INTRODUCTION AUX GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE[1]

LIE 1

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple (de dimension quelconque).

(1) Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que l'espace de poids $V_\lambda := \{v \in V, \forall H \in \mathfrak{h}, Hv = \lambda(H)v\}$ est non nul, alors V est somme directe des sous-espaces de poids V_λ pour λ parcourant les poids de $\mathfrak{h}$ dans V

(2) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

  (a) Il existe $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $V_\lambda \neq 0$.

  (b) Pour tout $v \in V$, le sous-$\mathfrak{h}$-module de V engendré par v est de dimension finie.

  (c) Pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et tout $v \in V$, le sous-$U(H)$-module engendré par v est de dimension finie. Ici $U(H)$ désigne la sous-algèbre de $U(\mathfrak{h})$ engendrée par H.

LIE 2 Soit G un groupe de Lie et $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ sa représentation adjointe. Montrer que $|\det(\mathrm{Ad}(g))| = 1$ pour tout $g \in G$ dans les cas suivants :

(1) $\mathrm{Ad}(G)$ est compact.

(2) $\mathrm{Lie}(G)$ est semi-simple.

(3) $\mathrm{Lie}(G)$ est nilpotente et G est connexe. Donner un contre-exemple dans le cas non-connexe.

LIE 3 Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une sous-algèbre de Lie *semi-simple*. Nous allons prouver que $\mathfrak{g}$ est stable par décomposition de Jordan.

(1) Montrer que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(V)$.

(2) Soit $\mathfrak{n} := \{X \in \mathfrak{sl}(V), [X, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$. Montrer que $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$ contenant $\mathfrak{g}$ comme idéal.

(3) Montrer qu'il existe un supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{n}$ tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ (on pourra utiliser le théorème de Weyl), puis prouver qu'on a nécessairement $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] = 0$.

(4) Supposons que V est irréductible comme représentation de $\mathfrak{g}$. Expliquer pourquoi tout endomorphisme de trace nulle de V commutant à l'action de $\mathfrak{g}$ est nul. En conclure que $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$.

(5) Si V n'est pas irréductible, on pose

$$\mathfrak{n}' := \left\{X \in \mathfrak{n}, \forall W \subset V, \mathfrak{g}.W \subset W \Rightarrow (X.W \subset W \text{ et } \mathrm{tr}(X_{|W}) = 0)\right\}.$$

Montrer que $\mathfrak{n}' = \mathfrak{g}$.

(6) Soit $X \in \mathfrak{g}$ et soit $X = X_s + X_n$ sa décomposition de Jordan dans $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

  (a) Montrer que $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X_s) + \mathrm{ad}(X_n)$ est la décomposition de Jordan de $\mathrm{ad}(X)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{gl}(V))$.

  (b) En déduire que X_s et X_n appartiennent à $\mathfrak{n}$, puis montrer qu'ils sont dans $\mathfrak{g}$.

---

1. Les notes de cours sont autorisées.