Sorbonne Université
Master Mathématiques et applications

UFR de Mathématiques
2023–2024

Théorie de Galois

Partiel du 18 mars 2024. Durée 2h00.
Pas de documents autorisés.

Exercice 1. Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré 3 et soit G_f son groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$.

i. Montrer que G_f est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ (groupe symétrique) ou $\mathfrak{A}_3$ (groupe alterné).

ii. Montrer que si f a une seule racine réelle, alors G_f est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Q}_f \subset \mathbb{C}$ le sous-corps de décomposition de f dans $\mathbb{C}$, engendré par les racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de f. On identifie $G_f := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ via son action sur les α_i. Enfin, on pose $d := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)$.

i. Montrer que $d^2 \in \mathbb{Q}$.

ii. Montrer que pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ on a $\sigma(d) = \mathrm{sgn}(\sigma).d$.

iii. Montrer que $G_f \subset \mathfrak{A}_n \Leftrightarrow d \in \mathbb{Q}$, puis que $(\mathbb{Q}_f)^{G_f \cap \mathfrak{A}_n} = \mathbb{Q}(d)$.

Exercice 3. Notons $\zeta_7 := \exp(2i\pi/7) \in \mathbb{C}$.

i. Rappelez pourquoi $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ est Galoisien sur $\mathbb{Q}$ et quel est son groupe de Galois.

ii. Montrer que le corps $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/7))$ est Galoisien sur $\mathbb{Q}$. Calculer son degré et son groupe de Galois.

iii. Plus généralement, montrer que pour $n \geqslant 3$, le corps $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$ est Galoisien sur $\mathbb{Q}$, et que c'est l'intersection de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{Q}(\exp(2i\pi/n))$. Calculer son groupe de Galois et montrer qu'il est cyclique lorsque n est premier.

Exercice 4. Soit $K \supset k$ une extension finie de corps. Pour $\alpha \in K$, la multiplication par α est un endomorphisme k-linéaire de K. On note $\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha)$ sa trace, $\mathrm{N}_{K/k}(\alpha)$ son déterminant, et $\Phi_{K/k}(\alpha) \in k[X]$ son polynôme caractéristique.

i. Notons f_α le polynôme minimal de α sur k.

TSVP

(a) En calculant dans une k-base bien choisie de $k(\alpha)$, montrer que $\Phi_{k(\alpha)/k}(\alpha) = f_\alpha$.

(b) Si K/k est Galoisienne, en déduire les égalités dans K :

$$\mathrm{Tr}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = \textstyle\sum_{\beta \in \mathrm{Gal}(K/k).\alpha} \beta \text{ et } \mathrm{N}_{k(\alpha)/k}(\alpha) = \prod_{\beta \in \mathrm{Gal}(K/k).\alpha} \beta.$$

ii. À l'aide d'un choix de base de K sur $k(\alpha)$, montrer $\Phi_{K/k}(\alpha) = \Phi_{k(\alpha)/k}(\alpha)^{[K:k(\alpha)]}$, et

$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha) = [K : k(\alpha)]\mathrm{Tr}_{k(\alpha)/k}(\alpha) \text{ et } \mathrm{N}_{K/k}(\alpha) = \mathrm{N}_{k(\alpha)/k}(\alpha)^{[K:k(\alpha)]}.$$

iii. Si K/k est Galoisienne, montrer qu'on a les égalités dans K

$$\mathrm{Tr}_{K/k}(\alpha) = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} \sigma(\alpha) \text{ et } \mathrm{N}_{K/k}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)} \sigma(\alpha).$$