

# Géométrie Algébrique 2

Jean-François Dat

2009-2010

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Diviseurs et faisceaux inversibles</b>	<b>3</b>
1.1	Fonctions méromorphes et diviseurs (de Cartier) . . . . .	3
1.2	Equivalence linéaire de diviseurs et faisceaux inversibles . . . . .	8
1.3	Cycles de codimension 1 (diviseurs de Weil) . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Éclatements : définition et premières propriétés</b>	<b>15</b>
2.1	Rappels sur morphismes projectifs et faisceaux amples . . . . .	15
2.2	Éclatement d'un faisceau d'idéaux . . . . .	23
2.3	Premières applications . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Compléments sur morphismes et régularité</b>	<b>35</b>
3.1	Faisceaux conormaux. Immersions régulières. Schémas réguliers. . . . .	35
3.2	Différentielles . . . . .	44
3.3	Morphismes étales . . . . .	50
3.4	Morphismes lisses . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Désingularisation. Autour du théorème de Hironaka</b>	<b>67</b>
4.1	Le problème de la désingularisation . . . . .	67

## Prérequis, notations, rappels, compléments

**Prérequis :** Dans ce cours, on suppose le lecteur familiarisé avec le langage des schémas, comme dans le chapitre II du livre de Hartshorne, jusqu’à la section II.5. Cela sous-entend donc une bonne compréhension des faisceaux, notamment d’anneaux et de modules, et de la faisceautisation de diverses opérations basiques d’algèbre commutative (produit tensoriels, Hom). La plupart des propriétés “locales” des schémas reposent sur de l’algèbre commutative parfois (très) difficile. On ne rappellera pas les concepts de *localisation*, de *platitude*, de *dimension* (de Krull), les notions d’anneaux *noethériens*, *artinien*, *locaux*, de *valuation*, de *valuation discrète*, ou *factoriels*. Il est préférable d’avoir déjà rencontré les notions d’anneaux *intégralement clos* (normaux) et *réguliers*, sur lesquelles nous ferons quelques rappels.

**Notations :** Rappelons qu’un schéma est un *espace topologique localement annelé*  $(X, \mathcal{O}_X)$  localement isomorphe à un *schéma affine*  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ . L’espace topologique  $X$  est donc de type “spectral”, au sens où tout fermé irréductible admet un point générique. Le faisceau d’anneaux  $\mathcal{O}_X$  (intuitivement le faisceau des “fonctions régulières sur  $X$ ”) est appelé faisceau *structural*. Un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules sera simplement appelé  $\mathcal{O}_X$ -*module*. Le germe de  $\mathcal{O}_X$  en un point  $x \in X$  est un anneau local noté  $\mathcal{O}_{X,x}$ , d’idéal maximal noté  $\mathfrak{m}_{X,x}$  et de corps résiduel noté  $\kappa(x)$ . Pour simplifier les notations, un schéma sera noté simplement  $X$  et de même un schéma affine sera noté  $\text{Spec}(A)$ . On rappelle que la catégorie des schémas admet des produits fibrés, mais que l’espace topologique sous-jacent à  $X \times_Z Y$  *n’est pas* le produit fibré des espaces topologiques.

Un morphisme de schémas  $Y \rightarrow X$  est un morphisme d’espaces localement annelés et devrait toujours être noté  $(f, f^\#)$  où  $f$  est une application continue des espaces topologiques sous-jacents et  $f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$  est un morphisme de faisceaux d’anneaux sur  $Y$ , ayant la propriété que pour tout  $y \in Y$ ,  $(f^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{Y,y}) = \mathfrak{m}_{X,f(y)}$ . Cependant, nous ferons l’abus de noter un tel morphisme seulement  $f$ . On distinguera le foncteur  $f^{-1}$  qui envoie faisceaux sur  $X$  vers faisceaux sur  $Y$  et  $f^*$  qui envoie  $\mathcal{O}_X$ -modules vers  $\mathcal{O}_Y$ -modules. Bien-sûr, étant donné un  $\mathcal{O}_X$ -module  $M$ , on a la relation  $f^*(M) = f^{-1}(M) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_Y$ , le produit tensoriel devant être entendu au sens “faisceutique”.

**Rappels : faisceaux (quasi-)cohérents.** Pour un espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$ , un *faisceau quasi-cohérent* sur  $X$ , aussi appelé  *$\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent*, est un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  tel que tout point  $x \in X$  admet un voisinage  $U$  sur lequel on peut trouver une suite exacte de  $\mathcal{O}_U$ -modules

$$\mathcal{O}_U^{(I)} \rightarrow \mathcal{O}_U^{(J)} \rightarrow \mathcal{F}|_U,$$

où  $I$  et  $J$  sont deux ensembles et  $\mathcal{O}_U^{(I)}$  désigne la somme directe (faisceutique)  $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_U$ . Lorsque  $I$  peut être pris vide (d’où  $\mathcal{O}_U^{(J)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_U$ ), on dit que  $\mathcal{F}$  est *localement libre*. Lorsque  $J$  peut être pris fini, on dit que  $\mathcal{F}$  est *de type fini*. Dans ce cas, si  $I$  aussi peut être pris fini (quitte à restreindre le voisinage  $U$ ), on dit que  $\mathcal{F}$  est de *présentation finie*. Enfin, on dit que  $\mathcal{F}$  est *cohérent* si pour tout ouvert  $U$ , tout sous-faisceau de type fini

de  $\mathcal{F}|_U$  est de présentation finie. On note  $\mathrm{QCoh}(X)$ , resp.  $\mathrm{Coh}(X)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$  formée des faisceaux quasi-cohérents, resp. cohérents, sur  $X$ . La catégorie  $\mathrm{Coh}(X)$  est stable par noyau, conoyau et extensions ; elle est en particulier abélienne. Pour tout morphisme  $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ , le foncteur  $f^*$  envoie  $\mathrm{QCoh}(X)$  dans  $\mathrm{QCoh}(Y)$  et  $\mathrm{Coh}(X)$  dans  $\mathrm{Coh}(Y)$ . Noter que dans ce contexte général,  $\mathcal{O}_X$  est évidemment quasi-cohérent, mais pas nécessairement cohérent ! S'il est cohérent, alors un  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$  est cohérent si et seulement s'il est de présentation finie.

Exemple : lorsque  $X$  est un point, on retrouve des notions usuelles d'algèbre (commutative). L'anneau  $\overline{\mathbb{Z}}_p$  (clôture intégrale de  $\mathbb{Z}_p$  dans une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ ) est un exemple d'anneau cohérent non noethérien, et néanmoins utile.

L'anneau  $k[X_i]_{i \in \mathbb{N}}$  en est un autre

Dans le cas des schémas, ces catégories ont de bonnes propriétés. Si  $X$  est un schéma,  $\mathrm{QCoh}(X)$  est stable par noyaux, conoyaux et extensions ; c'est en particulier une catégorie abélienne. Pour un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  séparé et quasi-compact, le foncteur image directe  $f_*$  envoie  $\mathrm{Qcoh}(Y)$  dans  $\mathrm{Qcoh}(X)$ , cf [EGA1, 9.2]. Si  $X$  est de plus *noethérien*, alors  $\mathcal{O}_X$  est cohérent, et  $\mathrm{Coh}(X)$  est la plus petite sous-catégorie essentiellement pleine de  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$  contenant les faisceaux localement libres de rang fini, et stable par sommes directes, noyaux, conoyaux et extensions.

Ces propriétés résultent du résultat fondamental suivant, dans le cas affine. *Pour  $X = \mathrm{Spec}(A)$ , le foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$  induit une équivalence de catégories de  $\mathrm{QCoh}(X)$  sur  $A\text{-Mod}$ . Si de plus  $A$  est noethérien, cette équivalence envoie les faisceaux cohérents sur les modules de type fini.* Une équivalence inverse est donnée de la manière suivante. À un  $A$ -module  $M$ , on associe le faisceau  $\widetilde{M}$  associé au préfaisceau  $U \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ . Si l'ouvert  $U$  est "principal", *i.e.* de la forme  $D_f$  pour  $f \in A$ , on montre que  $\Gamma(U, \widetilde{M}) = M \otimes_A \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) = M \otimes_A A_{(f)} = M_{(f)}$  (localisé de  $M$  en la partie multiplicative engendrée par  $f$ ). Cf. [Hartshorne II.5].

Vu le caractère local de la notion de (quasi-)cohérence, un faisceau sur un schéma  $X$  est (quasi-)cohérent si et seulement si il existe un recouvrement affine  $X = \bigcup_i U_i$  tel que  $\mathcal{F}|_{U_i}$  soit quasi-cohérent sur  $U_i$ . Pour un schéma sur lequel on dispose d'un recouvrement affine explicite, on peut parfois déduire du cas affine une description des faisceaux cohérents. Exemple : sur  $\mathbb{P}_k^1 = \mathrm{Spec}(k[T]) \cup \mathrm{Spec}(k[T^{-1}])$ , un faisceau cohérent est donnée par un  $K[T]$ -module  $M_+$ , un  $K[T^{-1}]$ -module  $M_-$  et une donnée de recollement, *i.e.* un isomorphisme de  $K[T, T^{-1}]$ -modules  $M_+ \otimes_{K[T]} K[T, T^{-1}] \xrightarrow{\sim} M_- \otimes_{K[T^{-1}]} K[T, T^{-1}]$ .

Pour les variétés projectives, et plus généralement les spectres homogènes d'anneaux gradués, on verra plus tard qu'il existe une description des modules cohérents en termes de modules gradués.

## 1 Diviseurs et faisceaux inversibles

### 1.1 Fonctions méromorphes et diviseurs (de Cartier)

**1.1.1 Anneau total des fractions.** On dit qu'un élément  $f$  d'un anneau  $A$  est *régulier* s'il n'est pas diviseur de 0. Notons  $S_A$  l'ensemble des éléments réguliers de  $A$ . C'est une

“partie multiplicative” de  $A$ . Posons alors  $Q(A) := S_A^{-1}A$  la localisation de  $A$  relativement à  $S_A$ . On l’appelle l’anneau total des fractions de  $A$ .

Le morphisme canonique  $A \longrightarrow Q(A)$  est toujours injectif.

*Exemples :*

- si  $A$  est intègre,  $S_A = A \setminus \{0\}$  et  $Q(A)$  est le corps des fractions de  $A$ .
- si  $A$  est noethérien,  $Q(A)$  est artinien, donc produit fini d’anneaux locaux artiniens. Ses idéaux maximaux correspondent aux idéaux premiers minimaux de  $A$ , c-à-d aux points génériques des composantes irréductibles de  $\text{Spec}(A)$ . Si  $A$  est de plus réduit,  $Q(A)$  est aussi réduit, donc est un produit de corps.
- Si  $A$  est un anneau Artinien, on a  $S_A = A^\times$  et  $Q(A) = A$ .
- $Q(A \times B) = Q(A) \times Q(B)$ .

**1.1.2 Faisceau des fonctions méromorphes.** Soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{O}_X$  son anneau structural. Le préfaisceau  $U \mapsto S_{\mathcal{O}_X(U)}$  est en fait un faisceau. Cela vient du fait qu’une section  $f$  de  $\mathcal{O}_X(U)$  est régulière si et seulement si pour tout  $x \in U$ , le germe  $f_x$  est régulier dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ . (Se rappeler que le morphisme  $A \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}}$  est fidèlement plat et que  $f$  régulier équivaut à l’injectivité de la multiplication par  $f$ ).

Le préfaisceau  $U \mapsto Q(\mathcal{O}_X(U))$  n’est pas toujours un faisceau et on note  $\mathcal{M}_X$  le faisceau associé. On l’appelle *faisceau des fonctions méromorphes* sur  $X$ . C’est un faisceau d’anneaux muni d’un morphisme injectif

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{M}_X$$

Par construction, la restriction de  $\mathcal{M}_X$  à un ouvert  $U$  de  $X$  coïncide avec  $\mathcal{M}_U$ , et la fibre  $\mathcal{M}_{X,x}$  de  $\mathcal{M}_X$  en un point  $x$  coïncide avec  $Q(\mathcal{O}_{X,x})$ .

*Exemples :*

- Si  $X$  est intègre,  $\mathcal{M}_X$  est le faisceau constant de fibres le corps de fonctions  $\kappa(x)$  au point générique de  $X$ .

**1.1.3 Fonctions méromorphes et domaines de définition.** On note  $\mathcal{M}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$  et on l’appelle l’anneau des fonctions méromorphes sur  $X$ . Soit  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Il existe un plus grand ouvert (non vide)  $U$  tel que  $f|_U \in \mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{M}_X(U)$ . On appelle cet ouvert le *domaine de définition* de  $f$  et on le note  $\text{dom}(f)$ .

*Exemples :*

- Si  $X = \text{Spec}(A)$  avec  $A$  noethérien, alors  $\mathcal{M}(A) = Q(A)$ . Lorsque  $A$  est intègre c’est clair puisque  $\mathcal{M}_X$  est constant. On trouvera une preuve du cas plus général dans EGA IV (20.2.11) (ii).
- Si  $X$  est intègre,  $\mathcal{M}(X)$  est le corps résiduel en le point générique de  $X$  (cf ci-dessus). En particulier si  $X = \mathbb{P}_k^1$  avec  $k$  un corps,  $\mathcal{M}(X)$  est un corps de fonctions  $k(T)$ , beaucoup plus gros que  $Q(\mathcal{O}_X(X)) = k$ , ceci illustrant le fait que  $U \mapsto Q(\mathcal{O}_X(U))$  n’est pas un faisceau.

*Remarque : functorialité.* On ne peut pas s’attendre à une functorialité générale de  $\mathcal{M}(X)$  et  $\mathcal{M}_X$  pour les morphismes  $Y \xrightarrow{f} X$  (penser au cas où  $Y$  est un point de  $X$  :

certaines fonctions méromorphes ne seront pas définies sur  $Y$ ). Cependant, si  $f$  est *plat*, on construit en se ramenant au cas affine un morphisme  $f^*\mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_Y$  injectif qui prolonge l'isomorphisme tautologique  $f^*\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y$ . En effet, si l'anneau  $B$  est plat sur  $A$ , alors tout élément régulier de  $A$  est régulier dans  $B$ , d'où un morphisme  $Q(A) = S_A^{-1}A \rightarrow Q(A) \otimes_A B = S_A^{-1}B \hookrightarrow Q(B)$ . En particulier on a un pull-back  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$  des fonctions méromorphes dans le cas plat. Si l'on suppose de plus  $f$  *fidèlement plat*, ce pull-back est injectif.

**1.1.4 DÉFINITION.**— Soit  $X$  un schéma. Un diviseur sur  $X$  est une section globale du faisceau  $\mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$ . Il est dit effectif si c'est une section globale du sous-faisceau  $(\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times)/\mathcal{O}_X^\times$ . On note

$$\text{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)$$

l'ensemble des diviseurs sur  $X$ , et

$$\text{Div}^+(X) := \Gamma(X, (\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^\times)/\mathcal{O}_X^\times)$$

le sous-ensemble des diviseurs effectifs sur  $X$ .

[Concrètement un diviseur  $D$  est donné par un recouvrement  $X = \bigcup_i U_i$  et des fonctions méromorphes  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$  telles que pour tous  $i, j$ , on ait  $(f_i f_j)^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)^\times$ .]

Le groupe  $\text{Div}(X)$  un groupe abélien et, par définition, vient avec un morphisme de groupes

$$\mathcal{M}(X)^\times \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(X).$$

Cependant,  $\text{Div}(X)$  est traditionnellement noté de manière additive. On a donc par exemple  $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$ . De plus,

$$\forall f, g \in \mathcal{M}(X), \text{div}(f) = \text{div}(g) \Leftrightarrow fg^{-1} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times).$$

Le sous-ensemble  $\text{Div}^+(X)$  est un sous-monoïde de  $\text{Div}(X)$  qui vérifie  $\text{Div}^+(X) \cap (-\text{Div}^+(X)) = \{0\}$ . La relation  $\leq$  sur  $\text{Div}(X)$  définie par

$$D \leq D' \Leftrightarrow (D' - D) \in \text{Div}^+(X)$$

fait donc de  $\text{Div}(X)$  un groupe (partiellement) ordonné.

**1.1.5 Rappel sur les idéaux inversibles.** Soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module. On dit que  $\mathcal{L}$  est *localement libre de rang 1* si tout point admet un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U$ .

Par ailleurs, on définit le  $\mathcal{O}_X$ -module dual comme le faisceau  $\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) : U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{L}|_U, \mathcal{O}_U)$ . On a alors un morphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -modules

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

On dit que  $\mathcal{L}$  est *inversible* si  $\mathcal{L}$  est quasi-cohérent et si ce morphisme est un isomorphisme.

On montre que  $\mathcal{L}$  est inversible si et seulement si il est localement libre de rang 1.

**1.1.6 DÉFINITION.**— Un idéal fractionnaire inversible de  $\mathcal{M}_X$  est un sous- $\mathcal{O}_X$ -module de  $\mathcal{M}_X$  qui est inversible en tant que  $\mathcal{O}_X$ -module.

*Remarque :* on rappelle qu'on a inclus la condition “quasi-cohérent” dans la définition d’inversible. Si  $X = \text{Spec}(A)$ , un idéal fractionnaire inversible de  $\mathcal{M}_X$  s’identifie à un idéal fractionnaire de  $Q(A)$ , inversible en tant que  $A$ -module (on dit aussi “projectif de rang 1”). Rappelons qu’un tel idéal fractionnaire n’est pas nécessairement principal, mais seulement “localement principal”.

**1.1.7 PROPOSITION.**— Un sous- $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{M}_X$  est inversible si et seulement si tout point admet un voisinage ouvert  $U$  tel que  $\mathcal{J}|_U = \mathcal{O}_U f$  pour une fonction méromorphe  $f \in \mathcal{M}(U)^\times = \Gamma(U, \mathcal{M}_X^\times)$ .

*Démonstration.* Prenons  $U$  tel qu’il existe un isomorphisme  $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}|_U$ . L’image  $f$  de la section unité 1 dans  $\mathcal{M}(U)^\times$  fait l’affaire.  $\square$

**1.1.8 COROLLAIRE.**— Avec les notations de la proposition précédente,

- i) l’inverse  $\mathcal{J}^\vee$  d’un idéal fractionnaire inversible s’identifie canoniquement à l’unique idéal fractionnaire  $\mathcal{J}^{-1}$  défini par la condition que pour tout ouvert  $U$ , si  $\mathcal{J}|_U = f\mathcal{O}_U$  alors  $\mathcal{J}^{-1} = f^{-1}\mathcal{O}_U$ .
- ii) le produit  $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$  de deux idéaux fractionnaires inversibles est encore un idéal fractionnaire inversible et l’application canonique  $\mathcal{J}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J}_2 \longrightarrow \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$  est un isomorphisme.

En particulier, l’ensemble  $\text{Id.Fr.Inv}(X)$  des idéaux fractionnaires inversibles de  $\mathcal{M}_X$  est un groupe abélien. De même l’ensemble  $\text{Id.Inv}(X)$  des idéaux inversibles de  $\mathcal{O}_X$  est un sous-monoïde commutatif du précédent.

**1.1.9 Remarque.** Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible. Une section  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  s’identifie à un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi_s} \mathcal{L}$  et par suite à un morphisme  $\mathcal{L}^\vee \xrightarrow{\varphi_s^\vee} \mathcal{O}_X$ . Une telle section  $s$  est dite *régulière* si  $\varphi_s$  est injectif. Dans ce cas  $\varphi_s^\vee$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{L}^\vee$  sur un idéal (inversible) de  $\mathcal{O}_X$ . On vérifie facilement que ce procédé induit une bijection

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d’isom. de paires } (\mathcal{L}, s) \\ \text{avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible et} \\ s \text{ section régulière de } \mathcal{L} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Id.Inv}(X)$$

où un isomorphisme entre  $(\mathcal{L}, s)$  et  $(\mathcal{L}', s')$  est un isomorphisme  $\alpha : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$  tel que  $\varphi_{s'} \circ \alpha = \varphi_s$ . La loi de composition sur le terme de droite provient bien-sûr du produit tensoriel  $(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}', s \otimes s')$ .

On définit une *section méromorphe* de  $\mathcal{L}$  comme une section du faisceau  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}_X$ , et on dit qu’une telle section est *régulière* si le morphisme  $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}_X$  qui s’en déduit

est injectif. De même que ci-dessus on a une bijection naturelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'isom. de paires } (\mathcal{L}, s) \\ \text{avec } \mathcal{L} \text{ faisceau inversible et} \\ s \text{ section méromorphe régulière de } \mathcal{L} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Id.Fr.Inv}(X)$$

**1.1.10** On définit un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \text{Div}(X) &\rightarrow \text{Id.Fr.Inv}(X) \\ D &\mapsto \mathcal{I}_X(D) \end{aligned}$$

de la façon suivante. Soit  $D$  un élément de  $\text{Div}(X)$  défini par un recouvrement  $X = \bigcup_i U_i$  et des fonctions méromorphes  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$ . Pour tous  $i, j$ , la condition  $(f_i f_j)^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)^\times$  montre l'égalité  $f_i \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} = f_j \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$  de sous-faisceaux de  $\mathcal{M}_{U_i \cap U_j}$ . Il s'ensuit que les sous-faisceaux  $f_i \mathcal{O}_{U_i}$  des  $\mathcal{M}_{U_i}$  se recollent en un sous-faisceau  $\mathcal{I}_X(D)$  de  $\mathcal{M}_X$  qui par construction est un idéal fractionnaire inversible.

