi) \subset \mathbb{Z}$
- iii) $\forall \alpha \in \Phi, \alpha^\vee(\alpha) = 2$ et $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ en posant $s_\alpha(v) := v - \alpha^\vee(v)\alpha$.
- iv) $\forall \alpha \in \Phi, \Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$.

La dimension de V est le "rang" du système de racines, et α^\vee est la "coracine" associée à la racine α .

Exemple. – Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie semi-simple (K alg. clos de car. nulle) et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, $\Phi \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* \subset \mathfrak{h}^*$ l'ensemble des racines et $\Phi^\vee = \{H_\alpha, \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{h}$. Alors d'après la proposition précédente,

$$(V := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*, \Phi, \Phi^\vee, \alpha \mapsto \alpha^\vee := H_\alpha)$$

est un système de racines.

Cas particulier : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$ et $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$. Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n et e_1^*, \dots, e_n^* sa base duale. Alors on peut décrire le système de racine de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ comme ceci :

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ et } V^* = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i^* \in (\mathbb{R}^n)^*, \sum_i x_i = 0 \right\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$$

avec accouplement de dualité induit par l'accouplement entre \mathbb{R}^n et $(\mathbb{R}^n)^*$, et

$$\Phi = \{\alpha_{ij} = (e_i - e_j), 1 \leq i \neq j \leq n\} \text{ et } \Phi^\vee = \{\alpha_{ij}^\vee = (e_i^* - e_j^*), 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

avec bijection évidente.

2.6.2 Groupe de Weyl. Notons que l'endomorphisme s_α de V introduit au point iii) de la définition ci-dessus est la *réflexion* d'axe $\text{Ker}(\alpha^\vee)$ et de direction $\mathbb{R}\alpha$. En d'autres termes on a

$$s_\alpha^2 = \text{id}_V, \text{Ker}(s_\alpha + \text{id}_V) = \mathbb{R}\alpha \text{ et } \text{Ker}(s_\alpha - \text{id}_V) = \text{Ker}(\alpha^\vee).$$

DÉFINITION. – *Le sous-groupe $W \subset \text{GL}(V)$ engendré par les s_α , $\alpha \in \Phi$ est appelé groupe de Weyl du système de racines.*

Par l'axiome iii) des systèmes de racines, $W\Phi \subset \Phi$. En fait, puisque Φ engendre V , le morphisme $W \rightarrow \mathfrak{S}_\Phi$ donnant l'action de W sur Φ est *injectif*. En particulier, W est fini. On sait alors construire des *produits scalaires invariants sous W* . Fixons-en un $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors la réflexion s_α est alors simplement la réflexion orthogonale d'axe α^\perp . Elle est donc de la forme

$$s_\alpha(v) = v - 2 \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Si l'on identifie V^* à V au moyen de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit que $\alpha^\vee = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$, et symétriquement que $\alpha = \frac{2}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle} \alpha^\vee$. En particulier, on voit que

$$(\Phi^\vee, \Phi, \alpha^\vee \mapsto \alpha) \text{ est un système de racines dans } V^*.$$

Exemple. – Soit Φ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a vu que la forme de Killing induit sur $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ un produit scalaire euclidien. On peut le transporter par dualité à $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Puisque $\alpha(H) = \frac{2}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} \langle H_\alpha, H \rangle$, on obtient le produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{4 \langle H_\alpha, H_\beta \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle \langle H_\beta, H_\beta \rangle}.$$

On a alors

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - \frac{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle}{2} \langle \alpha, \beta \rangle \alpha = \beta - 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

ce qui montre que s_α est la réflexion orthogonale d'axe α^\perp et donc que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est W -invariant.

Cas particulier : dans l'exemple de $\mathfrak{sl}_n(K)$ le produit scalaire obtenu est celui induit par le produit euclidien canonique sur \mathbb{R}^n . La réflexion $s_{\alpha_{ij}}$ est donc la restriction à V de la réflexion orthogonale s_{ij} de \mathbb{R}^n d'axe $H_{ij} = \{(x_k)_k, x_i = x_j\}$. On a donc $s_{ij}(e_i) = e_j$ et $s_{ij}(e_k) = e_k$ pour $k \neq i, j$. Cela identifie W au groupe symétrique \mathfrak{S}_n agissant par permutation de la base canonique.

