INTRODUCTION AUX GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

LIE 1

On considère la représentation du groupe de Lie $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V := M_2(\mathbb{R})$ définie par $\rho(u,v)(M) := uMv^{-1}$ pour $u, v \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $M \in M_2(\mathbb{R})$.

(1) (a) Calculer la représentation dérivée $d\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que les représentations ρ et $d\rho$ sont irréducibles.
 (c) Calculer le noyau de ρ et celui de $d\rho$.

(2) Notons $\widetilde{M}$ la transposée de la comatrice de M.
 (a) Montrer que $b(M_1, M_2) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M_1\widetilde{M_2})$ définit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique non dégénérée sur V, qui est invariante par G.
 (b) Calculer la signature de b et en déduire que ρ induit un isomorphisme d'un quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe d'ordre 2 sur le groupe $\mathrm{SO}(2,2)^{\circ}$.

(3) On remplace maintenant G par $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ et V par l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$. À l'aide d'une représentation ρ et d'une forme bilinéaire bien choisies, montrer que le quotient de G par un certain sous-groupe d'ordre 2 est isomorphe à $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

LIE 2

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension finie.

(1) Montrer que le groupe des automorphismes $G_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ d'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ (l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$).

(2) Supposons $\mathfrak{g}$ semisimple, et soit $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ sa représentation adjointe.
 (a) Rappeler pourquoi $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \{0\}$ et montrer que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est le normalisateur de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.
 (b) Soit $\mathfrak{h}$ l'orthogonal de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ pour la forme bilinéaire $(u,v) \mapsto \mathrm{tr}(uv)$ sur $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Montrer que $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$.
 (c) Montrer que $[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = 0$ et en conclure que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.
 (d) Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie isormorphe à $\mathfrak{g}$. Montrer que G est un revêtement de G^0_{ad}.

LIE 3

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan, et Φ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}$ dans $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$. Pour une représentation (V, r) de $\mathfrak{g}$ et une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $V^{\lambda} := \{v \in V, \forall H \in \mathfrak{h}, \exists n \in \mathbb{N}, (r(H) - \lambda(H))^n v = 0\}$ le sous-espace de poids λ "généralisé" dans V et $\Pi := \{\lambda \in \mathfrak{h}^*, V^{\lambda} \neq 0\}$ l'ensemble des poids de $\mathfrak{h}$ dans V. On suppose que V est de *dimension finie*.

(1) Montrer que $\forall \alpha \in \Phi$, on a $r(\mathfrak{g}_{\alpha})V^{\lambda} \subset V^{\lambda+\alpha}$.

(2) Soit H_{α} l'unique élément de $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_{\alpha}) = 2$. Montrer que :
 (a) $r(H_{\alpha})$ est diagonalisable, de valeurs propres entières.
 (b) si $v \in V$ est un vecteur propre de $r(H_{\alpha})$ de valeur propre m *positive*, et si $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$, alors $r(X)^m v$ est *non nul*.

(3) En déduire que :
 (a) $\forall \alpha \in \Phi$, $\forall \lambda \in \Pi$, $\lambda(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}$.
 (b) $\forall \lambda \in \Pi$, $V^{\lambda} = V_{\lambda} := \{v \in V, \forall H \in \mathfrak{h}, r(H)v = \lambda(H)v\}$
 (c) $\forall \alpha \in \Phi, s_{\alpha}(\Pi) \subset \Pi$. En conclure que Π est stable sous l'action du groupe de Weyl W de Φ.