**1.1.11** PROPOSITION.— *Le morphisme ci-dessus est un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\text{Div}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Id.Fr.Inv}(X).$$

*Il envoie les diviseurs effectifs sur les idéaux inversibles de  $\mathcal{O}_X$  et se restreint donc en un isomorphisme de monoïdes*

$$\text{Div}^+(X) \xrightarrow{\sim} \text{Id.Inv}(X).$$

*Démonstration.* Il suffit de construire la bijection réciproque. Or, étant donné un idéal fractionnaire inversible  $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_X$ , choisissons un recouvrement ouvert  $X = \bigcup_i U_i$  et des fonctions méromorphes  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$  tels que  $\mathcal{J}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} f_i$ . Alors pour tous  $i, j$  l'égalité  $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_i = \mathcal{O}_{U_i \cap U_j} f_j$  nous dit que  $f_i f_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$ . La donnée du recouvrement et des  $f_i$  définit donc une section de  $\mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times$ .  $\square$

Dans le langage de 1.1.9, le diviseur  $D$  est envoyé sur la paire  $(\mathcal{O}_X(D), s_D)$  où l'on pose  $\mathcal{O}_X(D) := \mathcal{I}_X(D)^\vee$  et  $s_D$  la section méromorphe définie par le morphisme de  $\mathcal{M}_X$ -modules  $\mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$  dual de  $\mathcal{I}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$  induit par l'inclusion de  $\mathcal{I}_X(D)$  dans  $\mathcal{M}_X$ .

On a alors des isomorphismes canoniques  $\mathcal{O}_X(D+D') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D')$  transportant  $s_{D+D'}$  sur  $s_D \otimes s_{D'}$ .

**1.1.12** *Sous-schéma associé à un diviseur effectif.* Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ . L'idéal fractionnaire  $\mathcal{I}_X(D)$  associé étant un idéal (ordinaire) de  $\mathcal{O}_X$ , il définit un sous-schéma fermé  $Y(D)$  de  $X$ . Localement, ce sous-schéma est défini par une seule équation, et celle-ci est régulière. On dit que l'immersion de  $Y(D)$  dans  $X$  est *régulière et de codimension 1* (on verra plus tard la définition d'une immersion régulière générale). On a donc une bijection

$$\text{Div}^+(X) \xrightarrow{\sim} \{\text{Sous-schémas fermés régulièrement immergés de codimension 1 de } X\}.$$

On fera parfois l'abus d'appeler un tel sous-schéma un "diviseur".

## 1.2 Equivalence linéaire de diviseurs et faisceaux inversibles

**1.2.1** *Le groupe de Picard.* Soit  $X$  un schéma. On note  $\text{Pic}(X)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles. Le produit tensoriel munit  $\text{Pic}(X)$  d'une structure de groupe abélien. On a un morphisme de groupes

$$l : \text{Div}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Id.Fr.Inv}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$$

qui consiste à envoyer un idéal fractionnaire inversible sur la classe d'isomorphisme (en tant que faisceau inversible) de *son inverse*. Dans le langage de la remarque 1.1.9, ce morphisme consiste en l'oubli de la section  $s$ .

**1.2.2** *Interprétation cohomologique.* On a un isomorphisme canonique

$$\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \text{ (cohomologie de Čech),}$$

qui est essentiellement tautologique, quand on a l'habitude. Concrètement, celui-ci peut s'expliquer comme suit. Fixons un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  et choisissons un recouvrement  $X = \bigcup_i U_i$  et des isomorphismes  $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$ . Pour tous  $i, j$ , on a donc une fonction  $f_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$  qui satisfait la condition de cocycle  $f_{jk}f_{ij} = f_{ik}$  pour tous  $i, j, k$ . Elle définit donc un 1-cocycle et par suite une classe de cohomologie dans  $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ . Réciproquement, étant donnée une telle classe, représentons-la par un 1-cocycle de Čech  $((U_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i, j \in I})$  avec  $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^\times)$ . Ainsi  $f_{ij}$  définit un isomorphisme  $(\mathcal{O}_{U_i})|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{U_j})|_{U_i \cap U_j}$  et la condition de cocycle permet de recoller ces faisceaux en un  $\mathcal{O}_X$ -module, nécessairement inversible.

Rappelons qu'il y a pour tout  $i$  et tout faisceau abélien  $\mathcal{F}$  une application canonique  $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$  ( $i$ -ème foncteur dérivé de  $\Gamma(X, -)$ ), et que cette application est un isomorphisme si  $i = 1$  (cf Hartshorne, ex. III.4.4). Considérons alors la suite exacte de faisceaux

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 1.$$

Elle donne naissance à une suite exacte longue de cohomologie

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^\times)$$

qui compte tenu des notations déjà introduites se réécrit

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)^\times \longrightarrow \text{Div}(X) \xrightarrow{\delta} \text{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_X^\times).$$

On pourra faire l'exercice de vérifier que le morphisme  $\delta$  ci-dessus est le même que celui noté  $l$  au paragraphe précédent.



**1.2.3 DÉFINITION.**— On dit qu'un diviseur  $D$  sur  $X$  est principal s'il est de la forme  $\text{div}(f)$  pour  $f \in \mathcal{M}(X)$  une fonction méromorphe. On dit que deux diviseurs  $D_1, D_2$  sont linéairement équivalents si  $D_1 - D_2$  est un diviseur principal.

*Remarque :* le diviseur  $D$  est principal si et seulement si l'idéal fractionnaire inversible associé  $\mathcal{I}_X(D) \subset \mathcal{M}_X$  est de la forme  $f\mathcal{O}_X$  pour une section globale régulière  $f$  de  $\mathcal{M}_X$ . La terminologie "principal" est donc compatible avec celle, habituelle, des idéaux d'un anneau.

Il résulte de la discussion précédente que l'application  $\text{div}$  induit un isomorphisme

$$\mathcal{M}(X)^\times / \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Div.Pr}(X)$$

et l'application  $l$  induit un morphisme injectif

$$\text{Div}(X) / \text{Div.Pr}(X) \hookrightarrow \text{Pic}(X).$$

Remarquons que dans le cas où  $X$  est intègre, le faisceau constant  $\mathcal{M}_X$  est flasque. On a donc  $H^1(X, \mathcal{M}_X^\times) = 0$  et par conséquent, le morphisme ci-dessus est *bijectif*. Sans hypothèse d'intégrité, on a :

**1.2.4 THÉORÈME.**— Soit  $X$  un schéma quasi-projectif sur un anneau noethérien. Alors le morphisme  $l$  est surjectif, et induit donc un isomorphisme

$$\text{Div}(X) / \text{Div.Pr}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X).$$

*Démonstration.* Cf EGA IV (21.3.5). Le problème est, étant donné un faisceau inversible  $\mathcal{L}$ , de lui trouver une section méromorphe régulière, *i.e.* une section régulière de  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ . Dans le cas affine  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $\mathcal{L}$  correspond à un  $A$ -module inversible  $L$  et  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$  au  $Q(A)$ -module inversible  $L \otimes_A Q(A)$ . Or  $Q(A)$  est artinien, et sur un tel anneau tout module projectif de rang 1 est libre. Ainsi tout isomorphisme  $Q(A) \xrightarrow{\sim} L \otimes_A Q(A)$  fournit la section voulue.

Le cas général se ramène au cas affine. C'est l'occasion d'introduire la notion d'*ouvert schématiquement dense* d'un schéma. Soit  $U$  un ouvert d'un schéma  $X$ . On dit que  $U$  est *schématiquement dense* dans  $X$  si l'une des deux propriétés équivalentes est vérifiée :

- i) Pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , la restriction  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_V)$  est injective.
- ii) Pour tout schéma séparé  $Y$  et tout ouvert  $V$ , la restriction  $\text{Hom}(V, Y) \longrightarrow \text{Hom}(V \cap U, Y)$  est injective.

On vérifie facilement qu'un tel ouvert est alors (topologiquement) dense. La réciproque est vraie lorsque  $X$  est *réduit*. En fait si  $X = \text{Spec}(A)$ , on voit qu'un ouvert principal  $D_f$  est schématiquement dense si et seulement si la localisation par  $f$  est injective donc si et seulement si  $f$  est régulière. Ceci amène à considérer les *idéaux associés* de  $A$ , *i.e.* les idéaux premiers qui sont annulateur d'un élément de  $A$ . Si  $A$  est noethérien, l'ensemble  $\text{Ass}(A)$  de ces idéaux est fini. De plus la réunion des idéaux associés est exactement le complémentaire de l'ensemble des éléments réguliers. On montre alors aisément qu'un ouvert  $U$  de  $\text{Spec}(A)$

est schématiquement dense si et seulement si il contient  $\text{Ass}(A)$ . Lorsque  $A$  est réduit, les idéaux associés correspondent aux points génériques des composantes irréductibles, on voit donc que dense=schématiquement dense.

Voici un exemple d'ouvert dense non schématiquement dense. Soit  $A$  un anneau noethérien et  $x$  un point fermé de  $\text{Spec}(A)$  d'idéal  $\mathfrak{m}$ . Formons l'anneau  $A' := A \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  muni de la multiplication  $(a, m)(a', m') = (aa', am' + a'm)$ . Le morphisme évident  $A' \rightarrow A$  induit un homéomorphisme de  $\text{Spec}(A)$  sur  $\text{Spec}(A')$ . Maintenant, tout élément  $m$  de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  fournit une section non nulle de  $\Gamma(\text{Spec}(A'), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A')}) = A$  qui est nulle sur l'ouvert  $U = \text{Spec}(A') \setminus \{x\}$ , lequel n'est donc pas schématiquement dense. Par exemple, prenons  $A = k[T]$  avec  $k$  un corps et  $x$  le point défini par  $T = 0$ . L'anneau  $A'$  est alors isomorphe à  $k[T, U]/(U^2, TU)$ . On dit que  $x$  est un point *immergé* de  $\text{Spec}(A')$ . Ainsi  $\text{Spec}(A')$  est une droite affine "épaissie en l'origine".

Sur un schéma  $X$  plus général, le complémentaire d'un diviseur est toujours schématiquement dense. Si  $X$  est un schéma noethérien, on note  $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$  l'ensemble fini des points  $x$  tels que l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_x$  de  $\mathcal{O}_{X,x}$  ne contienne que des diviseurs de zéro. En se ramenant au cas affine, on montre (cf EGA IV.3.1.8.) qu'un ouvert  $U$  est schématiquement dense dans  $X$  si et seulement si il contient  $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ .

Revenons au théorème. Dans le cas où  $X$  est comme dans l'énoncé, on sait que tout ensemble fini est contenu dans un ouvert affine (obtenu comme complémentaire d'une section hyperplane). Cela s'applique à  $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ , d'où l'existence d'un ouvert affine  $U$  schématiquement dense. D'après le cas affine déjà traité, il existe une section régulière  $s_U \in \Gamma(U, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X)$ . Soit alors  $V$  un ouvert affine tel que  $\mathcal{L}|_V \simeq \mathcal{O}_V$ . Choisissons un tel isomorphisme. La section  $(s_U)|_{U \cap V}$  correspond à une fonction méromorphe  $f_{UV} \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{M}_X^\times)$ . Comme  $U \cap V$  est schématiquement dense dans  $V$ , la restriction  $\mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{M}(U \cap V)$  est bijective. On peut donc prolonger de manière unique  $f_{UV}$  en  $f_V \in \mathcal{M}(V)^\times$ , laquelle correspond à une section méromorphe régulière  $s_V$  de  $\mathcal{L}|_V$ . En recouvrant  $X$  par des  $V$  comme ci-dessus, on peut alors recoller les  $s_V$  en une section méromorphe régulière de  $\mathcal{L}$ .  $\square$

**1.2.5 Functorialité.** Pour un morphisme  $Y \xrightarrow{f} X$ , l'image réciproque  $f^*\mathcal{L}$  d'un faisceau inversible est encore un faisceau inversible, d'où un morphisme  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ . Par contre l'image réciproque d'un diviseur n'est pas toujours définie (penser au cas où  $f$  est l'immersion fermée d'un point).

**1.2.6 PROPOSITION.**— On a un morphisme "image réciproque"  $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Div}(Y)$  dans les deux situations suivantes :

- i)  $f$  est plat
- ii)  $X$  et  $Y$  sont intègres et  $f(X)$  contient un ouvert. Cas particuliers :  $f$  birationnel (i.e induit un isomorphisme d'un ouvert de  $X$  sur un ouvert de  $Y$ ) et  $f$  morphisme dominant de variétés sur un corps.

*Démonstration.* i) Soit  $D$  un diviseur, vu comme un idéal fractionnaire  $\mathcal{J} \hookrightarrow \mathcal{M}_X$ . Puisque  $f$  est plat, on a  $f^*\mathcal{J} \hookrightarrow f^*\mathcal{M}_X$ , ainsi qu'un morphisme injectif  $f^*\mathcal{M}_X \hookrightarrow \mathcal{M}_Y$ , cf remarque 1.1.3. Ainsi  $f^*\mathcal{J}$  est un idéal fractionnaire de  $\mathcal{M}_Y$  et définit un diviseur  $f^*(D)$  sur  $Y$ .

ii) Par hypothèse, l'image de  $f$  contient un ouvert dense  $U$  de  $X$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{M}(X)$ . Il existe un ouvert  $U_\varphi \subset U$  tel que  $\varphi|_{U_\varphi} \in \mathcal{O}_X(U_\varphi)$ . Donc  $f^*(\varphi|_{U_\varphi}) \in \mathcal{O}_Y(f^{-1}(U_\varphi)) \subset \mathcal{M}(U_\varphi) = \mathcal{M}(Y)$ . On a ainsi défini un pull-back  $\mathcal{M}(X) \xrightarrow{f^*} \mathcal{M}(Y)$ . Soit maintenant  $D$  un diviseur donnée par un recouvrement  $X = \bigcup_i U_i$  et  $\varphi_i \in \mathcal{M}(X)^*$ . Le recouvrement image réciproque  $Y = \bigcup_i f^{-1}(U_i)$  et les  $f^*(\varphi_i)$  définissent un diviseur  $f^*D$  sur  $Y$ .  $\square$

### 1.3 Cycles de codimension 1 (diviseurs de Weil)

**1.3.1 Cycles.** Soit  $X$  un schéma noethérien. Un cycle dans  $X$  est un sous-ensemble fermé *irréductible* de l'espace sous-jacent à  $X$ . Les cycles sont donc en bijection avec les points de  $X$  (à un cycle on associe son point générique, à un point  $x$  on associe l'adhérence  $\{x\}$ ). Un cycle  $\{x\}$  est dit *de codimension  $P$*  si  $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = p$ .

On note  $\mathfrak{Z}(X)$ , resp.  $\mathfrak{Z}^1(X)$ , le groupe abélien libre de base les cycles, resp les cycles de codimension 1, de  $X$ .

Si  $X = \text{Spec}(A)$ , un cycle de codimension 1 correspond à un idéal premier de hauteur 1.

**1.3.2** On veut définir un morphisme  $\text{Div}(X) \longrightarrow \mathfrak{Z}^1(X)$ . On commence par définir

$$\text{Div}^+(X) \longrightarrow \mathfrak{Z}^1(X)$$

en envoyant un diviseur effectif  $D$  sur l'élément

$$\text{cyc}(D) := \sum_{x \in X^1} \text{long}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y(D),x})[x].$$

Notons que, puisque  $Y(D)$  est de codimension 1, un point  $x \in X^1 \cap Y(D)$  est un point générique d'une composante irréductible de (l'espace sous-jacent de)  $Y(D)$ . La somme ci-dessus est donc bien finie. De plus, pour un tel point générique, l'anneau local  $\mathcal{O}_{Y(D),x}$  est artinien et la longueur dans la formule ci-dessus n'est autre que sa longueur en tant qu'anneau artinien.

Vérifions qu'on a bien  $\text{cyc}(D + D') = \text{cyc}(D) + \text{cyc}(D')$ . Si  $f$ , resp.  $f'$  est une équation locale de  $Y(D)$ , resp.  $Y(D')$  autour de  $x$ , il s'agit de montrer que  $\text{long}(\mathcal{O}_{X,x}/(f)) + \text{long}(\mathcal{O}_{X,x}/(f')) = \text{long}(\mathcal{O}_{X,x}/(ff'))$ , ce qui résulte de la suite

$$\mathcal{O}_{X,x}/(f) \xrightarrow{\times f'} \mathcal{O}_{X,x}/(ff') \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/(f')$$

qui est exacte car  $f'$  est un élément régulier.

**1.3.3 PROPOSITION.**— *Le morphisme ci-dessus s'étend canoniquement en un morphisme  $\text{Div}(X) \longrightarrow \mathfrak{Z}^1(X)$ .*

*Démonstration.* Le résultat est clair lorsqu'on sait que  $\text{Div}^+(X)$  engendre le groupe  $\text{Div}(X)$ . Ceci est le cas pour  $X$  intègre affine. En effet, un diviseur  $D$  est donné par un recouvrement

fini  $X = \bigcup_i U_i$  et des fonctions méromorphes  $f_i \in \mathcal{M}(U_i) = \mathcal{M}(X)$ . On peut alors trouver une fonction  $f$  telles que  $ff_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$  et  $D = D' - \text{div}(f)$  est une différence de diviseurs effectifs.

En général, il suffit de prolonger les applications  $D \mapsto \text{mult}_x(D) := \text{long}(\mathcal{O}_{Y(D),x})$  pour  $x \in X^1$ . Or, on peut trouver un voisinage ouvert affine  $U$  de  $x$  et une fonction méromorphe  $f_U \in \mathcal{M}(U)$  tels que  $D|_U = \text{div}(f_U)$ . Or par définition  $f_U = f_{U,+} f_{U,-}^{-1}$  pour des fonctions régulières  $f_{U,\pm} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ . On pose alors  $\text{mult}_x(D) := \text{mult}_x(\text{div}(f_{U,+})) - \text{mult}_x(\text{div}(f_{U,-}))$ .  $\square$

**1.3.4 Remarque.** Supposons que  $X$  est intègre et soit  $x$  un point *régulier* de codimension 1. Alors  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau de valuation discrète. Notons  $v_x : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  la valuation du corps  $\mathcal{M}(X)$  associée. Alors si  $D$  est localement de la forme  $\text{div}(f)$  autour de  $x$ , on a  $\text{mult}_x(D) = v_x(f)$ .

**1.3.5** On note  $\mathfrak{Z}_{\text{prin}}^1(X)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{Z}^1$  formé par les éléments de la forme  $\text{cyc}(\text{div}(f))$  pour  $f \in \mathcal{M}(X)$  (que l'on appelle cycles principaux). On a donc un morphisme

$$\text{Div}(X)/\text{Div.Pr}(X) \rightarrow \mathfrak{Z}^1(X)/\mathfrak{Z}_{\text{prin}}^1(X).$$

Le quotient de droite est appelé "groupe des classes de  $X$ " et noté  $\mathcal{Cl}(X)$ .

*Exemple :* si  $A$  est un anneau de Dedekind, par exemple l'anneau des entiers d'un corps de nombres, alors  $\mathcal{Cl}$  est le groupe des classes considéré en arithmétique. On se rappelle que ce  $\mathcal{Cl}$  contrôle le défaut de principalité de  $A$ , ainsi que le défaut d'unicité des factorisations en élément irréductibles. On a plus généralement

**1.3.6 PROPOSITION.**— *Un anneau intègre (noethérien) est factoriel si et seulement si il est intégralement clos et  $\mathcal{Cl}(\text{Spec}(A)) = 0$ .*

Rappelons qu'un anneau intègre est dit *factoriel* (Unique factorization domain) si tout élément non nul admet une "unique" factorisation en éléments irréductibles. On sait que ceci équivaut à ce que tous les idéaux premiers de hauteur 1 soient *principaux*.

*Démonstration.* On admettra que factoriel implique normal (pas difficile). Supposons  $A$  factoriel. Un cycle  $Z$  de codimension 1 de  $\text{Spec}(A)$  est un idéal de hauteur 1 de  $A$ . Un tel idéal étant principal, engendré par une fonction  $f$ , on a  $\text{div}(f) = 1.Z$  d'où  $\mathcal{Cl}(\text{Spec}(A)) = 0$ .

Réciproquement, supposons  $\mathcal{Cl}(\text{Spec}(A)) = 0$ . Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal de hauteur 1 et  $Z$  le cycle associé. On veut prouver que  $\mathfrak{p}$  est principal. Par hypothèse, il existe  $f \in Q(A)$  avec  $\text{div}(f) = 1.Z$ . Comme  $A$  est normal, donc régulier en codimension 1,  $A_{\mathfrak{p}'}$  est de valuation discrète pour tous  $\mathfrak{p}'$  de hauteur 1. On a donc  $v_{\mathfrak{p}'}(f) = 0$  pour  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$  et  $v_{\mathfrak{p}}(f) = 1$ . En particulier on a  $f \in A_{\mathfrak{p}'}$  pour tous les  $\mathfrak{p}'$  de hauteur 1. Or on sait que pour un anneau normal (=intégralement clos), on a la propriété suivante :

$$A = \bigcap_{\text{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}.$$

On en déduit  $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ . Montrons que  $f$  engendre  $\mathfrak{p}$ . Soit  $g \in \mathfrak{p}$ , appliquant à nouveau le résultat ci-dessus on montre  $g/f \in A$ . □

**1.3.7 THÉORÈME.**— *Supposons  $X$  intègre et normal. Le morphisme  $\text{cyc} : \text{Div}(X) \longrightarrow \mathfrak{Z}^1(X)$  est injectif. Il est de plus bijectif si et seulement si tous les anneaux locaux de  $X$  sont factoriels.*

*Démonstration.* Rappelons que  $X$  normal implique que les anneaux locaux des points de codimension 1 sont *réguliers*. Pour prouver l'injectivité, il nous suffira de prouver que  $\text{cyc}^{-1}(\mathfrak{Z}^{1,+}(X)) = \text{Div}^+(X)$ . Or, soit  $D$  un diviseur tel que  $\text{mult}_x(D) \geq 0$  pour tout  $x$ . Soit  $U = \text{Spec}(A)$  un ouvert affine sur lequel  $D = \text{div}(f)$ . Pour  $x \in U$ , on a  $\text{mult}_x(D) = v_x(f) \geq 0$  donc  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ . Comme  $A$  est normal, on en conclut que  $f \in A$ . Ceci étant vrai pour tout  $U$  comme ci-dessus, on a donc  $D \geq 0$ .