2.6.3 Contraintes sur deux racines. Donnons-nous deux racines $\alpha, \beta \in \Phi$ non proportionnelles et non orthogonales. Quittes à remplacer α par $-\alpha$ et à échanger α et β , nous pouvons supposer que

$$\langle \alpha, \beta \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle \alpha, \alpha \rangle \leq \langle \beta, \beta \rangle.$$

On a alors les contraintes suivantes :

$$0 < \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} < 1 \quad \text{avec} \quad \alpha^\vee(\beta) = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \beta^\vee(\alpha) = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$$

qui entraînent les inégalités

$$0 < \alpha^\vee(\beta) \beta^\vee(\alpha) < 4.$$

Ceci ne laisse que trois possibilités :

- i) $\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = -1$, auquel cas $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$. et l'angle $(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3}$.
- ii) $\alpha^\vee(\beta) = -2$, $\beta^\vee(\alpha) = -1$, auquel cas $2\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$. et l'angle $(\alpha, \beta) = \frac{3\pi}{4}$.
- iii) $\alpha^\vee(\beta) = -3$, $\beta^\vee(\alpha) = -1$, auquel cas $3\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$. et l'angle $(\alpha, \beta) = \frac{5\pi}{6}$.

Exemple. – Soient $\alpha = \alpha_{ij}$, $\beta = \alpha_{kl}$ dans le système de racines de \mathfrak{sl}_n . On voit que

- $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset \Rightarrow \alpha$ et β orthogonales.
- $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1 \Rightarrow$ situation i) (même longueur, et angle $\frac{2\pi}{3}$).

Remarque. – Dès que $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ on a $\alpha + \beta \in \Phi$. En effet, on peut supposer $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$ et dans tous les cas ci-dessus, on a $\alpha + \beta = s_\beta(\alpha)$.

2.6.4 Racines simples. Fixons une forme linéaire $f \in V^*$ ne s'annulant sur aucune racine. On dit alors que α est *f-positive* (ou *positive* si pas d'ambiguïté) si $f(\alpha) > 0$. On note Φ_+ l'ensemble des racines *f-positives*. On a une partition $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$. On dit que α est *f-simple* (ou *simple* si pas d'ambiguïté), si α est positive et n'est pas somme de deux racines positives. On note Δ l'ensemble des racines simples.

Exemple. – Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$. Prenons la forme linéaire $(x_i)_i \mapsto -\sum_i i x_i$. Alors α_{ij} positive $\Leftrightarrow i < j$, et $\Delta = \{\alpha_{i, i+1}, i = 1, \dots, n-1\}$.

THÉORÈME. – Avec les notations ci-dessus, on a

- i) $\Phi_+ \subset \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$
- ii) Δ est une base de V .

Démonstration. i) par l'absurde : soit $\beta \in \Phi^+ \setminus (\sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha)$ tel que $f(\beta)$ soit minimal. Alors $\beta \notin \Delta$ donc $\beta = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_i \in \Phi_+$. Mais alors $f(\beta_i) < f(\beta)$ donc par minimalité $\beta_i \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$, puis $\beta \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$: contradiction.

ii) Par le i), Δ est génératrice. Il faut montrer qu'elle est libre. Remarquons d'abord que $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ pour toutes $\alpha, \beta \in \Delta$ distinctes. En effet si $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$, la remarque précédente nous dit que $\alpha - \beta$ est une racine. Si elle est positive alors $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ contredisant la simplicité de α , sinon c'est la simplicité de β qui est contredite.

Maintenant, soit $\sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha = 0$ une relation de dépendance linéaire. Soit

$$\Delta_+ = \{\alpha \in \Delta, \lambda_\alpha \geq 0\} \quad \text{et} \quad \Delta_- = \Delta \setminus \Delta_+.$$

Ecrivons la relation sous la forme

$$\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha \alpha = - \sum_{\beta \in \Delta_-} \lambda_\beta \beta =: v.$$

Alors $\langle v, v \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta_+, \beta \in \Delta_-} -\lambda_\alpha \lambda_\beta \langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$, donc $v = 0$. Il s'ensuit que $\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha \alpha = 0$ et donc $\sum_{\alpha \in \Delta_+} \lambda_\alpha f(\alpha) = 0$ si bien que $\lambda_\alpha = 0, \forall \alpha \in \Delta_+$ et de même $\lambda_\beta = 0, \forall \beta \in \Delta_-$. \square

Un ensemble Δ de racines f -simples pour f comme au début est appelé *base de Φ* . On peut montrer, mais nous ne le ferons pas que :

- W agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases de Φ .
- W est engendré par l'ensemble S des réflexions associées aux racines f -simples (f fixée). En fait (W, S) est un système de Coxeter.