Passons à la surjectivité. Supposons d'abord les anneaux locaux de  $X$  factoriels. Soit  $Z \in \mathfrak{Z}^1(X)$ . Pour un point  $x \in X$ , notons  $Z_x \in \mathfrak{Z}^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$  la restriction de  $Z$  à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ . Comme  $\mathcal{O}_{X,x}$  est factoriel, il existe  $f_x \in \mathcal{M}_{X,x} = \mathcal{M}(X)$  telle que  $D_x = \text{cyc}(\text{div}(f_x))$ . Ainsi le support de  $D - \text{cyc}(\text{div}(f_x))$  dans  $\mathfrak{Z}^1(X)$  ne rencontre pas  $x$ , et il existe donc un ouvert  $U$  sur lequel on a encore  $D|_U = \text{cyc}(\text{div}(f_x)|_U)$ . Recouvrant  $X$  par de tels ouverts  $U$ , on obtient un diviseur.

Réciproquement, supposons le morphisme  $\text{cyc}$  est surjectif. Soit  $x \in X$  et  $Z$  un cycle passant par  $x$ . Écrivons  $Z = \text{cyc}(D)$ . Localement autour de  $x$ ,  $D = \text{div}(f)$  pour une fonction  $f$ . Il en résulte que  $Z$  est principal dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ . □

**1.3.8 COROLLAIRE.**— *Si  $X$  est localement factoriel et quasi-projectif sur un anneau noethérien, on a un isomorphisme  $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}l(X)$ .*

**1.3.9 Remarque.** Sous les hypothèses du corollaire, il s'ensuit que le morphisme de restriction  $\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(U)$  est surjectif, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .

**1.3.10 Exemple.** Si  $X$  est une courbe projective non-singulière sur un corps algébriquement clos, un cycle de codimension 1 est un point fermé. Tout morphisme fini  $f : Y \longrightarrow X$  avec  $Y$  courbe non-singulière induit naturellement un morphisme  $\mathfrak{Z}^1(X) \longrightarrow \mathfrak{Z}^1(Y)$  de la manière suivante : si  $t$  est un générateur de  $\mathfrak{m}_x$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$ , on pose  $f^*(x) = \sum_{f(y)=x} v_y(f^*t)$  où  $f^*t \in \mathcal{O}_{Y,y}$ . Ceci ne dépend pas du choix de  $t$ , puis on étend par linéarité. On vérifie que cela respecte l'équivalence linéaire (noter que le pull-back  $\mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$  est bien défini car  $f$  est dominant, et fait de  $\mathcal{M}(Y)$  une extension finie de  $\mathcal{M}(X)$ ), d'où un morphisme  $\mathcal{C}l(X) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}l(Y)$ . On pourra faire l'exercice de vérifier que ce morphisme correspond au pull-back  $\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(Y)$  via l'isomorphisme du corollaire.

**1.3.11 THÉORÈME.**— *(Auslander-Buschbaum) Un anneau local régulier noethérien est factoriel.*

*Démonstration.* cf EGA IV.21.11. □

**1.3.12 PROPOSITION.**— *Soit  $X$  un schéma intègre normal et  $Z \subset X$  un fermé propre de complémentaire  $U$ . L'application surjective de restriction  $\mathcal{C}l(X) \longrightarrow \mathcal{C}l(U)$  est un isomorphisme si  $Z$  est de codimension  $\geq 2$  et induit une suite exacte*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}l(X) \longrightarrow \mathcal{C}l(U) \longrightarrow 0$$

si  $Z$  est un cycle de codimension 1, l'application de gauche étant définie par  $n \mapsto n \cdot Z$ .

*Démonstration.* Clair. □

**1.3.13 Application.**  $\mathcal{C}l(\mathbb{P}_k^n) = \mathbb{Z}$ . En effet, on écrit  $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{A}_k^n \sqcup \mathbb{P}_k^{n-1}$ , on utilise le fait que  $K[X_1, \dots, X_n]$  est factoriel. L'application degré (d'une hypersurface dans  $\mathbb{P}^n$ ) induit un morphisme  $\mathcal{C}l(\mathbb{P}_k^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$  inverse de  $n \mapsto n[\mathbb{P}_k^{n-1}]$ .

**1.3.14 PROPOSITION.**— *Soit  $X$  normal intègre. Alors on a un isomorphisme  $\mathcal{C}l(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}l(X \times \mathbb{A}^1)$ .*

**1.3.15 Sous-schémas associés aux cycles de codimension 1.** Soit  $Z = \sum n_x x$  un diviseur sur  $X$ . On lui associe un sous-schéma  $Y(Z)$ . Localement, si  $X = \text{Spec}(A)$ , l'idéal définissant  $Y(Z)$  est le noyau de  $A \longrightarrow \prod_x A_{\mathfrak{p}_x} / \mathfrak{p}_x^{n_x}$ .

## 2 Éclatements : définition et premières propriétés

### 2.1 Rappels sur morphismes projectifs et faisceaux amples

**2.1.1 Rappels sur Proj.** Soit  $S = S_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$  un anneau gradué. On note  $\text{Proj}(S)$  l'ensemble des idéaux premiers homogènes ne contenant pas l'idéal  $S_+ := \bigoplus_{n > 0} S_n$ .

Pour un idéal homogène  $I$  de  $S_\bullet$  on note  $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S_\bullet), \mathfrak{p} \supset I\}$ . Les  $V(I)$  sont les fermés d'une topologie appelée topologie de Zariski.

Si  $f$  est un élément homogène de  $S_+$ , on note  $D(f) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S_\bullet), f \notin \mathfrak{p}\}$ . C'est un ouvert de  $\text{Proj}(S_\bullet)$  et les ouverts de cette forme forment une base de voisinages pour la topologie de Zariski. Pour un autre  $f'$  homogène, on a  $D(ff') = D(f) \cap D(f')$ . Une famille  $(D(f_i))_{i \in I}$  recouvre  $\text{Proj}(S_\bullet)$  si et seulement si l'idéal engendré par les  $f_i$  contient une puissance de chaque élément de  $S_+$ .

Soit  $d$  le degré de  $f$ . L'anneau localisé  $S_f = S_{f,\bullet} = S_\bullet[X]/(Xf - 1)$  est muni de la graduation induite par celle de  $S_\bullet$  et telle que  $X$  soit de degré  $-d$ . On note  $S_{(f)} = S_{f,0}$  le sous-anneau des éléments de degré 0. Il est parfois commode de penser en termes de limites inductives : on a un isomorphisme canonique de  $S_\bullet$ -modules, cf. EGA 0.1.6

$$S_{f,\bullet} = \varinjlim \left( S_\bullet \xrightarrow{\times f} S_\bullet \xrightarrow{\times f} \cdots \xrightarrow{\times f} S_\bullet \xrightarrow{\times f} \cdots \right)$$

qui est un isomorphisme de  $S_\bullet$ -algèbres si on voit la limite inductive comme quotient de  $S_\bullet^{(\mathbb{N})} = S_\bullet[X]$ . Par restriction, on obtient un isomorphisme de  $S_0$ -modules

$$S_{(f)} = S_{f,0} = \varinjlim \left( S_0 \xrightarrow{\times f} S_d \xrightarrow{\times f} \cdots \xrightarrow{\times f} S_{dn} \xrightarrow{\times f} \cdots \right)$$

qui est un isomorphisme de  $S_0$ -algèbres si on voit la limite inductive comme quotient de l'anneau  $\bigoplus_n S_{dn}$ . Lorsque  $d = 1$ , cette dernière expression fournit un isomorphisme  $S_{(f)} \xrightarrow{\sim} S/(f-1)S$ .

L'application  $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}S_{f,\bullet} \cap S_{(f)}$  est un homéomorphisme de  $D(f)$  sur  $\text{Spec}(S_{(f)})$  et permet de transporter le faisceau structural de  $\text{Spec}(S_{(f)})$  sur  $D(f)$ . Si  $f'$  est de degré  $d'$ , l'ouvert  $D(ff')$  de  $D(f)$  correspond à l'ouvert principal de  $\text{Spec}(S_{(f)})$  associé à l'élément  $f'^d f^{-d'}$ . Comme  $S_{(ff')}$  s'identifie au localisé de  $S_{(f)}$  en cet élément, les faisceaux que l'on vient de définir sur les  $D(f)$  se recollent en un faisceau structural  $\mathcal{O}$  sur  $\text{Proj}(S_\bullet)$ , lequel est donc ainsi muni d'une structure de schéma, et même de  $S_0$ -schéma.

*Exemple :* soit  $S_\bullet = A[x_0, \dots, x_n]$ . Le schéma obtenu est l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $A$  et se note  $\mathbb{P}_A^n$ . Les  $D(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  recouvrent  $\mathbb{P}_A^n$  et on a  $D(x_i) = \text{Spec}(A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]) \simeq \mathbb{A}_A^n$ . Plus généralement, si  $M$  est un  $A$ -module, soit  $S_\bullet = \text{Sym}_A(M)$  son algèbre symétrique. On rappelle que c'est l'"abélianisée" de l'algèbre tensorielle de  $M$ . On a en particulier  $\text{Sym}_A(M)_n = (M^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$  (coinvariants sous le groupe symétrique). De plus, l'inclusion  $M = \text{Sym}_A(M)_1 \hookrightarrow \text{Sym}_A(M)$  représente le foncteur  $B \mapsto \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, B)$  sur la catégorie des  $A$ -algèbres commutatives. On note  $\mathbb{P}_A(M) := \text{Proj}(S_\bullet)$ . Si  $(m_i)_{i \in I}$  est une famille de générateurs du  $A$ -module  $M$ , alors les  $D(m_i)$  recouvrent  $\mathbb{P}_A(M)$ .

Notons que la formation de  $\text{Proj}$  n'est que partiellement fonctorielle en l'anneau gradué  $S_\bullet$ . En effet un morphisme gradué  $S_\bullet \xrightarrow{\varphi} R_\bullet$  induit un morphisme de schémas

$$U_\varphi \subset \text{Proj}(R_\bullet) \xrightarrow{\text{Proj}(\varphi)} \text{Proj}(S_\bullet)$$

où  $U_\varphi$  désigne l'ouvert de  $\text{Proj}(R_\bullet)$  formé des  $\mathfrak{p}$  ne contenant pas  $\varphi(S_+)$ . Un cas particulier important est lorsque  $\varphi$  est *surjectif*. Dans ce cas on a  $U_\varphi = \text{Proj}(R_\bullet)$  et le morphisme ci-dessus est une *immersion fermée*. En particulier tout idéal homogène de  $S_\bullet$  définit un sous-schéma fermé de  $\text{Proj}(S_\bullet)$ .

*Remarque* : deux idéaux peuvent définir le même sous-schéma fermé. Par exemple,  $(x_0)$  et  $(x_0^2, x_0x_1)$  dans  $\mathbb{P}_A^1$ . Dans le même ordre d'idées, on peut avoir  $U_\varphi = \text{Proj}(R_\bullet)$  et  $\text{Proj}(\varphi)$  isomorphisme, sans que  $\varphi$  soit un isomorphisme. C'est le cas lorsque  $\varphi$  induit un isomorphisme  $S_n \xrightarrow{\sim} R_n$  pour  $n \geq n_0$ . Voici un autre exemple important.

*Exemple* : Soit  $S_\bullet^{(d)}$  l'anneau gradué défini par  $S_n^{(d)} := S_{nd}$ . Par construction, on a évidemment  $\text{Proj}(S_\bullet^{(d)}) = \text{Proj}(S_\bullet^{(d)})$  où  $S_\bullet^{(d)}$  désigne l'anneau gradué défini par  $S_n^{(d)} = S_n$  si  $d$  divise  $n$  et  $S_n^{(d)} = 0$  sinon. On montre alors que l'inclusion graduée  $S_\bullet^{(d)} \hookrightarrow S_\bullet$  induit un isomorphisme  $\text{Proj}(S_\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(S_\bullet^{(d)})$ . En effet, on peut trouver une famille  $(f_i)_{i \in I}$  d'éléments de degré divisible par  $d$  telle que les  $D(f_i), i \in I$  recouvrent  $\text{Proj}(S_\bullet)$ . Les  $D(f_i)$  recouvrent aussi  $\text{Proj}(S_\bullet^{(d)})$  et on a par construction  $S_{(f_i)} = S_{(f_i)}^{(d)}$ . *Application* : ceci permet par exemple de définir un plongement  $\mathbb{P}_A^n \hookrightarrow \mathbb{P}_A^N$  où  $N = \binom{n+d}{d} - 1 = \dim_A(A[x_0, \dots, x_n]_d)$  en envoyant les coordonnées de  $\mathbb{P}^N$  sur les monômes de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^n$ .

Soit  $M = M_\bullet$  un  $S_\bullet$ -module gradué. Pour  $f$  homogène dans  $S_+$ , le module  $M_{(f)} = M_{f,0}$  des éléments homogènes de degré 0 dans le localisé  $M_{f,\bullet}$  définit un faisceau de modules sur  $D(f)$ . Ces faisceaux sur les différents  $D(f)$  se recollent en un faisceau quasi-cohérent  $\tilde{M}$  sur  $\text{Proj}(S)$ . Pour un entier  $n$ , on note  $M(n) = M(n)_\bullet$  le module gradué  $M$  muni de la graduation de  $M_\bullet$  décalée de  $n$ , i.e.  $M(n)_i = M_{i+n}$ . On note traditionnellement  $\mathcal{O}(n) := S(n)$ . Remarquons que pour tout  $n$  on a un morphisme naturel

$$M_n \longrightarrow \Gamma(\text{Proj}(S), \tilde{M}(n)).$$

En effet pour tout  $f \in S_+$  homogène, on a  $\Gamma(D(f), \tilde{M}(n)) = M(n)_{(f)} = M(n)_{f,0} = M_{f,n}$  et le morphisme ci-dessus est obtenu par recollement des morphismes naturels  $M_n \longrightarrow M_{f,n}$ .

Réciproquement, étant donné  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X = \text{Proj}(S_\bullet)$ , on lui associe un module gradué  $\Gamma_\bullet(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n))$  sur l'algèbre graduée  $\Gamma_\bullet(\mathcal{O})$ . Le morphisme gradué  $S_\bullet \longrightarrow \Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  construit ci-dessus (prendre  $M = S$ ) fait de chaque  $\Gamma_\bullet(\mathcal{F})$  un  $S_\bullet$ -module gradué. On remarque que pour  $f$  homogène de degré  $d$ , on a un morphisme

$$\begin{aligned} \Gamma(D(f), \Gamma_\bullet(\mathcal{F})) &= \varinjlim \left( \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\times f} \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d)) \xrightarrow{\times f} \dots \right) \\ &\longrightarrow \varinjlim \left( \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \xrightarrow{\times f} \Gamma(D(f), \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(d)) \xrightarrow{\times f} \dots \right) \\ &= \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \otimes \varinjlim \left( S_{f,0} \xrightarrow{\times f} S_{f,d} \xrightarrow{\times f} \dots \right) \\ &= \Gamma(D(f), \mathcal{F}) \end{aligned}$$



Ces morphismes se recollent en un morphisme de faisceau  $\Gamma_\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$  fonctoriel en  $\mathcal{F}$ .

Pour dire quelque chose d'intéressant sur ces constructions, il faut supposer que  $S_\bullet$  est engendré sur  $S_0$  par ses éléments de degré 1. Le point est que dans ce cas, les  $D(f)$  avec  $f$  de degré 1 recouvrent  $\text{Proj}(S_\bullet)$ .

**2.1.2 PROPOSITION.**— *Supposons que  $S_\bullet$  est engendrée par  $S_1$  en tant que  $S_0$ -algèbre.*

- i) *Pour tout  $n$ , le faisceau  $\mathcal{O}(n)$  sur  $\text{Proj}(S_\bullet)$  est inversible. De plus pour tout  $S_\bullet$ -module gradué  $M_\bullet$  on a un isomorphisme canonique  $M(\tilde{n})_\bullet \xrightarrow{\sim} \tilde{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$ .*
- ii) *Le foncteur  $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_\bullet(\mathcal{F})$  est adjoint à droite du foncteur  $M_\bullet \mapsto \tilde{M}_\bullet$ .*
- iii) *Si de plus  $S_1$  est de type fini<sup>1</sup> sur  $S_0$ , alors la flèche d'adjonction  $\tilde{\Gamma}_\bullet(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$  est un isomorphisme pour tout  $\mathcal{F}$ .*
- iv) *Lorsque  $S_\bullet = \text{Sym}_{S_0}^\bullet(S_1)$  avec  $S_1$  libre de rang  $n + 1$ , (de sorte qu'on a alors  $S_\bullet \simeq S_0[X_0, X_1, \dots, X_n]$ ), la flèche d'adjonction  $S_\bullet \longrightarrow \Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* (i) Pour un élément  $f$  de degré 1, la multiplication par  $f^n$  induit un isomorphisme  $\Gamma(D(f), \mathcal{O}) = S_{f,0} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D(f), \mathcal{O}(n)) = S_{f,n}$ . Ainsi  $\mathcal{O}(n)|_{D(f)}$  est libre de rang 1. De même, cette multiplication induit  $M_{f,0} \xrightarrow{\sim} M_{f,n}$  et par conséquent  $S_{f,n} \otimes_{S_{f,0}} M_{f,0} \xrightarrow{\sim} M_{f,n}$  qui donne l'isomorphisme annoncé sur  $D(f)$ . On vérifie ensuite que ces isomorphismes se recollent.

(ii) Exercice. Cf EGA II 2.6.5.

(iii) Il faut montrer que la flèche entre les deux limites inductives définies plus haut est bijective (on peut supposer de plus  $f$  de degré 1). Il suffit pour cela d'appliquer les deux propriétés suivantes pour un faisceau cohérent  $\mathcal{G}$  sur  $X = \text{Proj}(S_\bullet)$  :

- i) Pour toute section  $s \in \text{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(D(f), \mathcal{G}))$ , il existe  $n$  tel que  $s \otimes f^n = 0$  dans  $\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}(n))$ .
- ii) Pour toute section  $s \in \Gamma(D(f), \mathcal{G})$ , il existe un entier  $n$  tel que  $s \otimes f^n$  se prolonge en une section dans  $\Gamma(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}(n))$ .

Ces propriétés sont laissées en exercice (cf Hartshorne, Lemme II.5.14). L'hypothèse de finitude de  $S_1$  sur  $S_0$  sert à recouvrir  $X$  par un nombre fini d'ouverts affines de type  $D(f)$  pour  $f$  de degré 1.

(iv) On calcule  $\Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  grâce à la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_\bullet(\mathbb{P}_{S_0}^n, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \prod_{i=0}^n \Gamma_\bullet(D(X_i), \mathcal{O}) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \Gamma_\bullet(D(X_i) \cap D(X_j), \mathcal{O}) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \prod_{i=0}^n S_{X_i, \bullet} & \longrightarrow & \prod_{i,j} S_{X_i X_j, \bullet} \end{array}$$

qui montre que  $\Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  est l'intersection des localisés  $S_{X_i}$  dans le localisé  $S_{X_0 X_1 \dots X_n}$ . Un élément de ce localisé s'écrit uniquement sous la forme  $\prod_{i=0}^n X_i^{a_i} P(X_0, \dots, X_n)$  avec  $P$

<sup>1</sup>ce qui est vérifié en particulier lorsque  $S_\bullet$  est noethérien

non divisible par  $X_0, \dots, X_n$ . Il est dans  $S_{X_i}$  si et seulement si les  $a_j, j \neq i$  sont positifs, donc il est dans l'intersection des  $S_{X_i}$  si et seulement si les  $a_i$  sont positifs, *i.e.* si et seulement si il appartient à  $S$ . (cf Hartshorne, Proposition 5.13).  $\square$

**2.1.3 Remarques.** (i) le point ii) de la proposition montre que  $\Gamma_\bullet$  est un foncteur pleinement fidèle et  $M \mapsto \tilde{M}$  est essentiellement surjectif. Cependant le premier n'est pas essentiellement surjectif et le second n'est pas fidèle. Par exemple, si  $M'_\bullet$  désigne le module gradué  $\bigoplus_{n \geq n_0} M_n$  pour un entier  $n_0$  quelconque, alors l'inclusion  $M'_\bullet \hookrightarrow M_\bullet$  induit un isomorphisme  $\tilde{M}' \xrightarrow{\sim} \tilde{M}$  des faisceaux associés. Ceci se vérifie sur chaque  $D(f)$  avec  $f$  de degré 1 et on voit que  $M'_{(f)}$  est la limite inductive d'un système inductif cofinal de celui dont la limite inductive est  $M_{(f)}$ .

(ii) Si  $A$  est un anneau, il découle des points iii), iv) et du fait que  $\Gamma_\bullet$  est exact à gauche, que tout sous-schéma fermé de l'espace projectif  $\mathbb{P}_A^n := \text{Proj}(\text{Sym}^\bullet(A^{n+1})) = \text{Proj}(A[X_0, X_1, \dots, X_n])$  est défini par un idéal homogène  $I$ , par exemple  $I = \Gamma_\bullet(\mathcal{I})$  avec  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma fermé.

(iii) Notons aussi que sous l'hypothèse de la proposition, on a un épimorphisme de  $S_\bullet$ -modules gradués  $S_\bullet \otimes_{S_0} S_1 \twoheadrightarrow S(1)_{\bullet \geq 0}$  qui donne donc sur  $\text{Proj}(S_\bullet)$  un épimorphisme de faisceaux

$$(2.1.3.1) \quad \mathcal{O} \otimes_{S_0} S_1 \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$$

**2.1.4 Globalisation.** Soit  $S$  un schéma et  $\mathcal{S}_\bullet = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{S}_1 \oplus \dots$  un faisceau quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_S$ -algèbres graduées. En recouvrant  $S$  par des ouverts affines, on définit par recollement le schéma  $\text{Proj}(\mathcal{S}_\bullet)$  au-dessus de  $S$ . Plus précisément,

- i) on vérifie d'abord que si  $S = \text{Spec}(A)$  et  $U = \text{Spec}(A_f)$ , on a un  $U$ -isomorphisme canonique  $\text{Proj}(\mathcal{S}_\bullet \otimes_A A_f) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\mathcal{S}_\bullet) \times_X U$ .
- ii) pour  $S$  séparé, on choisit un recouvrement affine  $S = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  et on recolle les  $\text{Proj}(\mathcal{S}_\bullet(U))$  grâce à i). On vérifie que le schéma obtenu ne dépend pas du choix du recouvrement, toujours grâce à i).
- iii) Pour  $S$  général, on choisit un recouvrement par des ouverts séparés (par exemple affines) et on recolle les  $\text{Proj}(\mathcal{S}_\bullet|_U)$  grâce à ii).

*Exemple.* Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module. Notons  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})$  le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \text{Sym}_{\mathcal{O}_S(U)}(\mathcal{F}(U))$ . C'est une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre graduée, munie d'un morphisme  $\mathcal{F} \hookrightarrow \text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{O}_S$ -modules qui représente le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-mod}}(\mathcal{F}, -)$  sur la catégorie des  $\mathcal{O}_S$ -algèbres. Si  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent, alors  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})$  l'est aussi. En effet, il suffit de le vérifier dans le cas affine  $S = \text{Spec}(A)$ . Dans ce cas, posons  $M = \Gamma(S, \mathcal{F})$ . Pour toute  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $\mathcal{A}$  on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S\text{-mod}}(\mathcal{F}, \mathcal{A}) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A\text{-mod}}(M, \Gamma(S, \mathcal{A})) \\ &\simeq \text{Hom}_{A\text{-alg}}(\text{Sym}_A(M), \Gamma(S, \mathcal{A})), \end{aligned}$$

ce qui montre que la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre quasi-cohérente associée à la  $A$ -algèbre  $\text{Sym}_A(M)$  représente le même foncteur que  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})$  et lui est donc isomorphe. Notons aussi les propriétés suivantes :

- pour tout  $s \in S$ , on a  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})_s = \text{Sym}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{F}_s)$ ,
- pour tout  $f : X \rightarrow S$ , on a  $f^*\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F})$

qui découlent de l'isomorphisme de changement de base  $\text{Sym}_A(M) \otimes_A A' \simeq \text{Sym}_{A'}(M \otimes_A A')$  (valable pour tout morphisme d'anneaux  $A \rightarrow A'$ ).

On note alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) := \text{Proj}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F})) \quad \text{et} \quad \pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow S$$

le morphisme canonique. Lorsque  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S^{n+1}$ , on a  $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}^n \times S$ . Lorsque  $\mathcal{F}$  est localement libre de rang  $n+1$  sur  $S$ , le  $S$ -schéma  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$  est localement (sur  $S$ ) isomorphe à un espace projectif de dimension  $n$ . C'est une conséquence de l'isomorphisme de changement de base plus général  $\mathbb{P}(f^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathcal{F}) \times_S X$  pour tout  $f : X \rightarrow S$ . En particulier si  $\mathcal{F}$  est un faisceau inversible le morphisme  $\pi_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow S$  est un *isomorphisme*. Pour  $\mathcal{F}$  quelconque, les épimorphismes (2.1.3.1) se recollent en un épimorphisme

$$(2.1.4.1) \quad \pi^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$$

de faisceaux de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}$ -modules. Il est bon de garder en tête l'interprétation modulaire de  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$  :

**2.1.5 PROPOSITION.**— *Soit  $S$  un schéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_S$ -module quasi-cohérent. Pour tout  $S$ -schéma  $X \xrightarrow{f} S$ , l'application*

$$\text{Hom}_S(X, \mathbb{P}(\mathcal{F})) \rightarrow \{\text{quotients } f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{L} \text{ avec } \mathcal{L} \text{ un } \mathcal{O}_X\text{-module inversible}\}$$

*qui envoie  $g : X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$  sur  $f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$  est une bijection.*

NB : dans le second membre on identifie deux quotients  $p : f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$  et  $p' : f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{L}'$  s'il existe un isomorphisme  $\varphi : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$  tel que  $p' = \varphi \circ p$ .

*Démonstration.* Définissons la bijection réciproque. Soit  $f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$  un quotient avec  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On en déduit un morphisme gradué surjectif  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(f^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\mathcal{L})$  d'où par functorialité un  $X$ -morphisme

$$U_\varphi \subset \mathbb{P}(\mathcal{L}) = X \rightarrow \mathbb{P}(f^*\mathcal{F}) = X \times_S \mathbb{P}(\mathcal{F}).$$

Or,  $\varphi$  étant surjectif,  $U_\varphi = \mathbb{P}(\mathcal{L})$ , d'où, après projection, le morphisme cherché  $X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$ . On vérifie aisément que cela définit une bijection réciproque de celle de l'énoncé.  $\square$

**2.1.6 Remarque.** En utilisant le critère valuatif, cette interprétation modulaire montre immédiatement la propriété de  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$  sur  $S$ , lorsque  $\mathcal{F}$  est cohérent. En effet, soit  $R$  un anneau de valuation de corps des fractions  $K$  et  $\text{Spec}(R) \xrightarrow{x} S$  un  $R$ -point. La "fibre"  $\mathcal{F}_R := x^*\mathcal{F}$  est un  $R$ -module de type fini et la fibre  $\mathcal{F}_K = K \otimes \mathcal{F}_R$  est un  $K$ -ev de

dimension finie. Un  $K$ -point de  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$  au-dessus de  $x_{|\text{Spec}(K)}$  est un épimorphisme  $\mathcal{F}_K \twoheadrightarrow K$ . Or l'image de la composée  $\mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{F}_K \longrightarrow K$  est un sous- $R$ -module de type fini de  $K$  donc isomorphe à  $R$ . Cette composée fournit donc un  $R$ -point de  $\mathbb{P}(\mathcal{F})$  au-dessus de  $x$ .

Nous verrons plus tard comment utiliser cette interprétation modulaire pour tester la lissité du morphisme  $\pi$ .

Rappelons qu'une immersion est une composition d'immersions fermées et d'immersions ouvertes.

**2.1.7 DÉFINITION.**— *Soit  $f : X \longrightarrow S$  un morphisme de schémas.*

- i) *On dit que  $f$  est quasi-projectif, resp. projectif, ou encore que  $X$  est quasi-projectif, resp. projectif, sur  $S$ , si  $f$  se factorise à travers une immersion, resp. une immersion fermée, dans un espace projectif  $\mathbb{P}_S^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times S$ .*
- ii) *On appelle faisceau très ample relativement à  $S$  sur  $X$  tout faisceau de la forme  $i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$  pour une  $S$ -immersion  $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_S^r$ .*

Si  $S = \text{Spec}(A)$ , tout  $S$ -schéma  $X$  de la forme  $\text{Proj}(S_{\bullet})$  avec  $S_{\bullet}$  un anneau gradué vérifiant  $S_0 = A$  et engendré par un  $A$ -module  $S_1$  de type fini, est projectif sur  $S$ . Le faisceau  $\mathcal{O}(1) = S(1)_{\bullet}$  sur  $\text{Proj}(S_{\bullet})$  est alors très ample relativement à  $A$ . Réciproquement tout schéma projectif sur  $S$  est de cette forme, puisqu'on peut alors trouver un morphisme gradué surjectif  $A[T_0, \dots, T_n] \twoheadrightarrow S_{\bullet}$ .

Par contre, si la base  $S$  n'est pas affine, et  $\mathcal{S}_{\bullet}$  est une  $\mathcal{O}_S$ -algèbre graduée, le faisceau  $\mathcal{O}(1)$  sur  $\text{Proj}(\mathcal{S}_{\bullet})$  associé n'est pas nécessairement très ample sur  $S$ . Par exemple prendre  $\mathcal{S}_{\bullet} = \text{Sym}^{\bullet}(\mathcal{L}^2)$  pour un faisceau  $\mathcal{L}$  sur  $S$  qui n'a pas de section globale non nulle. La projection  $\mathcal{L}^2 \twoheadrightarrow \mathcal{L}$  sur le deuxième facteur définit une section  $s : S \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}^2)$  pour laquelle, par définition, on a  $s^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L}^2)}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ . Mais ceci montre que  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L}^2)}(1)$  ne peut pas être engendré par ses sections globales, donc ne peut pas être très ample relativement à  $S$ .

**2.1.8 Remarque.** D'après la proposition précédente, un morphisme  $X \xrightarrow{g} \mathbb{P}_S^n = \text{Proj}(\mathcal{O}_S[T_0, \dots, T_n])$  est donné par un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $X$  et  $n+1$  sections  $s_0, \dots, s_n$  qui engendrent  $\mathcal{L}$  (i.e. telles que le morphisme  $\mathcal{O}_X^{n+1} \longrightarrow \mathcal{L}$  associé soit surjectif). Si l'on part de  $g$ , on a  $\mathcal{L} = g^*\mathcal{O}(1)$  et  $s_i = g^*(T_i)$ . Réciproquement, si l'on part de  $\mathcal{L}$  et des  $s_i$ , soit  $X_{s_i}$  l'ouvert de  $X$  où la section  $s_i$  ne s'annule pas. On a alors une trivialisations  $s_i : \mathcal{O}_{X_{s_i}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{X_{s_i}}$ , dont on déduit  $n$  sections  $s_j/s_i \in \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$ , lesquelles définissent un morphisme

$$X_{s_i} \xrightarrow{g_i} D(T_i) = \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$$

Le morphisme  $g$  s'obtient par recollement des  $g_i$ . On remarque que  $X_{s_i} = g^{-1}(D(T_i))$ . De plus, supposons  $S$  affine égal à  $\text{Spec}(A)$ . Il s'ensuit que pour que  $g$  soit une immersion fermée, il faut et il suffit que

- i) les  $X_{s_i}$  soient affines.
- ii) Les sections  $s_j/s_i$  engendrent  $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$  en tant que  $A$ -algèbre.

**2.1.9 DÉFINITION.**— Soit  $X$  un schéma. Un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  est dit ample si pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  le faisceau  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit engendré par un nombre fini de sections globales (i.e. il existe un épimorphisme  $\mathcal{O}_X^N \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ ).

**2.1.10 THÉORÈME.**— Soit  $X$  un schéma de type fini sur un anneau noethérien  $A$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ . Alors  $\mathcal{L}$  est ample si et seulement si il existe  $n$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est très ample relativement à  $A$ .

Il s'ensuit que le schéma  $X$  est quasi-projectif sur  $A$  si et seulement si il possède un faisceau ample.

*Démonstration.* Supposons  $\mathcal{L}$  ample. Nous montrons d'abord l'existence d'un entier  $n$  et de sections  $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  telles que les ouverts  $X_{s_i}$  soient affines et recouvrent  $X$  (et donc les  $s_i$  engendrent  $\mathcal{L}^{\otimes n}$ ). En effet, soit  $x \in X$  et  $U$  un ouvert affine contenant  $x$  sur lequel  $\mathcal{L}$  est libre. Soit  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux du fermé complémentaire. Puisque  $\mathcal{L}$  est ample, il existe  $n$  tel que  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit engendré par ses sections globales. En particulier, il existe une section  $s \in \Gamma(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \subset \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  telle que  $x \in X_s \subset U$ . Or,  $\mathcal{L}$  étant libre sur  $U$ , il existe une fonction  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  (l'image de  $s|_U$  par une trivialisatoin  $\mathcal{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ ) telle que  $X_s = U_f$ , ce qui montre que  $X_s$  est affine. Par quasicompacité de  $X$  on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts de ce type. En remarquant que  $X_s = X_{s^n}$ , on peut trouver un  $n$  commun à toutes ces sections.

Fixons maintenant pour chaque  $i$  un nombre fini de générateurs  $f_{ij}$  de la  $A$ -algèbre  $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$ . Reprenant un argument de la preuve de 2.1.2, il existe un entier  $m$  tel que chaque  $f_{ij} \otimes s_i^m$  s'étende en une section  $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes nm})$ . Considérons alors le morphisme  $X \xrightarrow{g} \mathbb{P}^N$  associé au faisceau inversible  $\mathcal{L}^{\otimes nm}$  et aux sections  $s_i^m$  et  $t_{ij}$  pour tous les  $i, j$ . Notons  $S_i$  et  $T_{ij}$  les coordonnées correspondantes sur  $\mathbb{P}^N$ . Alors, par construction :

- $g$  se factorise par l'ouvert  $\bigcup_i D(S_i)$  de  $\mathbb{P}_A^N$
- La restriction  $g|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \rightarrow D(S_i)$  est une immersion fermée, puisque le morphisme  $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^N}) = A[S_i, T_{i,j}] \rightarrow \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$  est surjectif.

Il s'ensuit que  $g$  est une immersion de  $X$  dans  $\mathbb{P}_A^N$ , donc  $\mathcal{L}^{\otimes nm}$  est très ample relativement à  $A$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $A$  et donnons-nous des sections  $s_0, \dots, s_n$  définissant une immersion dans  $\mathbb{P}_A^n$ . Supposons dans un premier temps que cette immersion est fermée (i.e. que  $X$  est propre). Alors les  $X_{s_i}$  sont affines (cf la remarque ci-dessus). Soient  $m_{ij}$  des générateurs de  $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{F})$  sur  $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$ . Par le même argument utilisé dans la preuve de 2.1.2, il existe un entier  $n$  tel que les sections  $m_{ij}s_i^n$  s'étendent en des sections globales dans  $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ . Par construction, ces sections engendrent  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ . Revenons au cas général ( $X$  pas nécessairement propre), et notons  $\bar{X}$  l'adhérence de  $X$  dans  $\mathbb{P}_A^n$  et  $\bar{\mathcal{L}}$  la restriction de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1)$  à  $\bar{X}$ . Alors  $X$  est ouvert dans  $\bar{X}$  et l'assertion découle du fait que tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X$  peut être prolongé en un faisceau cohérent sur  $\bar{X}$ , cf Hartshorne, Ex II.5.15.  $\square$

**2.1.11 THÉORÈME.**— Soit  $A$  une algèbre de type fini sur un corps (ou plus généralement sur un anneau de Nagata) et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur un schéma projectif  $X$  sur  $A$ . Alors  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  est de type fini en tant que module sur  $A$ .

Le résultat est vrai avec  $A$  noethérien, mais la preuve usuelle (due à Serre) utilise la cohomologie des faisceaux quasi-cohérents, cf Hartshorne III.5.2, ou EGA III.2.1 (et même si on ne s'intéresse qu'au  $H^0$ , on établit un résultat pour tous les  $H^i$  par récurrence descendante sur  $i$ ).

Un anneau de Nagata est un anneau intègre noethérien “universellement japonais”, *i.e.* tel que tout anneau intègre de type fini sur  $A$  soit “japonais”. Un anneau intègre  $A$  est dit japonais si pour toute extension finie  $K$  de son corps des fractions  $Q(A)$ , la clôture intégrale de  $A$  dans  $K$  est de type fini (et par conséquent finie puisque entière) sur  $A$ . Tout corps est un anneau de Nagata, l'anneau  $\mathbb{Z}$  aussi, et plus généralement tout anneau noethérien intégralement clos dont le corps de fractions est parfait.

*Démonstration.* On donne seulement les étapes de la preuve. Cf Hartshorne Thm 5.19. Par hypothèse on a  $X = \text{Proj}(S_\bullet)$  avec  $S_0 = A$  et  $S_\bullet$  engendré par  $S_1$  de type fini sur  $A$ .

1- On montre que  $\mathcal{F} = M$  pour  $M = M_\bullet$  un  $S_\bullet$ -module gradué de type fini. Il suffit en effet de prendre le sous-module gradué de  $\Gamma_\bullet(\mathcal{F})$  engendré par un nombre fini de sections génératrices d'un  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$ .

2- On se ramène à  $S$  intègre et  $M_\bullet$  de la forme  $S_\bullet(n)$ . On utilise en effet le fait que  $M$  admet une filtration par des modules gradués du type  $(S_\bullet/\mathfrak{p})(n)$ .

3- Supposant  $S$  intègre, on montre que  $S' := \Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  est entier sur  $S$ . En effet, fixons des générateurs  $f_0, \dots, f_n \in S_1$ . En recouvrant  $X$  par les  $D(f_i)$  on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_\bullet(\mathcal{O}) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n S_{f_i, \bullet} \longrightarrow \bigoplus_{i,j=0}^n S_{f_i f_j, \bullet}$$

qui montre que  $\Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  s'identifie à l'intersection des  $S_{f_i}$  dans  $S_{f_1 \dots f_n}$ . Reste à vérifier que  $\bigcap_i S_{f_i}$  est entier sur  $S$ . Or soit  $f'$  dans cette intersection. Choisissons un entier  $m$  tel que  $f_i^m f' \in S$  pour tout  $i$ . Il s'ensuit que  $S_{\geq nm} f' \subset S$  et même  $S_{\geq nm} f' \subset S_{\geq nm}$  puisque  $f'$  est de degré positif. Par récurrence il vient  $S_{\geq nm} f'^d \subset S_{\geq nm}$  pour tout  $d \geq 0$ . Par conséquent on a  $S f'^d \subset f_0^{-nm} S_{\geq nm} f'^d \subset f_0^{-nm} S_{\geq nm} \subset f_0^{-nm} S$ , et finalement  $S[f'] \subset f_0^{-nm} S$ . Comme  $S$  est noethérien,  $S[f']$  est donc fini sur  $S$  et  $f'$  est par conséquent entier.

4- On conclut en utilisant le fait que  $S$  est Japonais (*i.e.* sa clôture intégrale est de type fini en tant que  $S$ -module).  $\square$

*Remarque.* Avec les notations de la preuve, on déduit que  $S' = \Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  est inclus dans la clôture intégrale de  $S$  dans son localisé en les éléments de  $S_1$ . D'après nos hypothèses,  $S'$  est donc fini sur  $S$ . Le fait que  $S' \subset S_{S_1}$  signifie que pour chaque élément  $f' \in S'$ , il existe  $n$  tel que  $f' S_{\geq n} \subset S_{\geq n}$ . De la finitude de  $S'$  sur  $S$ , on déduit alors l'existence d'un entier  $N$  tel que pour tout  $f' \in S'$  on ait  $f' S_{\geq N} = S_{\geq N}$ . Par conséquent, il existe un entier  $M$  tel que  $S'_{\geq M} = S_{\geq M}$ . En d'autres termes, les algèbres  $S_\bullet$  et  $\Gamma_\bullet(\mathcal{O})$  coïncident en degrés

suffisamment grands. Notons alors  $S_{\bullet}^{(d)}$  l'algèbre  $\bigoplus_n S_{nd}$  comme dans l'exemple p.16. Pour  $d$  suffisamment grand, on a donc des isomorphismes  $\text{Proj}(S^{(d)}) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(S^{(d)}) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(S)$ .

*Remarque.* Le résultat se globalise en remplaçant  $\text{Spec}(A)$  par  $S$  noethérien (ou de type fini sur un anneau de Nagata), et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme projectif. La conclusion est que  $f_*(\mathcal{F})$  est cohérent sur  $S$ .

## 2.2 Éclatement d'un faisceau d'idéaux

**2.2.1 Algèbres de Rees.** Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal. L'algèbre de Rees associée à  $(A, I)$  est la sous- $A$ -algèbre graduée de l'algèbre de polynômes  $A[t]$  définie par

$$\text{Rees}^I(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n t^n = A \oplus It \oplus I^2 t^2 \oplus \cdots \subset A[t].$$

On peut aussi la noter simplement  $\text{Rees}^I(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n$ , mais il faut alors éviter de confondre un élément  $i \in I$  placé "en degré 1" avec le même "en degré 0". L'algèbre  $\text{Rees}^I(A)$  est engendrée par ses éléments de degré 1. On a donc une surjection canonique

$$\text{Sym}_A(I) \longrightarrow \text{Rees}^I(A)$$

de  $A$ -algèbres graduées, qui envoie un élément  $i \in I = \text{Sym}_A^1(I)$  sur  $it$ .

Plus généralement, soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{I}$  un faisceau d'idéaux quasi-cohérent sur  $X$ . Notons  $\mathcal{I}^n$  l'image du morphisme  $\mathcal{I}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{O}_X$  induit par la multiplication. C'est un idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ . Le faisceau  $\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n$  est une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre graduée quasi-cohérente, et est aussi le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \text{Rees}^{\mathcal{I}(U)}(\mathcal{O}_X(U))$ . En fait pour tout ouvert affine  $U$ , on a  $\Gamma(U, \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)) = \text{Rees}^{\mathcal{I}(U)}(\mathcal{O}_X(U))$ . En effet, il suffit de le vérifier lorsque  $X$  est lui-même affine, et pour cela, il suffit de vérifier que la formation de l'algèbre de Rees commute à la localisation. Or, plus généralement pour tout morphisme plat  $A \rightarrow A'$ , en notant  $I' := IA'$  l'idéal engendré par l'image de  $I$  dans  $A'$ , on a des isomorphismes  $I^n \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} (I')^n$  d'où l'on déduit un isomorphisme de  $A'$ -algèbres graduées

$$\text{Rees}^I(A) \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \text{Rees}^{I'}(A').$$

Puisque la formation de l'algèbre symétrique commute à tout changement d'anneau, on en déduit aussi un épimorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes

$$\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}) \longrightarrow \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X).$$

**2.2.2 DÉFINITION.**— On appelle éclatement de  $X$  en le faisceau d'idéaux quasicohérents  $\mathcal{I}$  le  $X$ -schéma  $\tilde{X}_{\mathcal{I}} := \text{Proj}(\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$ .

Si  $Y$  est le sous-schéma fermé de  $X$  défini par  $\mathcal{I}$ , on note aussi  $\tilde{X}_Y \xrightarrow{\pi_Y} X$  et on l'appelle *éclatement de  $X$  le long de  $Y$* . Le morphisme  $\pi_Y$  est propre mais généralement pas plat. Remarquons que si  $A$  est un anneau intègre, resp. réduit,  $A[t]$  est aussi intègre,

resp. réduite, et par conséquent  $\text{Rees}^I(A)$  est encore intègre, resp. réduite, et ceci quel que soit l'idéal  $I$ . Plus généralement, on en déduit que :  $\tilde{X}_I$  est réduit, resp. intègre, si  $X$  l'est.