2.6.5 THÉORÈME. – (Classification des K -algèbres de Lie semi-simples)

i) Soit \mathfrak{g} une K -algèbre de Lie semi-simple, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, Φ le système de racines de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} . Fixons une base Δ de Φ et rappelons que $\alpha^\vee(\beta) = \beta(H_\alpha)$. Alors \mathfrak{g} est engendrée par les $E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, avec pour seules relations :

(a) $[H_\alpha, H_\beta] = 0,$

(b) $[E_\alpha, F_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\alpha$

(c) $[H_\alpha, E_\beta] = \alpha^\vee(\beta) E_\beta$ et $[H_\alpha, F_\beta] = -\alpha^\vee(\beta) F_\beta,$

(d) $(\text{ad}_{E_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_\beta) = 0$ et $(\text{ad}_{F_\alpha})^{-\alpha^\vee(\beta)+1}(\mathfrak{g}_{-\beta}) = 0$

pour $\alpha, \beta \in \Delta$.

ii) Soit (V, Φ, Φ^\vee) un système de racines (réduit) et Δ une base de Φ . Alors la présentation ci-dessus définit une K -algèbre de Lie semi-simple.

iii) Les procédés décrits ci-dessus induisent une bijection

$$\{ K\text{-algèbres de Lie semi-simples} \}_{/\text{isom}} \leftrightarrow \{ \text{Systèmes de racines (réduits)} \}_{/\text{isom}}.$$

On pourra conseiller les livres de Serre, Carter ou Humphreys pour une preuve de ce résultat. Les exercices suivants donnent la partie facile de l'énoncé i).

Exercice. – Montrer que \mathfrak{g} est engendrée (en tant que K -algèbre de Lie) par les $E_\alpha, H_\alpha, F_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$.

Exercice. (Relations de Serre) – Montrer que pour $\alpha, \beta \in \Delta$ on a $(\text{ad}_{E_\alpha})^{-\beta(H_\alpha)+1}(\mathfrak{g}_\beta) = 0$ et $(\text{ad}_{F_\alpha})^{-\beta(H_\alpha)+1}(\mathfrak{g}_{-\beta}) = 0$

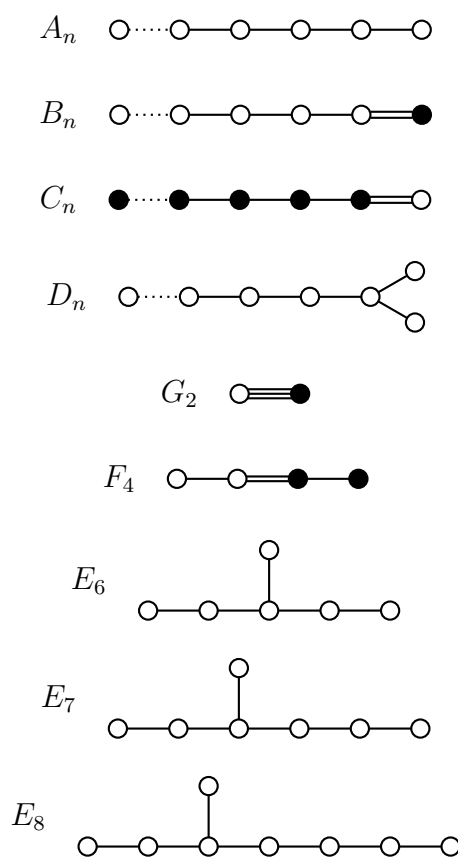
2.6.6 Diagrammes de Dynkin et classification des systèmes de racines. On comprend maintenant l'intérêt des systèmes de racines et on voudrait donc les classifier. Pour ce faire, à (Φ, Δ) on associe son *diagramme de Dynkin* qui est la donnée du graphe "décoré" suivant :

- L'ensemble des sommets du graphe est Δ .

- Si $\alpha \neq \beta \in \Delta$, on pose $n_{\alpha\beta} = \alpha^\vee(\beta)\beta^\vee(\alpha)$ ($= 1, 2$, ou 3) et on relie α et β par $n_{\alpha\beta}$ arêtes.
- Lorsque $n_{\alpha\beta} > 1$, on oriente les arêtes de la plus longue racine vers la plus courte (pour la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Alternativement, on marque les racines longues.

Le diagramme de Dynkin ne dépend pas du choix de la base Δ de Φ . En général, il a plusieurs composantes connexes, qui sont des diagrammes de Dynkin de systèmes de racines "facteurs directs" de Φ en un sens assez clair. On montre que l'algèbre de Lie semi-simple associée à Φ est *simple* si et seulement si le diagramme de Dynkin de Φ est *connexe*, auquel cas on dit que Φ est *irréductible*.

THÉORÈME. - *Tout diagramme de Dynkin connexe est de l'un des type suivants (les racines longues sont noircies) :*



Réciproquement, chacun de ces diagrammes est le diagramme de Dynkin d'un système de racines réduit "irréductible".

Les deux théorèmes de classification nous disent que les algèbres de Lie simples sont classifiées par les diagrammes de Dynkin ci-dessus. En ce qui concerne les algèbres de Lie classiques, on vérifie par calcul que $\mathfrak{sl}_n \leftrightarrow A_{n-1}$, $\mathfrak{so}_{2n+1} \leftrightarrow B_n$, $\mathfrak{sp}_{2n} \leftrightarrow C_n$, et $\mathfrak{so}_{2n} \leftrightarrow D_n$ (pour $n \geq 3$). Les autres algèbres de Lie simples (en nombre fini) sont dites "exceptionnelles".