Par ailleurs, on a les cas extrêmes suivant. Si  $\mathcal{I}$  est l'idéal unité (et définit donc le sous-schéma vide), alors  $\pi_{\mathcal{I}}$  est un isomorphisme. Si  $\mathcal{I}$  est nilpotent, alors l'éclaté  $\tilde{X}_I$  est le schéma vide.

**2.2.3 Description locale dans le cas affine.** Supposons  $X$  affine, égal à  $\text{Spec}(A)$ , et  $\mathcal{I}$  associé à un idéal  $I$  de  $A$  engendré par des éléments  $(f_1, \dots, f_n)$ . Les éléments de degré 1  $f_i t \in It = \text{Rees}_1^I(A)$  définissent un recouvrement affine  $\tilde{X}_I = \bigcup_{i=1}^n D(f_i t)$  avec  $D(f_i t) = \text{Spec}(\text{Rees}^I(A)/(f_i t - 1))$ . Pour expliciter un peu cette algèbre, on peut remarquer que l'inclusion  $\text{Rees}^I(A) \subset A[t]$  induit une injection (vérification aisée) de  $\text{Rees}^I(A)/(f_i t - 1)$  dans la localisée  $A[t]/(f_i t - 1) = A_{f_i}$ . De plus l'image de cette injection est la sous- $A$ -algèbre  $A\langle \frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i} \rangle$  de  $A_{f_i}$  engendrée par les éléments  $f_j t = f_j f_i^{-1}$ . Cependant, étudier et calculer effectivement cette algèbre est en général délicat.

**2.2.4 Éclatement d'un idéal régulier.** Continuons dans le contexte précédent et considérons la surjection

$$(2.2.4.1) \quad \text{Sym}^\bullet(A^n) = A[T_1, \dots, T_n] \twoheadrightarrow \text{Rees}^I(A)$$

qui envoie les  $T_i$  sur les  $f_i t$ . Il induit une immersion fermée  $\tilde{X}_I \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times X$ , et le recouvrement par les  $D(f_i t)$  n'est autre que l'image réciproque du recouvrement canonique de  $\mathbb{P}^n$  par les  $D(T_i)$ . Maintenant, le noyau de la surjection ci-dessus est engendré par tous les polynômes homogènes  $P$  tels que  $P(f_1, \dots, f_n) = 0$  dans  $A$ . En particulier il contient les éléments  $f_i T_j - f_j T_i$  pour tous  $i, j$ . Nous allons montrer que lorsque la suite  $(f_1, \dots, f_n)$  est régulière, ces éléments engendrent le noyau. Rappelons la définition de cette notion.

**DÉFINITION.** – Une suite  $(f_1, \dots, f_n)$  dans un anneau commutatif  $A$  est dite régulière si pour tout  $i = 1, \dots, n$ , l'image de  $f_i$  dans  $A/(f_1, \dots, f_{i-1})$  est un élément régulier (i.e. non diviseur de 0).

**PROPOSITION.** – Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une suite régulière d'un anneau commutatif  $A$ , et soit  $I$  l'idéal qu'elle engendre. Alors on a :

- i) le noyau du morphisme de  $A$ -algèbres graduées  $\text{Sym}^\bullet(A^n) = A[T_1, \dots, T_n] \xrightarrow{T_i \mapsto f_i t} \text{Rees}^I(A)$  est engendré par les éléments  $f_i T_j - f_j T_i$  pour tous  $i, j$ .
- ii) le noyau du morphisme de  $A$ -modules  $A^n = \bigoplus_{i=1}^n AT_i \xrightarrow{T_i \mapsto f_i} I$  est engendré par les éléments  $f_i T_j - f_j T_i$  pour tous  $i, j$ , et le morphisme canonique  $\text{Sym}_A^\bullet(I) \longrightarrow \text{Rees}^I(A)$  est un isomorphisme.

Nous verrons plus tard que si  $A$  est local noethérien, alors toute suite satisfaisant la condition i) ou ii) est régulière. Dans ce cas, la notion de régularité ne dépend pas de l'ordre de la suite.

*Démonstration.* Montrons d'abord que les deux propriétés sont équivalentes. Cela découle du fait général suivant : soit  $\varphi : M \twoheadrightarrow N$  un épimorphisme de  $A$ -modules. Alors le



noyau de  $\text{Sym}(\varphi) : \text{Sym}_A^\bullet(M) \rightarrow \text{Sym}_A^\bullet(N)$  est engendré par le sous-module  $\text{Ker}(\varphi)$  de  $\text{Sym}_A^1(M) = M$ . Ceci se vérifie par exemple à l'aide de la propriété universelle des algèbres symétriques. Il suffit alors de l'appliquer au morphisme  $\varphi : A^n = \bigoplus_{i=1}^n AT_i \xrightarrow{T_i \mapsto f_i} I$ . Par ailleurs, remarquons que si  $\text{Ker}(\varphi)$  est effectivement engendré par les  $f_j T_i - f_i T_j$ , alors après réduction modulo  $I$  (*i.e.* tensorisation par  $A/I$ ),  $\varphi$  induit un isomorphisme  $(A/I)^n \xrightarrow{\sim} I/I^2$ .

Nous montrons maintenant *i)* par récurrence sur  $n$ . Notons pour cela  $J := (f_1, \dots, f_{n-1})$ . On a une factorisation

$$(2.2.4.2) \quad A[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \text{Rees}^J(A)[T_n] \xrightarrow{\psi} \text{Rees}^I(A)$$

dans laquelle  $\psi$  envoie  $T_n$  sur  $f_n t$  et prolonge l'inclusion canonique de  $\text{Rees}^J(A)$  dans  $\text{Rees}^I(A)$ . Par hypothèse de récurrence, il suffira de vérifier que  $\text{Ker}(\psi)$  est égal à l'idéal  $L$  de  $\text{Rees}^J(A)[T_n]$  engendré par les éléments de la forme  $jT_n - f_n j t$  où  $j \in J$ .

Notons que  $\text{Ker}(\psi)$  est homogène. Soit  $P(T_n) = \sum_{k=0}^N j_k t^k T_n^{N-k}$  un élément homogène de degré  $N$  de  $\text{Ker}(\psi)$  (avec donc  $j_k \in J^k$ ). L'hypothèse de régularité nous dit que la multiplication par  $f_n$  sur  $A/J$  est injective. Ainsi, de l'égalité  $\sum_k j_k f_n^{N-k} = 0$  on tire que  $j_0 \in J$ . Par conséquent,  $P(T_n)$  est congru modulo l'idéal  $L$  à un polynôme  $\sum_{k=1}^N j_k t^k T_n^{N-k}$ . Maintenant, l'hypothèse de récurrence et l'équivalence *ii) ⇔ iii)* nous assurent que le morphisme de multiplication  $\text{Sym}_A^m(J) \rightarrow J^m$  est un isomorphisme. Modulo  $J$ , il se réduit en un isomorphisme  $\text{Sym}_{A/J}^m(J/J^2) \xrightarrow{\sim} J^m/J^{m+1}$ , et l'on a vu ci-dessus que  $J/J^2$  est libre sur  $A/J$ . Il s'ensuit que la multiplication par  $f_n$  est injective aussi sur  $J^m/J^{m+1}$ . Faisant  $m = 1$ , l'égalité  $\sum_{k \geq 1} j_k f_n^{N-k} = 0$  montre que  $j_1 \in J^2$  et par conséquent que  $P(T_n)$  est congru modulo  $L$  à un polynôme  $\sum_{k=2}^N j_k t^k T_n^{N-k}$ . Raisonnant par récurrence,  $P(T_n)$  est donc congru modulo  $L$  à une "constante"  $j_N t^N$ . Mais  $P(f_n) = 0$  implique que  $j_N = 0$ .  $\square$

Reprenons les notations du paragraphe 2.2.3. D'après la proposition, sous l'hypothèse que les  $(f_i)$  forment une suite régulière, on a un isomorphisme  $A[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i}] \xrightarrow{\sim} A(\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i})$  où  $A[\frac{f_1}{f_i}, \dots, \frac{f_n}{f_i}]$  est un raccourci pour  $A[U_1, \dots, U_n]/(U_1 f_i - f_1, \dots, U_n f_i - f_n)$  et l'isomorphisme envoie  $U_i$  sur l'élément  $f_j f_i^{-1}$  de  $A_{f_i}$ .

*Exemple :* Spécialisons au cas où  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  et  $I = (x_1, \dots, x_n)$  est l'idéal des fonctions s'annulant en l'origine  $o$  de l'espace affine  $X = \mathbb{A}_k^n$ . L'image du plongement  $\widetilde{\mathbb{A}}_{kI}^n \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n \times_k \mathbb{P}_k^{n-1}$  est donc le lieu des points de coordonnées (affines et homogènes)  $(x_1, \dots, x_n)[T_1 : \dots : T_n]$  vérifiant les égalités  $x_i T_j = x_j T_i$ . Pour les calculs futurs d'éclatements explicites, il est utile de voir  $\widetilde{\mathbb{A}}_{kI}^n$  comme réunion des  $n$  cartes affines  $D(x_i t) = \text{Spec}(k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]) \simeq \mathbb{A}_k^n$ . L'avantage de ces coordonnées est qu'elles dictent la règle de recollement de ces cartes. Par exemple, l'intersection de  $D(x_i t)$  avec  $D(x_j t)$  est l'ouvert affine de  $D(x_i t)$  où la coordonnée  $\frac{x_j}{x_i}$  est inversible, *i.e.*  $\text{Spec}(k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, (\frac{x_j}{x_i})^{\pm 1}, \dots, \frac{x_n}{x_i}])$ , qui s'identifie avec l'ouvert affine de  $D(x_j t)$  où la coordonnée  $\frac{x_i}{x_j}$  est inversible, *i.e.*  $\text{Spec}(k[x_j, \frac{x_1}{x_j}, \dots, (\frac{x_i}{x_j})^{\pm 1}, \dots, \frac{x_n}{x_j}])$ , en envoyant  $x_i$  sur  $x_j \cdot \frac{x_i}{x_j}$  et  $\frac{x_k}{x_i}$  sur  $\frac{x_k}{x_j} (\frac{x_i}{x_j})^{-1}$ . De plus, le morphisme  $\pi_I$  restreint à  $D(x_i t)$  est défini par  $x_j \mapsto x_i \cdot \frac{x_j}{x_i}$ . On remarque que la fibre de cette restriction au-dessus de l'origine

$o$  est l'hyperplan d'équation  $x_i = 0$  dans  $D(x_i t)$ . De plus,  $\pi_I$  induit un isomorphisme du complémentaire de cet hyperplan dans  $D(x_i t)$  sur son image, qui n'est autre que le complémentaire de l'hyperplan  $x_i = 0$  dans  $X = \mathbb{A}_k^n$ . Par recollement on en déduit que la fibre de  $\pi_I$  au-dessus de  $o$  est un espace projectif de dimension  $n - 1$ , tandis que  $\pi_I$  induit un isomorphisme  $\pi_I^{-1}(X \setminus \{o\}) \xrightarrow{\sim} X \setminus \{o\}$ . La fibre  $\pi_I^{-1}(o)$  est appelée "diviseur exceptionnel". Nous allons voir comment se généralisent ces considérations élémentaires.

**2.2.5 Éclatement d'un idéal inversible.** Soit  $\mathcal{I}$  un faisceau d'idéaux sur  $X$  qui est inversible en tant que  $\mathcal{O}_X$ -module. Alors en raisonnant localement on voit que le morphisme canonique  $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}^{\bullet}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$  est un isomorphisme. Il s'ensuit que l'éclatement  $\tilde{X}_Y = \mathbb{P}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$  est un *isomorphisme*.

**2.2.6 PROPOSITION.**— Si  $X$  noethérien admet un faisceau ample  $\mathcal{L}$ , alors  $\pi_Y$  est un morphisme projectif.

*Démonstration.* En effet, on peut alors trouver un épimorphisme  $\mathcal{O}_X^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$  ou encore, après torsion et en posant  $\mathcal{L}' := \mathcal{L}^{\otimes -m}$ , un épimorphisme  $\mathcal{L}'^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{I}$  et par conséquent un épimorphisme  $\mathrm{Sym}^{\bullet}(\mathcal{L}'^{N+1}) \twoheadrightarrow \mathrm{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$ . On en déduit un  $X$ -plongement  $\tilde{X}_Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}'^{N+1})$ . Or, on a bien-sûr  $\mathbb{P}(\mathcal{L}'^{N+1}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}^{N+1}) = \mathbb{P}_X^N$ , par le morphisme qui envoie un épimorphisme  $\mathcal{L}'^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$  avec  $\mathcal{F}$  inversible vers  $\mathcal{O}^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}'^{\vee}$ .  $\square$

**2.2.7 Functorialité des éclatements.** Partons d'un diagramme commutatif

$$(2.2.7.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xhookrightarrow{i'} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

et notons  $\mathcal{I}'$  l'idéal de  $Y'$  dans  $X'$ . Ce diagramme dit que le morphisme  $f^*\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}$  se factorise par  $\mathcal{I}'$ , et on en déduit un morphisme de  $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres graduées

$$(2.2.7.2) \quad f^*\mathrm{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Rees}^{\mathcal{I}'}(\mathcal{O}_{X'}).$$

Lorsque le diagramme 2.2.7.1 est *cartésien*, i.e. lorsque  $Y' = X' \times_X Y$ , le morphisme  $f^*\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}'$  est surjectif. En fait on a la relation  $\mathcal{I}' = f^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{X'}$  et on appelle parfois  $\mathcal{I}'$  l'*idéal image inverse*. Il ne faut pas le confondre avec l'image inverse  $f^*(\mathcal{I})$  du faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $\mathcal{I}$ . Dans cette situation, la surjectivité de  $f^*\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}'$  entraîne celle du morphisme (2.2.7.2). On en déduit alors une immersion fermée

$$\tilde{X}'_{Y'} \hookrightarrow X' \times_X \tilde{X}_Y.$$

Le membre de gauche est appelé *transformé strict de  $X'$  dans  $\tilde{X}_Y$*  et celui de droite est appelé *transformé total de  $X'$  dans  $\tilde{X}_Y$* . Le morphisme ci-dessus peut être aussi décrit par

le diagramme commutatif

$$(2.2.7.3) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{X}'_{Y'} & \xrightarrow{\pi_{Y'}} & X' \\ \widetilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \widetilde{X}_Y & \xrightarrow{\pi_Y} & X \end{array} .$$

**2.2.8 LEMME.**— *Supposons le diagramme (2.2.7.1) cartésien. Alors*

- i) *si  $f$  est plat, le diagramme ci-dessus est cartésien, i.e.  $\widetilde{X}'_{Y'} \xrightarrow{\sim} X' \times_X \widetilde{X}_Y$ .*
- ii) *si  $f$  est une immersion fermée, alors  $\widetilde{f}$  est aussi une immersion fermée.*

*Démonstration.* Le i) résulte du fait que si  $f$  est plat et le diagramme (2.2.7.1) cartésien, alors le morphisme des algèbres de Rees (2.2.7.2) est un isomorphisme. Pour le ii), on remarque que  $f_g$  est la composée  $\widetilde{X}'_{Y'} \hookrightarrow X' \times_X \widetilde{X}_Y \hookrightarrow X \times_X \widetilde{X}_Y = \widetilde{X}_Y$ .  $\square$

**2.2.9 Application.** Le ii) du lemme est très utile pour les calculs. Par exemple, soit  $k$  un corps et  $X$  une sous-variété (i.e. un sous- $k$ -schéma intègre) de  $\mathbb{A}_k^n$  passant par l'origine  $o$ , et de dimension  $> 0$ . D'après le ii) du lemme, l'éclaté  $\widetilde{X}_o$  s'identifie à un sous-schéma fermé de  $\widetilde{\mathbb{A}}_{k,o}^n$ . On sait aussi que ce sous-schéma est intègre, donc son ouvert non vide  $\pi_o^{-1}(X \setminus \{o\})$  y est dense. Ainsi, on peut retrouver  $\widetilde{X}_o$  comme l'adhérence de  $\pi_o^{-1}(X) \setminus \pi_o^{-1}(\{o\})$  dans  $\widetilde{\mathbb{A}}_{k,o}^n$  (en français : *le transformé strict est l'adhérence du transformé total privé du diviseur exceptionnel*). Il s'agit ici de l'adhérence naive (le sous-schéma fermé muni de la structure réduite). Pour la calculer, on raisonne dans les cartes affines "canoniques" de  $\widetilde{\mathbb{A}}_{k,o}^n$ . Soit  $I \subset k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$  l'idéal du transformé total  $\pi_o^{-1}(X) \cap D(x_i t)$ . Alors l'idéal  $J$  du transformé strict  $\widetilde{X}_o \cap D(x_i t)$  est le noyau de la composée

$$k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] \longrightarrow k[x_i^{\pm 1}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] / I.$$

En d'autres termes,

$$k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] / J = \left( k[x_i, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] / I \right)_{/x_i\text{-tors}} .$$

Nous verrons plus loin que ces formules sont valables même si  $X$  n'est pas intègre.

*Exemple :* Pour  $n = 2$ , prenons  $X$  la droite d'équation  $ax_1 + bx_2 = 0$ . Alors l'équation du transformé total de  $X$  dans  $D(x_1 t)$  est  $x_1(a + b\frac{x_2}{x_1}) = 0$  et celle du transformé strict est  $a + b\frac{x_2}{x_1} = 0$ . En recollant avec ce qui se passe dans  $D(x_2 t)$  on constate que  $\pi_o^{-1}(X)$  est la réunion du diviseur exceptionnel  $\pi_o^{-1}(o) \simeq \mathbb{P}_k^1$  et du transformé strict, lequel est une droite qui intersecte  $\mathbb{P}^1$  en le point de coordonnées homogènes  $[a : b]$ . Ainsi, l'éclatement de  $o$  dans  $\mathbb{A}_k^2$  "sépare" les droites passant par  $o$  selon leur direction.

*Exemple :* Toujours pour  $n = 2$ , prenons  $X$  la courbe plane cubique d'équation  $x_2^2 = x_1^2(x_1 - 1)$ . Elle a un point double en  $(0, 0)$  et les tangentes en ce point sont  $x_1 + x_2 = 0$  et  $x_1 - x_2 = 0$ . L'équation du transformé total de  $X$  dans  $D(x_1t)$  est  $x_1^2((\frac{x_2}{x_1})^2 - x_1 + 1) = 0$ . Celle du transformé strict dans cette même carte est donc  $(\frac{x_2}{x_1})^2 - x_1 + 1 = 0$ . C'est l'équation d'une courbe *non-singulière* qui intersecte le diviseur exceptionnel en les points  $[1 : 1]$  et  $[1 : -1]$ .

*Exemple :* Pour  $n = 3$ , prenons  $X$  la surface d'équation  $x_1x_2 = x_3^2$ . C'est un cône, avec une singularité isolée en  $(0, 0, 0)$ . On vérifie que le transformé strict  $\tilde{X}_o$  est donné respectivement par les équations  $\frac{x_2}{x_1} = (\frac{x_3}{x_1})^2$  sur  $D(x_1t)$ ,  $\frac{x_1}{x_2} = (\frac{x_3}{x_2})^2$  sur  $D(x_2t)$ , et  $\frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 1$  sur  $D(x_3t)$ . On remarque que la dernière carte  $\tilde{X}_o \cap D(x_3t)$  est contenue dans la réunion des deux autres. On en déduit que  $\tilde{X}_o$  est le recollement des plans affines  $\text{Spec}(k[x_1, \frac{x_3}{x_1}]) \simeq \mathbb{A}_k^2$  et  $\text{Spec}(k[x_2, \frac{x_3}{x_2}]) \simeq \mathbb{A}_k^2$  le long de l'isomorphisme  $\text{Spec}(k[x_1, (\frac{x_3}{x_1})^{\pm 1}]) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(k[x_2, (\frac{x_3}{x_2})^{\pm 1}])$  qui envoie  $\frac{x_3}{x_1}$  sur  $(\frac{x_3}{x_2})^{-1}$  et  $x_1 \cdot \frac{x_3}{x_1}$  sur  $x_2 \cdot \frac{x_3}{x_2}$ . En particulier,  $\tilde{X}_o$  est une surface *non-singulière*, et la fibre  $\pi_o^{-1}(o)$  dans  $\tilde{X}_o$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$ .

**2.2.10 THÉORÈME.**— Soit  $X$  un schéma (séparé),  $Y$  un sous-schéma d'idéal associé  $\mathcal{I}$ .

- i) Soit  $U$  l'ouvert complémentaire de  $Y$  dans  $X$ . La restriction de  $\pi_{\mathcal{I}}$  à  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(U)$  est un isomorphisme  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ .
- ii) L'idéal image inverse  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\tilde{X}_{\mathcal{I}}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}}(1)$ . En particulier, il est inversible (en tant que module).
- iii) Pour tout morphisme  $f : X' \rightarrow X$  tel que l'idéal image inverse  $f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$  est inversible, il existe un unique morphisme  $g : X' \rightarrow \tilde{X}_{\mathcal{I}}$  tel que  $f = \pi_{\mathcal{I}} \circ g$ .

On peut reformuler le ii) suivant le langage des sous-schémas fermés plutôt que celui des idéaux. Cela donne : le sous-schéma fermé  $\pi_Y^{-1}(Y) := Y \times_X \tilde{X}_Y$  est un diviseur sur  $\tilde{X}_Y$ . De plus pour tout morphisme  $X' \rightarrow X$ , tel que  $Y' := f^{-1}(Y)$  soit un diviseur sur  $X'$ , il existe un unique morphisme  $g : X' \rightarrow \tilde{X}_{\mathcal{I}}$  tel que  $f = \pi \circ g$ .

Le diviseur  $\pi^{-1}(Y)$  est appelé *diviseur exceptionnel*.

*Démonstration.* Comme l'immersion  $U \hookrightarrow X$  est un morphisme plat, le lemme précédent nous dit que  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(U) \rightarrow U$  s'identifie à l'éclatement de l'idéal  $\mathcal{I}\mathcal{O}_U$ . Or, celui-ci est l'idéal unité, donc inversible, et l'exemple 2.2.7 montre que c'est un isomorphisme.

Pour le ii) il suffit de raisonner localement ; on peut donc supposer  $X = \text{Spec}(A)$  affine. Dans ce cas le  $\mathcal{O}_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}}$ -idéal inverse de  $I$  est donné par l'idéal gradué  $I \cdot \text{Rees}^I(A) = I(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n)$ . L'inclusion  $I \text{Rees}^I(A) \hookrightarrow \text{Rees}^I(A)$  induit un isomorphisme des faisceaux associés, donc  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{X}_{\mathcal{I}}}(1)$ .

Pour le iii), notons  $\mathcal{I}' := f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$  et  $Y' = Y \times_X X'$  le sous-schéma associé. Dans le diagramme 2.2.7.3, le morphisme  $\pi_{Y'} = \pi_{\mathcal{I}'}$  est un isomorphisme puisque  $\mathcal{I}'$  est inversible. D'où la factorisation annoncée. Reste à prouver l'unicité. Soit  $U'$  l'ouvert  $X' \setminus Y'$ . Tout  $g$  factorisant  $f$  en  $\pi \circ g$  est bien déterminé sur  $U'$  puisque  $U' = f^{-1}(U)$  et en vertu du i).

Il suffira donc de prouver que deux morphismes  $g_1, g_2$ , de source  $X'$  et de but séparé, qui coïncident sur  $U'$  sont égaux. En d'autres termes, il faut voir que  $U'$  est schématiquement dense (cf preuve du théorème 1.2.4). Or  $U'$  étant le complémentaire d'un diviseur, il est schématiquement dense. [En détail : recouvrant le but, puis la source, par des schémas affines, on se ramène à une situation affine. L'idéal  $\mathcal{I}'$  étant inversible, on peut supposer que sa trace  $I'$  sur l'ouvert affine  $V' = \text{Spec}(A')$  considéré est un idéal principal  $I' = (f')$  avec  $f'$  régulier. Alors  $U' \cap V' = U'_f$  est encore affine d'anneau  $A_f$ . Or le morphisme  $A \rightarrow A_f$  est injectif puisque  $f$  est régulier.]  $\square$

**2.2.11 Exemple.** Supposons  $X = \text{Spec}(A)$  et  $I = (f_1, \dots, f_n)$ . Recouvrons  $\widetilde{X}_I$  par les ouverts affines  $D(f_i)$ . D'après le théorème, l'idéal  $\mathcal{I}' = \pi_I^{-1}(I)\mathcal{O}_{\widetilde{X}_I}$  du diviseur exceptionnel  $E$  est localement principal, engendré par une section régulière. On voit ici plus précisément que l'ouvert  $D(f_i)$  est exactement le lieu des points où la section  $\pi_I^* f_i$  est régulière et engendre cet idéal.

**2.2.12 Application :** le transformé strict est l'adhérence schématique du transformé total privé du diviseur exceptionnel. Ceci généralise la discussion du paragraphe 2.2.9 et montre que les calculs qui y sont expliqués sont encore valables sans supposer  $X$  intègre.

Pour commencer, rappelons la notion d'adhérence schématique. Plus généralement, étant donné un morphisme  $Y \xrightarrow{f} X$  de schémas noethériens, on appelle *image fermée* de  $f$  le sous-schéma fermé de  $X$  défini par le faisceau d'idéaux  $\text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y)$ . Son support est l'adhérence topologique de l'image physique de  $f$ . Lorsque  $Y$  est un sous-schéma de  $X$  (donc localement fermé, ou autrement dit,  $f$  est une immersion), on appelle aussi *adhérence schématique de  $Y$*  l'image fermée de  $f$ . *Un exemple.* Soit  $S$  un *trait*, i.e. le spectre d'un anneau  $R$  de valuation discrète, et  $X$  un  $S$ -schéma. Alors l'adhérence schématique de la *fibres générique* de  $X$  (i.e. la préimage du point générique de  $S$  dans  $X$ ) est le sous-schéma fermé de  $X$  défini par l'idéal de  $R$ -torsion de  $\mathcal{O}_X$ .

Soit maintenant  $X$  un schéma noethérien,  $Y, X'$  deux sous-schémas fermés de  $X$  et  $Y' := Y \times_X X'$ . D'après le ii) du lemme 2.2.8,  $\widetilde{X}'_{Y'}$  est fermé dans  $\widetilde{X}_Y$ . De plus, puisque, d'après le théorème ci-dessus,  $\pi_Y^{-1}(Y')$  est un diviseur dans  $\widetilde{X}'_{Y'}$ , son ouvert complémentaire est schématiquement dense dans  $\widetilde{X}'_{Y'}$ . Ceci montre que  $\widetilde{X}'_{Y'}$  s'identifie à l'adhérence schématique de  $\pi_Y^{-1}(X') \setminus \pi_Y^{-1}(Y)$ .

**2.2.13 COROLLAIRE.**— Soient  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  deux faisceaux d'idéaux sur  $X$ . Alors on a une factorisation  $\pi_{\mathcal{I}\mathcal{J}} : \widetilde{X}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} \xrightarrow{\pi} \widetilde{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$  dans laquelle  $\pi$  s'identifie à l'éclatement de  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  dans  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ .

Notons deux cas particuliers :

- si  $\mathcal{J}$  est inversible alors  $\pi$  est un isomorphisme.
- pour  $d \in \mathbb{N}$ , les éclatements  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}^d}$  et  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$  sont  $X$ -isomorphes.

*Démonstration.* Vérifions d'abord que le produit de deux idéaux est inversible si et seulement si chacun des deux est inversible. Seule la nécessité est à prouver. La question étant locale, soit  $A$  un anneau local et  $I, J$  deux idéaux dont le produit est principal  $IJ = fA$

avec  $f$  régulier. On peut donc écrire  $f = \sum_k i_k j_k$  et pour chaque  $k$  il y a un élément  $a_k$  tel que  $i_k j_k = a_k f$ . On a donc l'égalité  $\sum_k a_k = 1$  (puisque  $f$  est régulier) et par conséquent l'un des  $a_k$ , disons  $a_0$  est une unité, puisque  $A$  est local. Finalement, remplaçant  $i_0$  par  $i_0 a_0^{-1}$ , on a  $i_0 j_0 = f$ . En particulier,  $i_0$  et  $j_0$  sont réguliers. Soit alors  $i$  un élément de  $I$ . Ecrivons  $i j_0 = a f$ . Simplifiant par  $j_0$  (qui est régulier) on obtient  $i = i_0 a$ , donc  $I = i_0 A$  est inversible. De même  $J$  est inversible.

Maintenant l'existence de la factorisation de l'énoncé découle de la propriété universelle de l'éclatement  $\pi_{\mathcal{I}}$ . De cette même propriété, on déduit un  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ -morphisme  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} \xrightarrow{f} \widetilde{(X_{\mathcal{I}})}_{\mathcal{J}}$  où le second membre désigne l'éclaté de  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$  en l'idéal  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$ . D'après le lemme ci-dessous, l'idéal image inverse de  $\mathcal{I}$  sur  $\widetilde{(X_{\mathcal{I}})}_{\mathcal{J}}$  est inversible. En effet, il est localement principal (puisque  $\mathcal{I}$  l'est), et sa restriction au complémentaire du diviseur exceptionnel est inversible. On en déduit donc un  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ -morphisme  $\widetilde{(X_{\mathcal{I}})}_{\mathcal{J}} \xrightarrow{g} \widetilde{X}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ . Les composées  $g \circ f$  et  $f \circ g$  coïncident avec les morphismes identité sur des ouverts schématiquement denses, et sont donc les morphismes identité, ce qui prouve la seconde assertion.

Pour le premier cas particulier, on applique le lemme ci-dessous qui nous assure que l'idéal  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  est inversible, par le même argument que ci-dessus. Le second cas particulier s'obtient par induction sur  $d$ , mais il se prouve beaucoup plus simplement en remarquant que  $\text{Rees}^{\mathcal{I}^d}(\mathcal{O}_X) = (\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X))^{(d)}$ , cf 2.1.1.  $\square$

LEMME. – Soit  $X$  un schéma et  $\mathcal{I}$  un idéal localement principal sur  $X$ . Si la restriction de  $\mathcal{I}$  à l'ouvert complémentaire  $U$  d'un diviseur (plus généralement à un ouvert schématiquement dense  $U$ , si  $X$  est noethérien) est inversible, alors  $\mathcal{I}$  est inversible.

*Démonstration.* La question est locale, on peut donc supposer  $X = \text{Spec}(A)$  avec  $A$  local. L'idéal  $I$  est engendré par un élément  $f$ , et il s'agit de voir que cet élément est régulier. Soit  $h \in A$  tel que  $fh = 0$ . Par hypothèse  $U$  est de la forme  $\text{Spec}(A[g^{-1}])$  avec  $g$  régulier. (Dans le cas noethérien, tout ouvert  $U$  schématiquement dense contient un ouvert schématiquement dense de la forme  $\text{Spec}(A[g^{-1}])$ , cf EGA IV.20.2.12). Conformément à l'hypothèse d'inversibilité de  $\mathcal{I}$  sur  $U$ , on peut aussi supposer, quitte à restreindre encore  $U$ , que  $IA[g^{-1}]$  est engendré par un élément régulier  $f'$ . Comme  $f' \in fA[g^{-1}]$ , on a  $f'h = 0$ . Par régularité, on a donc  $h = 0$  dans  $A[g^{-1}]$ . Mais  $g$  étant aussi régulier, on a  $h = 0$  dans  $A$ .  $\square$

*Attention :* le fait que  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}^d} = \widetilde{X}_{\mathcal{I}}$  ne signifie pas que l'éclatement de  $\mathcal{I}$  coïncide avec celui de  $\sqrt{\mathcal{I}}$ . Par exemple, éclatons l'idéal  $(x^2, y)$  dans  $\mathbb{A}_k^2 = \text{Spec}(k[x, y])$ . Comme la suite  $(x^2, y)$  est régulière, on peut appliquer 2.2.4. On constate que  $\widetilde{\mathbb{A}}_{k\mathcal{I}}^2$  est recouvert par les deux cartes affines  $D(x^2t) = \text{Spec}(k[x, y, \frac{y}{x^2}]) = \text{Spec}(k[x, \frac{y}{x^2}]) \simeq \mathbb{A}_k^2$  et  $D(yt) = \text{Spec}(k[x, y, \frac{x^2}{y}]) = \text{Spec}(k[x, y, v]/(x^2 - yv))$  qui est un cône avec une singularité quadratique en  $(0, 0, 0)$ . En particulier,  $\widetilde{\mathbb{A}}_{k\mathcal{I}}^2$  est singulier. Notons aussi que le diviseur exceptionnel, donné par l'idéal  $(x^2)$  dans  $D(x^2t)$  et  $(y)$  dans  $D(yt)$  est un  $\mathbb{P}_k^1$  "épaissi", isomorphe à  $\mathbb{P}^1 \times \text{Spec}(k[x]/(x^2))$ . Par contre l'image réciproque de  $o$  est un  $\mathbb{P}_k^1$  comme dans l'éclatement de  $(x, y)$ .

Le corollaire ci-dessus admet la réciproque suivante.

**2.2.14 PROPOSITION.**— *La composée de deux éclatements d'idéaux de type fini est un éclatement.*

*Exemple :* Soit  $X = \mathbb{A}_k^2$ ,  $X'$  l'éclatement de  $X$  en l'idéal  $(x, y)$ , et  $X''$  l'éclatement de  $X'$  en le point qui dans la carte affine  $D(xt)$  est donné par l'idéal  $(x, \frac{y}{x})$ . C'est aussi l'éclatement de  $X'$  en l'idéal  $(x)(x, \frac{y}{x}) = (x^2, y)$  de cette même carte affine. Ainsi,  $X''$  s'identifie à l'éclatement de  $(x, y)(x^2, y) = (x^3, xy, y^2)$ .

*Démonstration.* (grandes lignes, cf Raynaud-Gruson, lemme 5.1.4) Considérons la composée  $(\widetilde{X}_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{J}}} \widetilde{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$  où  $\mathcal{J}$  est un idéal quasi-cohérent de type fini de  $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$ . D'après le corollaire précédent, il suffit de trouver un entier  $n$  tel que l'idéal  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I}^n)\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  soit de la forme  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{K})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  pour un idéal  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_X$ .

Pour simplifier nous supposons  $X$  affine égal à  $\text{Spec}(A)$ . Dans ce cas d'après le théorème plus haut,  $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  est ample<sup>2</sup>. On peut donc trouver  $n, N$  et un épimorphisme  $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}^N \rightarrow \pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I}^n)\mathcal{J}$ . Par adjonction on en déduit  $\mathcal{O}_X^N \rightarrow \pi_{\mathcal{I},*}(\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(\mathcal{I}^n)\mathcal{J}) \subset \pi_{\mathcal{I},*}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}(n))$ , c'est-à-dire  $N$  éléments de  $\Gamma(\widetilde{X}_{\mathcal{I}}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}(n))$ . Le problème est que le morphisme canonique  $I^n \rightarrow \Gamma(\widetilde{X}_{\mathcal{I}}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}(n))$  n'est pas surjectif en général. Cependant, comme dans la remarque qui suit le théorème 2.1.11, il est surjectif pour  $n$  assez grand. Il suffit alors de prendre pour  $K$  l'idéal de  $A$  inclus dans  $I^n$  engendré par  $N$  éléments de  $I^n$  d'image les  $N$  sections ci-dessus.  $\square$

Les résultats et les exemples ci-dessus suggèrent que les éclatements ont des comportements très variés (ils peuvent simplifier ou au contraire aggraver les singularités, etc.). Si l'on se restreint à des schémas intègres, le théorème suivant montre qu'éclater un idéal est un procédé très (trop) général.

**2.2.15 THÉORÈME.**— *Soit  $f : Z \rightarrow X$  un morphisme projectif birationnel entre variétés quasi-projectives sur un corps  $k$  (plus généralement on peut supposer  $Z$  et  $X$  intègres noethériens et  $X$  admettant un faisceau ample). Alors  $f$  est isomorphe à l'éclatement d'un idéal de  $\mathcal{O}_X$ .*

Avant la preuve, on peut remarquer que pour un schéma intègre  $X$ , on peut éclater des idéaux fractionnaires (ie des sous- $\mathcal{O}_X$ -modules de type fini de  $\mathcal{M}_X$ ). En effet pour un tel idéal  $\mathcal{I}$ , la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre graduée Rees <sup>$\mathcal{I}$</sup>  $(\mathcal{O}_X) = \bigoplus \mathcal{I}^n$  reste quasi-cohérente. Son Proj est noté  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ , il est intègre, la projection  $\pi_{\mathcal{I}}$  est birationnelle, l'image inverse  $f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$  est un idéal fractionnaire *invertible* de  $\mathcal{M}_{\widetilde{X}_{\mathcal{I}}}$ , et  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$  est universel pour ces propriétés. Si de plus,  $X$  possède des faisceaux amples, alors on peut trouver un idéal invertible  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_X$  tel que  $\mathcal{K}\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  (prendre  $\mathcal{K}$  admettant un morphisme non nul vers le faisceau  $\mathcal{J}$  des dénominateurs de  $\mathcal{I}$ ). Dans ce cas, l'éclatement  $\pi_{\mathcal{I}} : \widetilde{X}_{\mathcal{I}} \rightarrow X$  est isomorphe à l'éclatement "ordinaire"  $\pi_{\mathcal{K}\mathcal{I}} : \widetilde{X}_{\mathcal{K}\mathcal{I}} \rightarrow X$ , de sorte que ce procédé d'éclatement d'idéaux invertibles n'est pas plus général que celui des idéaux ordinaires.

<sup>2</sup>Pour  $X$  général cet idéal est "relativement ample" au sens de EGA II.4.6, et on s'en tire aussi bien en utilisant EGA.II.4.6.8

*Démonstration.* 1- On commence par montrer l'existence d'un faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $Z$  tel que  $Z \simeq \text{Proj}(\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet})$  où  $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet} = \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{n>0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  est engendrée en degré 1.

Pour cela, commençons avec  $\mathcal{L}$  très ample relativement à  $X$ . On sait que chaque  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  est cohérent sur  $X$  (théorème 2.1.11) mais on ne sait pas si  $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet}$  est engendrée en degré 1. Supposons d'abord  $X = \text{Spec}(A)$  affine. Alors  $Z$  est de la forme  $\text{Proj}(S_\bullet)$  pour  $S_\bullet$  engendré en degré 1, et avec  $\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$ . L'algèbre  $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet}$  s'identifie alors à  $S' = \Gamma_\bullet(\mathcal{O}) = \bigoplus_n \Gamma(Z, \mathcal{O}(n))$ . On a déjà vu dans la remarque après le théorème 2.1.11 que  $S'$  coïncide avec  $S$  en degrés suffisamment grands et qu'il existe donc un entier  $d$  tel que  $\text{Proj}(S'^{(d)}) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(S) = Z$ . Or,  $S'^{(d)}$  n'est autre que  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}^{\otimes d},\bullet}$ . Revenant au cas quasi-projectif, on peut recouvrir  $A$  par un nombre fini d'ouverts affines, ce qui nous donne un entier  $d$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes d}$  satisfait nos requêtes.

2- Comme  $Z$  est intègre,  $\mathcal{L}$  se plonge dans  $\mathcal{M}_Z$ , d'où un plongement  $f_*\mathcal{L} \hookrightarrow f_*\mathcal{M}_Z$ . Or,  $f$  étant birationnel, on a  $f_*\mathcal{M}_Z = \mathcal{M}_X$ . Ainsi  $f_*\mathcal{L}$  est isomorphe à un faisceau d'idéaux fractionnaires (non inversible a priori).

3-  $Z \xrightarrow{f} X$  est isomorphe à l'éclatement de  $f_*(\mathcal{L})$ .

Il nous faut identifier  $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet}$  à  $\text{Rees}^{f_*(\mathcal{L})}(\mathcal{O}_X)$ , et pour cela identifier  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  à la puissance  $n$ -ème  $(f_*(\mathcal{L}))^n$  de l'idéal fractionnaire  $f_*(\mathcal{L})$ . Tout d'abord, on peut identifier  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  à la puissance  $n$ -ème  $\mathcal{L}^n$  de l'idéal fractionnaire  $\mathcal{L}$ . On a alors une inclusion  $f_*(\mathcal{L})^n \subset f_*(\mathcal{L}^n)$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{S}_{\mathcal{L},\bullet}$  est engendrée en degré 1, on a un épimorphisme  $f_*(\mathcal{L})^{\otimes n} \rightarrow f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ . D'où l'égalité  $f_*(\mathcal{L})^n = f_*(\mathcal{L}^n)$  d'idéaux fractionnaires. □

## 2.3 Premières applications

**2.3.1 Prolongement d'applications rationnelles 1.** Soit  $X$  un schéma,  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible et  $s_0, \dots, s_n$  des sections, pas nécessairement génératrices. Notant  $X_{s_i}$  l'ouvert où la section  $s_i$  ne s'annule pas et, par conséquent, fournit une trivialisations  $s_i : \mathcal{O}_{X_{s_i}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{X_{s_i}}$ , on obtient  $n$  sections  $s_j/s_i \in \Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X)$  d'où un morphisme  $X_{s_i} \rightarrow \mathbb{A}^n = D(T_i) \subset \mathbb{P}^n$ . Ces morphismes se recollent en  $U := \bigcup_i X_{s_i} \rightarrow \mathbb{P}^n$ .

On ne peut pas prolonger ce morphisme à  $X$ , mais on peut le prolonger après éclatement. En effet, soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$  le sous- $\mathcal{O}_X$ -module engendré par les  $s_i$ . Il n'est plus inversible, mais il le devient sur l'éclatement  $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$  de l'idéal  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1} \subset \mathcal{O}_X$ . Les sections  $\pi^*s_i$  de  $\pi^*\mathcal{L}$  engendrent donc un sous-module inversible et définissent un morphisme  $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Par construction  $\pi$  induit un isomorphisme  $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ , et identifiant  $U$  à  $\pi^{-1}(U)$ , le morphisme ainsi construit prolonge le précédent.

**2.3.2 Prolongement d'applications rationnelles 2.** Soit  $\mathcal{I}$  un faisceaux d'idéaux sur  $X$  engendré par des sections  $f_0, \dots, f_n$ . Soit  $U$  le complémentaire du fermé défini par  $\mathcal{I}$ . C'est le lieu où les  $f_i$  ne s'annulent pas toutes simultanément. Elles définissent donc un morphisme  $U \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Ici aussi, celui-ci ne se prolonge pas à  $X$  mais se prolonge à l'éclatement  $\tilde{X}_{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $X$ . Cet éclatement est en quelque sorte la modifcation minimale à apporter à  $X$  pour pouvoir prolonger le morphisme. Plus précisément, on a



PROPOSITION. – Avec les notations ci-dessus, le morphisme  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathbb{P}^n \times X$  est une immersion fermée, et identifie  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$  à l'adhérence schématique du graphe de  $U \longrightarrow \mathbb{P}^n$ .

*Démonstration.* Le morphisme en question est une immersion fermée puisqu'il est induit par  $\mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n] \longrightarrow \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$  qui est par construction surjectif. La restriction de ce morphisme à  $U$  est le graphe de  $U \longrightarrow \mathbb{P}^n$ . Or  $U$  est schématiquement dense dans  $\widetilde{X}_{\mathcal{I}}$ , étant le complémentaire d'un diviseur.  $\square$

D'après la preuve, on peut même remplacer  $U$  par un de ses ouverts schématiquement denses. On peut aussi partir avec des sections *méromorphes* de  $\mathcal{I}$ , i.e. des sections de  $\mathcal{I} \otimes \mathcal{M}_X$ . Voici une application.

**2.3.3 Exemple.** Soit  $S$  un trait d'anneau  $R$  d'uniformisante  $\varpi$ , de point générique  $\eta$  et de point fermé  $s$  (on pourra penser à  $R = \mathbb{Z}_p$ ). Notons  $0_{\varpi}$  le point  $[0 : 1]$  de la fibre spéciale  $\mathbb{P}_s^1$  de  $\mathbb{P}_S^1$ . Ainsi l'idéal de  $0_{\varpi}$  est "engendré" par la section méromorphe  $x/y$  et  $\varpi$ . On peut donc réaliser l'éclatement de  $\mathbb{P}_S^1$  en  $0_{\varpi}$  comme l'adhérence schématique  $\widetilde{\mathbb{P}^1}$  dans  $\mathbb{P}_S^1 \times \mathbb{P}_S^1$  du graphe de l'application  $[x : y] \in \mathbb{P}_{\eta}^1 \mapsto [x : \varpi y] \in \mathbb{P}_{\eta}^1$ , i.e. de la partie localement fermée  $\{([x : y], [x : \varpi y]), \text{ avec } [x : y] \in \mathbb{P}_{\eta}^1\}$ . Plus précisément, l'éclatement  $\pi_{0_{\varpi}}$  s'identifie à la composée  $\widetilde{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow \mathbb{P}_S^1 \times \mathbb{P}_S^1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_S^1$ . Maintenant, on s'aperçoit que  $\widetilde{\mathbb{P}^1}$  est aussi l'adhérence de l'image de  $[x, y] \in \mathbb{P}_{\eta}^1 \mapsto ([\varpi x, y], [x, y]) \in \mathbb{P}_{\eta}^1 \times \mathbb{P}_{\eta}^1$ . Il s'ensuit que la composée  $\widetilde{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow \mathbb{P}_S^1 \times \mathbb{P}_S^1 \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}_S^1$  s'identifie à l'éclatement du point  $\infty_{\varpi} = [1, 0]$  de  $\mathbb{P}_s^1$ . On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\mathbb{P}^1} & \\ \pi_{0_{\varpi}} \swarrow & & \searrow \pi_{\infty_{\varpi}} \\ \mathbb{P}_S^1 & \text{---} & \mathbb{P}_S^1 \\ & [x:y] \mapsto [x:\varpi y] & \end{array}$$

On peut donner une description modulaire de  $\widetilde{\mathbb{P}^1}$ . En effet, l'image du morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$$

(dédit de l'épimorphisme universel  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ ) est justement l'idéal définissant le point  $0_{\varpi}$ . Utilisant le fait que le schéma  $\widetilde{\mathbb{P}^1}$  est l'éclatement de cet idéal, on voit qu'il classifie les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L}' & \longrightarrow & \mathcal{L} \end{array}$$

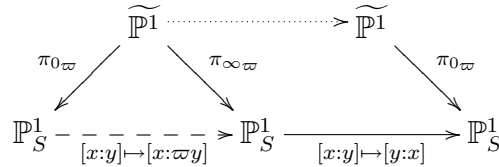
avec  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  inversibles et le morphisme du haut donné par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$ . Les morphismes d'éclatements  $\pi_{0_{\varpi}}$  et  $\pi_{\infty_{\varpi}}$  vers  $\mathbb{P}_S^1$  consistent en l'oubli de l'une ou l'autre colonne de ce diagramme.

*La fin de cette section n'a pas été vue en cours*

**2.3.4 Prolongation de l'action d'un groupe.** Donnons-nous un schéma intègre  $X$  et une action d'un groupe fini (abstrait)  $G$  sur un ouvert non vide  $U$  de  $X$ . Lorsque  $X$  est affine, on voit facilement que cette action se prolonge au normalisé de  $X$ , lequel est (dans la pratique, ie si  $X$  est excellent) fini sur  $X$ . Mais la situation se complique dans le cas où  $X$  n'est pas affine.

Reprenons l'exemple précédent avec  $\mathbb{P}^1$  sur un trait  $S$ . Regardons l'action du groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur la fibre générique  $\mathbb{P}^1_\eta$  donnée par  $\varphi : [x, y] \mapsto [\varpi y, x]$  (donc la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ). Le morphisme  $\varphi$  ne se prolonge pas à  $\mathbb{P}^1_S$  en entier, mais se prolonge au complémentaire du point fermé  $0_\varpi$  de la fibre spéciale  $\mathbb{P}^1_s$ . Il va donc falloir éclater ce point. En fait cela suffit comme le montre le diagramme où on utilise la factorisation  $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}.$$



L'existence de la flèche en pointillés découle de la propriété universelle des éclatements. Le fait que son carré est l'identité est automatique par densité schématique de la fibre générique.

**2.3.5 Séparation de composantes irréductibles.** Soit  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$  réunion de deux sous-schémas fermés  $Z$  et  $Z'$  de  $X$ , aucun des deux n'étant contenu dans l'autre. Soit  $\widetilde{X}$  l'éclatement de  $Z \cap Z'$ . Alors le transformé strict  $\widetilde{Y}$  est somme *disjointe* des transformés stricts  $\widetilde{Z}$  et  $\widetilde{Z}'$ .

En effet, notons  $V$ , resp.  $V'$  l'ouvert de  $X$  complémentaire de  $Z$ , resp.  $Z'$  et  $U = V \cup V'$  l'ouvert au-dessus duquel l'éclatement  $\pi$  est un isomorphisme. Notons aussi  $\widetilde{V}$  l'ouvert de  $\widetilde{X}$  où le diviseur exceptionnel  $E$  est localement engendré par une section régulière de l'idéal définissant  $Z$ . De même pour  $\widetilde{V}'$ . On a alors  $\widetilde{X} = \widetilde{V} \cup \widetilde{V}'$  et  $\widetilde{V} \setminus E = \pi^{-1}(V)$ . L'hypothèse que  $Z$  et  $Z'$  ne se contiennent pas l'un l'autre implique la même propriété pour  $\widetilde{V}$  et  $\widetilde{V}'$ . On sait que  $\widetilde{Z}$  s'identifie à l'adhérence schématique de  $\pi^{-1}(U \cap Z)$  dans  $\widetilde{X}$ . Son support est donc inclus dans l'adhérence topologique de  $\pi^{-1}(U \setminus V)$ , donc dans  $\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}$ . De même  $\widetilde{Z}'$  est supporté sur  $\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}$ . Or on a  $(\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}) \cap (\widetilde{X} \setminus \widetilde{V}') = \emptyset$ .

### 3 Compléments sur morphismes et régularité

**Convention :** Pour simplifier, tous les schémas rencontrés seront supposés localement noethériens, et les morphismes seront séparés et de type fini, ou locaux.

#### 3.1 Faisceaux conormaux. Immersions régulières. Schémas réguliers.

**3.1.1 Filtration  $\mathcal{I}$ -adique.** Commençons par quelques rappels d'algèbre commutative. Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal. On peut munir tout  $A$ -module  $M$  de la filtration  $I$ -adique (décroissante)  $(I^n M)_{n \in \mathbb{N}}$

$$M \supset IM \supset I^2 M \supset \dots$$

Lorsque  $A = M$ , c'est une filtration de l'anneau  $A$ . Rappelons deux propriétés de ces filtrations :

- i) *Lemme d'Artin-Rees :* Supposons  $A$  noethérien et  $M$  de type fini. Soit  $N$  un sous-module de  $M$ . Alors il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $I^n M \cap N = I^{n-n_0}(I^{n_0} M \cap N)$ .
- ii) *Théorème d'intersection de Krull :* Supposons  $A$  noethérien,  $M$  de type fini, et  $I$  contenu dans tous les idéaux maximaux de  $A$ . Alors la filtration  $I$ -adique sur  $M$  est *séparée*, c-à-d que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = \{0\}$ . (Cela se déduit du lemme d'Artin-Rees et du lemme de Nakayama).

On définit maintenant

- le *gradué associé*  $gr^I(M) := M/IM \oplus IM/I^2 M \oplus I^2 M/I^3 M \oplus \dots = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n M/I^{n+1} M$ . C'est un  $A/I$ -module gradué, et lorsque  $M = A$ , c'est une  $A/I$ -algèbre graduée.
- le *module de Rees associé*  $Rees^I(M) := M \oplus IM \oplus I^2 M \oplus \dots = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n M$ . C'est un  $A$ -module gradué, et lorsque  $M = A$ , c'est une  $A$ -algèbre graduée qu'on déjà rencontrée.

On a évidemment un isomorphisme canonique de  $A/I$ -modules gradués :

$$(3.1.1.1) \quad A/I \otimes_A Rees^I(M) \xrightarrow{\sim} gr^I(M)$$

qui est un isomorphisme de  $A/I$ -algèbres graduées lorsque  $M = A$ .

La propriété universelle d'une algèbre symétrique nous fournit deux morphismes de  $A$ -algèbres, resp.  $A/I$ -algèbres, graduées

$$(3.1.1.2) \quad \text{Sym}_A(I) \longrightarrow Rees^I(A) \quad \text{et} \quad \text{Sym}_{A/I}(I/I^2) \longrightarrow gr^I(A)$$

dont le second se déduit du premier par tensorisation  $A/I \otimes -$ . Ces morphismes sont clairement *surjectifs*.

Ces constructions sont compatibles à la localisation et plus généralement aux changements de base plats. En effet, pour toute  $A$ -algèbre  $A'$  plate sur  $A$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , en notant  $I' := IA$  l'idéal de  $A'$  engendré par  $I$  et  $M' := A' \otimes_A M$ , on a des isomorphismes canoniques  $A' \otimes_A (I^n M) \xrightarrow{\sim} I'^n M'$  et

$$(3.1.1.3) \quad (A'/I') \otimes_{A/I} (I^n M/I^{n+1} M) \xrightarrow{\sim} I'^n M'/I'^{n+1} M'$$

Grâce à la compatibilité à la localisation, on peut faisceautiser les constructions précédentes comme suit. Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée de schémas et soit  $\mathcal{I} := \text{Ker}(\mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$  le faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules correspondant sur  $X$ . Tout  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{M}$  est muni de sa filtration  $\mathcal{I}$ -adique  $(\mathcal{I}^n\mathcal{M})_{n \in \mathbb{N}}$ , à laquelle on associe le  $\mathcal{O}_X$ -module gradué  $\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{M}) := \bigoplus_n \mathcal{I}^n\mathcal{M}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{M}$  et le  $\mathcal{O}_X$ -module de Rees  $\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n\mathcal{M}$ . Lorsque  $\mathcal{M}$  est quasi-cohérent sur  $X$ , tous ces faisceaux le sont aussi. En particulier, si  $U = \text{Spec}(A)$  est un ouvert affine et  $I = \mathcal{I}(U)$  l'idéal donnant l'immersion fermée  $U \cap Y \hookrightarrow U$ , on a alors  $\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{M})(U) = \text{gr}^I(\mathcal{M}(U))$ , etc. Les isomorphismes (3.1.1.1) sur les différentes cartes affines induisent alors

$$(3.1.1.4) \quad i^*(\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} i^{-1}(\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{M})).$$

De même, les morphismes surjectifs (3.1.1.2) induisent des épimorphismes

$$(3.1.1.5) \quad (i) \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}) \longrightarrow \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) \text{ et } (ii) \text{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(i^{-1}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) \longrightarrow i^{-1}(\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)).$$

Par la suite, on fera parfois l'abus de notation de supprimer le  $i^{-1}$  comme c'est souvent le cas dans la littérature.

*Interprétation géométrique de  $\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$ .* Soit  $\tilde{X}_Y \xrightarrow{\pi_Y} X$  l'éclatement de  $X$  le long de  $Y$ . L'isomorphisme (ii) ci-dessus indentifie le diviseur exceptionnel  $\pi_Y^{-1}(Y) \longrightarrow Y$  à  $\text{Proj}(\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X))$ .

**3.1.2 DÉFINITION.**— Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée et soit  $\mathcal{I} := \text{Ker}(\mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y)$  le faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules correspondant sur  $X$ . Le  $\mathcal{O}_Y$ -module quasi-cohérent

$$\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{Y/X} := i^*(\mathcal{I}) = i^{-1}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

sur  $Y$  est appelé faisceau conormal<sup>3</sup> de  $Y$  dans  $X$ .

**3.1.3 Exemples.** (i) Supposons que  $Y = \{x\}$  est un point fermé de  $X$ . Alors  $\mathcal{N}_{Y/X} = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  est l'espace cotangent de  $X$  en  $x$  (un  $\kappa(x)$ -espace vectoriel).

(ii) Supposons que  $Y = \mathbb{A}_k^m = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_m]) \subset \mathbb{A}_k^n = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]) = X$  avec  $k$  un corps. Alors on vérifie que l'application  $k[T_1, \dots, T_m]$ -linéaire

$$\begin{aligned} k[T_1, \dots, T_m]^{n-m} &\rightarrow \mathcal{N}_{Y/X} = (T_{m+1}, \dots, T_n)/(T_{m+1}, \dots, T_n)^2 \\ (P_{m+1}, \dots, P_n) &\mapsto \sum_{i=m+1}^n T_i P_i \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Ainsi  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est ici libre de rang  $n - m$ .

(iii) Supposons que  $Y$  est un diviseur dans  $X$ . Dans ce cas  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est un faisceau inversible sur  $Y$ , puisque que l'idéal  $\mathcal{I}$  est lui-même inversible sur  $X$ .

<sup>3</sup>La notation est ici celle de EGA IV. Dans Hartshorne, cette notation désigne le faisceau normal (le dual du conormal)

**3.1.4 Functorialité du conormal.** Comme nos schémas sont généralement supposés noethériens,  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est un faisceau cohérent sur  $Y$ . On remarque que si

$$(3.1.4.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

est un diagramme commutatif, on a un morphisme canonique

$$(3.1.4.2) \quad g^* \mathcal{N}_{Y/X} \longrightarrow \mathcal{N}_{Y'/X'}.$$

En effet, il suffit de le construire dans le cas affine où il est induit par le morphisme  $A' \otimes_A I \longrightarrow I'$  avec des notations évidentes. Lorsque le diagramme est cartésien, ce qui dans le cas affine revient à demander que  $I' = IA'$ , ce morphisme est évidemment surjectif. Il y a deux situations importantes où c'est même un isomorphisme.

**3.1.5 PROPOSITION.**— *Avec les notations précédentes, supposons que l'on est dans l'une des deux situations i) ou ii) ci-dessous :*

- i) *Le diagramme (3.1.4.1) est cartésien et  $f$  est plat.*
- ii) *Le diagramme (3.1.4.1) s'insère dans un diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' & \xrightarrow{p'} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

où  $p \circ i = \text{Id}_Y$ , et les deux carrés sont cartésiens.

Alors le morphisme (3.1.4.2) est un isomorphisme.

*Démonstration.* Dans les deux cas il suffit de traiter le cas affine. Dans la situation i), c'est un cas particulier de (3.1.1.3). Dans la situation ii), posons  $Y = \text{Spec}(B)$ ,  $X = \text{Spec}(A)$ , et  $I$  un idéal de  $A$  tel que  $B \longrightarrow A \longrightarrow A/I$  soit un isomorphisme. On a alors  $A = B \oplus I$ . Supposons de plus  $Y' = \text{Spec}(B')$ . Alors  $A' = B' \oplus (B' \otimes_B I)$ . En particulier, le morphisme surjectif  $A' \otimes_A I = B' \otimes_B I \longrightarrow I' = IA'$  est un isomorphisme, et on en déduit que  $A' \otimes_A (I/I^2) \xrightarrow{\sim} I'/I'^2$ . On remarquera en revanche que, sans hypothèse supplémentaire, le morphisme canonique  $A' \otimes_A \text{gr}^I(A) \longrightarrow \text{gr}^{I'}(A')$  n'a pas de raison d'être bijectif.  $\square$

**3.1.6 DÉFINITION.**— *L'immersion  $i : Y \hookrightarrow X$  est dite régulière si le  $\mathcal{O}_Y$ -module  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est localement libre (de rang fini) et le morphisme (3.1.1.5) (ii) est un isomorphisme.*

*Exemple :* si  $Y$  est un diviseur,  $i$  est une immersion régulière.

La proposition suivante décrit le diviseur exceptionnel de l'éclatement d'un sous-schéma fermé régulièrement immergé. Cela généralise l'observation qu'on avait faite dans l'exemple de l'éclatement d'un point de l'espace affine.

**3.1.7 PROPOSITION.**— Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée régulière et soit  $Y'$  le diviseur exceptionnel de  $\tilde{X}_Y$  (l'image réciproque de  $Y$ ).

i) Il y a un isomorphisme canonique  $Y' \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$  de  $Y$ -schémas.

ii) Sous cette identification, le faisceau inversible  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})}(1)$  correspond à  $\mathcal{N}_{Y'/\tilde{X}_Y}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal de  $Y$ . On a  $Y' = i^* \text{Proj}(\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)) = \text{Proj}(i^* \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)) = \text{Proj}(i^{-1} \text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X))$ . Or  $i$  étant supposée régulière, le morphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -algèbres

$$\text{Sym}_{\mathcal{O}_Y}(i^* \mathcal{I}) \longrightarrow i^{-1} \text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme. D'où la première assertion puisque  $\mathcal{N}_{Y/X} = i^*(\mathcal{I})$ . Le diviseur  $Y'$  est défini par le faisceau d'idéaux associé à l'idéal gradué  $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_n \mathcal{I}^{n+1}$  de  $\text{Rees}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$ . Il s'ensuit que  $i'^*(\mathcal{I}')$  est le faisceau de modules associé au module gradué  $\bigoplus_n \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$  sur  $i^{-1} \text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)$ . Le morphisme de modules gradués de ce dernier vers  $\text{gr}^{\mathcal{I}}(\mathcal{O}_X)(1)$  induit un isomorphisme  $i'^*(\mathcal{I}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(i^* \mathcal{I})}(1)$ .  $\square$

Revenons à la définition d'une immersion régulière. On remarque que les conditions requises sont de nature locale. Plus précisément, étant donné un point  $x$  de  $Y$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$  tel que l'immersion  $Y \cap U \hookrightarrow U$  soit régulière.

ii) l'immersion fermée  $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,x}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$  est régulière.

Dans ces conditions on dit que l'immersion  $Y \hookrightarrow X$  est *régulière au point  $x$* . On voit alors immédiatement qu'une immersion est régulière si et seulement si elle l'est en tout point. Il suffit donc de comprendre le cas où  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(A/I)$  avec  $A$  un anneau local. Dans ce cas on a :

**3.1.8 PROPOSITION.**— Soit  $A$  anneau local noethérien et  $I$  un idéal distinct de  $A$ . L'immersion  $\text{Spec}(A/I) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  est régulière (on dit aussi que  $I$  est un idéal régulier de  $A$ ) si et seulement si il existe une famille de générateurs  $f_1, \dots, f_m$  de  $I$  tels que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

i) le morphisme canonique  $(A/I)[T_1, \dots, T_m] \longrightarrow \text{gr}^I(A)$  défini par les  $f_i$  est un isomorphisme. (Ici les  $T_i$  sont des indéterminées.)

ii) la suite  $(f_1, \dots, f_m)$  est régulière, cf 2.2.4.

Si l'on suppose de plus donnée une sous-algèbre  $B$  de  $A$  telle que  $B \longrightarrow A \longrightarrow A/I$  soit un isomorphisme, alors ces conditions équivalent à

iii) le morphisme canonique  $B[[T_1, \dots, T_m]] \longrightarrow \varprojlim_n (A/I^n)$  défini par les  $f_i$  est un isomorphisme.

Dans ces conditions, on a  $\dim(A/I) = \dim(A) - m$ .

Notons la conséquence suivante de l'équivalence i)  $\Leftrightarrow$  ii) : dans un anneau local noethérien, le fait qu'une suite d'éléments soit régulière ne dépend pas de l'ordre de ces éléments.

*Démonstration.* La régularité de l'immersion  $\text{Spec}(A/I) \hookrightarrow \text{Spec}(A)$  est clairement équivalente à l'existence d'une famille  $f_1, \dots, f_n$  de  $I$  vérifiant le point i) (prendre des  $f_i$  dont les images dans  $I/I^2$  en forment une base).

Par ailleurs, étant donnée une telle famille, l'implication ii)  $\Rightarrow$  i) découle de la proposition 2.2.4

Prouvons maintenant l'implication i)  $\Rightarrow$  ii). Pour cela, on procède par récurrence comme dans la proposition 2.2.4. Posons  $J := (f_1, \dots, f_{m-1})$  et considérons la factorisation

$$A[T_1, \dots, T_m] \longrightarrow \text{Rees}^J(A)[T_m] \xrightarrow{\alpha} \text{Rees}^I(A)$$

dans laquelle  $\alpha$  envoie  $T_m$  sur  $f_m t$  et prolonge l'inclusion canonique de  $\text{Rees}^J(A)$  dans  $\text{Rees}^I(A)$ . En tensorisant par  $A/I$ , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/J[T_1, \dots, T_{m-1}] \otimes_A A/(f_m)[T_m] & \xrightarrow{\psi_J \otimes \text{Id}} & \text{gr}^J(A) \otimes_A A/(f_m)[T_m] \\ \parallel & & \downarrow \beta \\ A/I[T_1, \dots, T_m] & \xrightarrow{\psi_I} & \text{gr}^I(A) \end{array}$$

Par hypothèse,  $\psi_I$  est un isomorphisme. Le diagramme montre que  $\psi_J$  est injectif, et donc est un isomorphisme. L'hypothèse de récurrence nous dit alors que  $(f_1, \dots, f_{m-1})$  est une suite régulière. Il nous reste à prouver que  $f_m$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A/J$  (i.e. que la multiplication par  $f_m$  est injective sur  $A/J$ ). Pour cela, on remarque que  $\beta$  est bijective. Abrégeons  $f := f_m$  et  $T := T_m$ , et donnons-nous un élément  $a \in A$  tel que  $af \in J$ , disons  $af + j = 0$ . Cela implique que l'image de l'élément de degré 1  $aT \oplus j$  de  $\text{gr}^J(A) \otimes_A A/(f)[T]$  est nulle dans  $\text{gr}^I(A)$ , et par injectivité de  $\beta$  on en déduit que  $a \in I = (f) + J$  et  $j \in JI$ . Écrivons alors  $a = a'f + j'$ . L'élément de degré 2  $a'T^2 \oplus j'T \oplus j$  de  $\text{gr}^J(A) \otimes_A A/(f)[T]$  a son image nulle dans  $\text{gr}^I(A)$ , et par injectivité de  $\beta$  on en déduit que  $a' \in I = (f) + J$ , et par conséquent que  $a \in (f^2) + J$ . Continuant ce dévissage, on prouve par récurrence que  $a \in (f^n) + J$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or, l'anneau  $A/J$  est noethérien, donc la filtration  $f$ -adique est séparée (i.e.  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n A/J = \{0\}$ ) par le théorème de Krull rappelé plus haut, donc  $a \in J$ . On en déduit que  $f$  n'est pas diviseur de zéro dans  $A/J$ .

L'équivalence entre ii) et iii) (sous les bonnes hypothèses) est facile et laissée au lecteur.

Enfin, l'égalité des dimensions provient du fait que si  $f \in A$  n'est pas diviseur de 0, alors  $\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1$ .  $\square$

Dans le cas particulier où  $I$  est l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $A$ , on a plus :

**3.1.9 PROPOSITION.**— *Si  $A$  est un anneau local noethérien d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , alors on a équivalence entre :*

- i) *L'idéal  $\mathfrak{m}$  est régulier.*
- ii)  *$\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$  (i.e. l'anneau local  $A$  est régulier).*

*Démonstration.* Soit  $d = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ , et  $f_1, \dots, f_d$  des éléments de  $\mathfrak{m}$  formant une base de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  sur  $A/\mathfrak{m}$ . Par le lemme de Nakayama, on voit qu'ils engendrent  $\mathfrak{m}$ . Considérons le morphisme gradué surjectif associé

$$(3.1.9.3) \quad A/\mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d] \longrightarrow \text{gr}^{\mathfrak{m}}(A).$$

Par la théorie du polynôme de Hilbert-Samuel (cf Eisenbud, ch. 12), on sait qu'il existe un polynôme  $P$  de degré  $\dim(A) - 1$  tel que pour  $n$  entier assez grand, on ait  $\dim(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = P(n)$ .

Supposons  $\mathfrak{m}$  régulier. Alors, 3.1.9.3 est un isomorphisme et donc  $P(n) = \binom{n+d-1}{d-1}$  qui est de degré  $d-1$ , donc  $d = \dim(A)$ . Réciproquement, supposons  $d = \dim(A)$ . Soit  $a$  un élément homogène (disons de degré  $m$ ) non nul du noyau de 3.1.9.3. Notons  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_k$  la graduation de l'algèbre de polynôme  $A/\mathfrak{m}[T_1, \dots, T_d]$ . Alors pour  $n > m$ , le sous-module  $aS_{n-m}$  de  $S_n$  est dans le noyau de 3.1.9.3. Si  $a$  est non nul,  $\dim(aS_{n-m}) = \dim(S_{n-m}) = \binom{n+d-1-m}{d-1}$ . Dans ce cas on a donc l'inégalité  $\dim(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \leq \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n+d-1-m}{d-1}$ . Or le membre de droite est un polynôme de degré  $< d-1$  en  $n$  ce qui contredit l'hypothèse  $d = \dim(A)$ . Donc  $a$  est nul, et 3.1.9.3 est bien injective.  $\square$

Citons (rappelons) quelques propriétés des anneaux locaux réguliers. On dit qu'un anneau local est de Cohen-Macaulay si le plus grand entier  $k$  pour lequel il existe une suite régulière d'éléments de  $\mathfrak{m}$  de longueur  $k$  (appelé "profondeur de  $A$ ") est égal à  $\dim(A)$ . On utilisera le fait que si  $f \in A$  n'est pas diviseur de 0, alors  $\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1$ .

**3.1.10 THÉORÈME.**— *Soit  $A$  un anneau local noethérien régulier. Alors*

- i)  $A$  est intègre, intégralement clos (normal), et de Cohen-Macaulay.*
- ii) Si  $I$  est un idéal de  $A$ , alors  $A/I$  est régulier si et seulement si il existe des générateurs  $(f_1, \dots, f_k)$  de  $I$  dont les classes modulo  $\mathfrak{m}^2$  sont linéairement indépendantes sur  $A/\mathfrak{m}$ . (C'est une version abstraite du critère Jacobien, cf exemple ci-dessous).*
- iii) Si  $A = B/J$  pour un anneau local noethérien  $B$  et un idéal  $J$ , alors  $B$  est régulier si et seulement si  $J$  est un idéal régulier de  $B$ .*
- iv)  $A$  est de dimension cohomologique finie. (Cette propriété caractérise les anneaux réguliers, et on a de plus  $\dim.\text{coh.}(A) = \dim(A)$ ).*
- v) Pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , l'anneau local  $A_{\mathfrak{p}}$  est régulier.*
- vi) Tout localisé de  $A[T_1, \dots, T_k]$  est régulier.*

*Démonstration.* i). De manière générale, si un anneau possède une filtration séparée dont le gradué est intègre, resp. intégralement clos, alors l'anneau est intègre, resp. intégralement clos, cf Bourbaki, *Alg. Com.*, chap III, §2, cor de la prop 1, et chap. V, §1, n. 5, prop 15. Ici, la filtration  $\mathfrak{m}$ -adique est séparée car  $A$  est supposé noethérien (cf théorème de Krull rappelé plus haut), et le gradué  $\text{gr}^{\mathfrak{m}}(A)$  est une algèbre de polynômes, donc intègre et normale. Par ailleurs, utilisant la propriété rappelée avant le théorème, on voit que si  $(f_1, \dots, f_k)$  est une suite régulière, alors  $\dim(A/(f_1, \dots, f_k)) = \dim(A) - k$ , ce qui montre



en particulier que  $\text{prof}(A) \leq \dim(A)$ . Mais d'après la proposition 3.1.9, il existe une suite régulière de cardinal  $\dim(A) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ . Donc  $A$  est de Cohen-Macaulay.

ii). On a une suite exacte  $(\mathfrak{m}^2 + I)/\mathfrak{m}^2 \hookrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \twoheadrightarrow (\mathfrak{m}/I)/(\mathfrak{m}/I)^2$ . Supposons  $I$  engendré par une famille  $(f_1, \dots, f_k)$  comme dans l'énoncé. On en déduit que  $\dim((\mathfrak{m}/I)/(\mathfrak{m}/I)^2) = \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - k = \dim(A) - k$ . Par ailleurs, comme l'idéal  $\mathfrak{m}$  est régulier, il découle de la proposition 3.1.8 que la suite  $(f_1, \dots, f_k)$  est régulière, d'où l'on tire  $\dim(A/I) = \dim(A) - k$ . On en déduit que  $A/I$  est régulier. Réciproquement, supposons  $A/I$  régulier, et posons  $k = \dim(A) - \dim(A/I)$ . Par la suite exacte ci-dessus, on a  $k = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^2 + I/\mathfrak{m}^2)$ . Soient  $(f_1, \dots, f_k)$  des éléments de  $I$  relevant une base de  $(\mathfrak{m}^2 + I)/\mathfrak{m}^2$ . Ils forment une suite régulière et engendrent donc un idéal  $I' \subset I$  tel que  $A/I'$  est régulier de dimension  $d - k$ , par ce que l'on vient de prouver. Mais comme  $A/I'$  est intègre et a même dimension que  $A/I$ , la projection  $A/I' \twoheadrightarrow A/I$  est un isomorphisme, donc  $I = I'$ .

iii). Le sens  $\Rightarrow$  découle de ii). Supposons donc  $J$  régulier<sup>4</sup>. Il est donc engendré par une suite régulière d'éléments  $(f_1, \dots, f_k)$  et on a alors  $\dim(A) + k = \dim(B)$ . Soit  $\mathfrak{n}$  l'idéal maximal de  $B$ . On a une suite exacte  $(\mathfrak{n}^2 + J)/\mathfrak{n}^2 \hookrightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . On a  $\dim_{B/\mathfrak{n}}((\mathfrak{n}^2 + J)/\mathfrak{n}^2) \leq \text{rg}_{B/J}(J/J^2) = k$  et, puisque  $A$  est régulier,  $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$ . Il s'ensuit que  $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \leq \dim(B)$ . Or, de manière générale, on a toujours une inégalité  $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \geq \dim(B)$  (qui découle de la théorie du polynôme de Hilbert), donc  $B$  est régulier.

Les propriétés iv), v) et vi) ont la particularité de faire appel à des techniques cohomologiques. Notons que iv) $\Rightarrow$ v) car on a toujours  $\dim\text{coh}(A_{\mathfrak{p}}) \leq \dim\text{coh}(A)$ . De même iv) $\Rightarrow$ vi) car on a toujours  $\dim\text{coh}(A[t]) \leq \dim\text{coh}(A) + 1$ .

Au coeur de la preuve de iv), il y a le complexe de Koszul  $K^\bullet(f_1, \dots, f_k)$  associé à une suite d'éléments  $(f_1, \dots, f_k)$  de  $A$ . Celui-ci est défini comme le produit tensoriel des complexes  $K^\bullet(f_i) := [A \xrightarrow{\times f_i} A]$  placés en degré  $-1, 0$ . On vérifie facilement que si la suite est régulière alors la cohomologie de ce complexe est concentrée en degré 0 où elle vaut  $A/(f_1, \dots, f_k)$ . Dans ce cas, on obtient donc une résolution projective du  $A$ -module  $A/(f_1, \dots, f_k)$  de longueur  $k$ . De plus, la différentielle du complexe  $K^\bullet(f_1, \dots, f_k) \otimes A/(f_1, \dots, f_k)$  est nulle, donc  $\text{Tor}_A^k(A/(f_1, \dots, f_k), A/(f_1, \dots, f_k)) \neq 0$ , et par conséquent  $\dim.\text{proj.}(A/(f_1, \dots, f_k)) = k$ . Par ailleurs, on montre par des dévissages que pour tout anneau local noethérien, on a  $\dim.\text{coh.}(A) = \text{proj.}\dim_A(A/\mathfrak{m})$ . On en déduit donc que si  $A$  est régulier, il est de dimension cohomologique finie, et même égale à  $\dim(A)$ . La réciproque est plus délicate. Tout d'abord, on prouve que si  $\dim.\text{coh}(A)$  est finie alors elle est inférieure à  $\dim(A)$ . Puis, on choisit une famille  $(f_1, \dots, f_k)$  d'éléments de  $\mathfrak{m}$  induisant une base de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  (on a donc  $k \geq \dim(A)$ ). Le complexe de Koszul  $K^\bullet(f_1, \dots, f_k)$  n'est plus nécessairement une résolution du  $A$ -module  $A/\mathfrak{m}$ , mais en étudiant la suite spectrale associée, on montre que  $\text{Tor}^k(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m}) \neq 0$ , de sorte que  $\dim.\text{coh.}(A) \geq k$ , ce qui n'est possible que si  $k = \dim(A)$ , *i.e.*  $A$  est régulier.  $\square$

**Remarque :** la caractérisation cohomologique de la régularité, et plus généralement l'interprétation de la profondeur en termes cohomologiques.

<sup>4</sup>Voici un argument plus simple trouvé par un étudiant pendant le cours. On choisit une suite régulière qui engendre  $J$ , on la complète par des relèvements d'une suite régulière de  $A$  qui engendre  $\mathfrak{m}$ . La suite obtenue est régulière et engendre l'idéal maximal de  $B$ , lequel est donc régulier par la proposition précédente.

logiques, sont très importantes car ce sont des outils puissants, et de plus elles permettent de généraliser ces concepts aux anneaux noethériens non commutatifs

**3.1.11 Remarque.** Des techniques utilisées ou évoquées dans les preuves un peu indigestes d'algèbre commutative ci-dessus, on retiendra surtout l'existence

- du polynôme de Hilbert d'un module gradué, ou de Hilbert-Samuel d'un anneau local.
- de techniques permettant de transférer à un anneau muni d'une "bonne" filtration certaines propriétés de son gradué associé.
- du complexe de Koszul associé à une famille finie d'éléments.

**3.1.12 COROLLAIRE.**— Soit  $X$  un schéma noethérien.

- i)  $X$  est régulier si et seulement si pour tout point fermé  $x$  de  $X$ , l'immersion fermée  $\text{Spec}(\kappa(x)) \hookrightarrow X$  est régulière.*
- ii) Soit  $i : Y \hookrightarrow X$  une immersion fermée et  $x$  un point régulier de  $Y$ . Alors  $i$  est régulière en  $x$  si et seulement si  $X$  est régulier en  $x$ .*

*Démonstration.* i). Rappelons que  $X$  est dit régulier si tous ses anneaux locaux le sont. Parce que  $X$  est noethérien, tout point admet une spécialisation qui est un point fermé. Comme la propriété d'être régulier est stable par localisation, cf 3.1.10 v),  $X$  est régulier si et seulement si tous les anneaux locaux en ses points fermés sont réguliers. Soit  $x$  un point fermé, d'après les propositions 3.1.8 et 3.1.9, l'immersion fermée  $\text{Spec}(\kappa(x)) \hookrightarrow X$  est régulière si et seulement si  $x$  est un point régulier.

ii). Découle de 3.1.10 iii). □

On prendra garde à ne pas inverser les hypothèses et conclusions sur  $X$  et  $Y$  dans l'énoncé ci-dessus, qui ne serait plus vrai du tout.

**3.1.13 Exemple.** Supposons que  $X$  est une variété sur un corps algébriquement clos. Rappelons qu'une telle variété  $X$  est dite lisse si le schéma  $X$  est régulier. Dans ce cas, le point iii) de la proposition précédente dit que toute sous-variété lisse  $Y$  de  $X$  est régulièrement immergée dans  $X$ . Une telle paire  $(Y, X)$  est parfois appelée *paire lisse*. De plus, dans ce cas, la fibre  $\mathcal{N}_{Y/X} \otimes \kappa(x)$  est l'orthogonal de l'espace tangent de  $Y$  dans l'espace cotangent de  $X$  en  $x$ .

En revanche, le fait que  $Y$  soit régulièrement immergée dans  $X$  n'implique pas que  $Y$  soit lisse. Par exemple, toute hypersurface de  $\mathbb{P}^n$  définie par un seul polynôme homogène est régulièrement immergée. Les sous-variétés régulièrement immergées dans une variété lisse ont cependant des propriétés suffisamment intéressantes pour avoir été baptisées ; on les appelle *intersections complètes*.

Explicitons le point ii) du théorème précédent dans le cas où  $X = \mathbb{A}_k^n$  est l'espace affine de dimension  $n$ . Soit  $x$  un point de  $Y$  et  $m := \dim_x(Y)$ . Alors  $Y$  est lisse en  $x$  si et seulement si il existe des polynômes  $g_1, \dots, g_{n-m}$  qui engendrent l'idéal de  $Y$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  et dont les différentielles en  $x$  (*i.e.* les images dans  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ) sont linéairement indépendantes. Changeons de point de vue, et supposons  $Y$  définie par des polynômes  $f_1, \dots, f_r$  en les

indéterminées  $T_1, \dots, T_n$ . Alors un point  $x \in Y$  est régulier si et seulement si le rang de la matrice Jacobienne  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(x)\right)_{i,j}$  est égal à  $n - m$ . En effet, cela découle de ce que le morphisme

$$(3.1.13.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 & \rightarrow & k^n \\ f & \mapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial T_j}(x)\right)_{j=1, \dots, n} \end{array}$$

est un isomorphisme, comme un développement de Taylor en  $x$  le montre.

Donnons maintenant quelques propriétés des immersions régulières.

**3.1.14 PROPOSITION.**— *Dans un diagramme 3.1.4.1, supposons que l'immersion  $Y \hookrightarrow X$  est régulière. Alors, sous l'une des deux conditions de la proposition 3.1.5, l'immersion  $Y' \hookrightarrow X'$  est aussi régulière.*

*Démonstration.* On se ramène au cas local, où  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $Y = \text{Spec}(A/I)$ ,  $X' = \text{Spec}(A')$  et  $Y' = \text{Spec}(A'/I')$  avec  $I' = IA'$ . Dans la situation i) de la proposition 3.1.5, l'isomorphisme 3.1.1.3 et l'isomorphisme de changement de base pour une algèbre symétrique induisent les isomorphismes verticaux du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} A'/I' \otimes_A \text{Sym}_{A/I}(I/I^2) & \longrightarrow & A'/I' \otimes \text{gr}^I(A) \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{Sym}_{A'/I'}(I'/I'^2) & \longrightarrow & \text{gr}^{I'}(A') \end{array}$$

d'où l'on conclut immédiatement.

Plaçons-nous maintenant dans la situation ii) de 3.1.5, et reprenons les notations de la preuve de cette proposition. Posant  $B = A/I$ , on a en particulier une section  $B \rightarrow A$  de la projection  $A \rightarrow A/I$ , donc une décomposition  $A = B \oplus I$ . Il nous suffira de prouver que pour tout  $n$ , le morphisme  $A' \otimes_A I^n = B' \otimes_B I^n \rightarrow I^n$  est un isomorphisme. On sait déjà qu'il est surjectif pour tout  $n$ , et qu'il est bijectif pour  $n = 1$ . Supposons avoir prouvé l'injectivité au rang  $n$ . Dans la suite exacte de  $B$ -modules  $I^{n+1} \hookrightarrow I^n \rightarrow I^n/I^{n+1}$ , le terme de droite est plat sur  $B$ , puisque par hypothèse c'est une puissance symétrique du  $B$ -module localement libre  $I/I^2$ . Donc la suite reste exacte après extension des scalaires de  $B$  à  $B'$ , ou ce qui revient au même, de  $A$  à  $A'$ . Appliquant l'hypothèse de récurrence en rang  $n$ , on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow A' \otimes_A I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow I^n/I^{n+1} \rightarrow 0,$$

qui montre que  $A' \otimes_A I^{n+1} = I^{n+1}$ . □

**3.1.15 PROPOSITION.**— *Soit  $Z \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{i} X$  deux immersions fermées. Alors la suite de  $\mathcal{O}_Z$ -modules*

$$0 \rightarrow j^* \mathcal{N}_{Y/X} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/X} \rightarrow \mathcal{N}_{Z/Y} \rightarrow 0$$

est exacte à droite et au milieu (ici les morphismes sont tous du type (3.1.4.2)). Si  $j$  est régulière, cette suite est aussi exacte à gauche. Si  $i$  et  $j$  sont régulières, alors la composée l'est aussi.

*Démonstration.* On se ramène au cas où  $X$  est le spectre d'un anneau local,  $Y$  est donné par un idéal  $I$  et  $Z$  par un idéal  $J$  contenant  $I$ . La suite de l'énoncé s'écrit alors

$$0 \longrightarrow A/J \otimes (I/I^2) = I/IJ \longrightarrow J/J^2 \longrightarrow (J/I)/(J/I)^2 = J/(I + J^2) \longrightarrow 0$$

et est évidemment exacte à droite et au milieu. Supposons de plus l'idéal  $J/I$  régulier dans  $A/I$ . Le morphisme de gauche se factorise par  $I/IJ \longrightarrow I/(I \cap J^2)$  et, comme  $I/(I \cap J^2) \longrightarrow J/J^2$  est évidemment injective, il nous suffira de prouver que  $I \cap J^2 = IJ$ . Pour cela, soit  $(f_1, \dots, f_k)$  une suite d'éléments de  $A$  dont l'image dans  $A/I$  est régulière et génératrice de  $J/I$ . Soit  $K$  l'idéal engendré par cette suite. Considérons la suite

$$A/J[T_1, \dots, T_k] \longrightarrow A/I \otimes_A \text{gr}^K(A) \longrightarrow \text{gr}^{J/I}(A/I).$$

La première flèche est le morphisme habituel  $A/K[T_1, \dots, T_k] \longrightarrow \text{gr}^K(A)$  tensorisé par  $A/I$ , et la deuxième est isomorphe à la somme directe des flèches  $K^n \longrightarrow (J/I)^n$  tensorisées par  $A/J$ . Ces deux flèches sont par construction surjectives, et la composée des deux est par hypothèse bijective. Elles sont donc toutes bijectives. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on en tire que l'application  $K^n \xrightarrow{\pi} (J/I)^n$  induite par la projection  $A \longrightarrow A/I$  induit un isomorphisme  $K^n/JK^n \xrightarrow{\sim} (J/I)^n/(J/I)^{n+1}$ . En particulier le noyau  $I \cap K^n$  de  $\pi$  est contenu dans  $JK^n$ . On a donc obtenu  $I \cap K^n = IK^n + (I \cap K^{n+1})$ . Par récurrence, il vient  $I \cap K^n = IK^n + (I \cap K^{n+N})$  pour tout  $N > 0$  et par séparation de la filtration  $K$ -adique, on en déduit que  $I \cap K^n = IK^n$ . En particulier pour  $n = 2$ , on en tire que  $I \cap J^2 = I \cap (IJ + K^2) = IJ + (I \cap K^2) = IJ + IK^2 = IJ$ , comme voulu.

Soit  $(f_1, \dots, f_k)$  une suite régulière génératrice de  $I$  et  $(f_{k+1}, \dots, f_l)$  une suite d'éléments de  $J$  dont l'image dans  $A/I$  est une suite régulière génératrice de  $J/I$ . Alors on vérifie aisément que la suite  $(f_1, \dots, f_l)$  est régulière et génératrice de  $J$ . Ainsi, d'après la proposition 3.1.8, la composée  $i \circ j$  est régulière si  $i$  et  $j$  le sont. Dans ce cas, tous les  $A/J$ -modules de la suite exacte ci-dessus sont libres.  $\square$

## 3.2 Différentielles

**3.2.1 DÉFINITION.**— Soit  $f : X \longrightarrow S$  un morphisme séparé de schémas noethériens. La diagonale  $\Delta_f = \Delta_{X/S} : X \longrightarrow X \times_S X$  est alors une immersion fermée. Le faisceau cohérent sur  $X$

$$\Omega_f = \Omega_{X/S} := \mathcal{N}_{X/X \times_S X} = \mathcal{N}_{\Delta_f}$$

est appelé faisceau des différentielles relatives, ou encore faisceau cotangent relatif de  $X$  sur  $S$ .

Remarquons aussi que la définition du conormal peut s'adapter à une immersion pas nécessairement fermée, et celle du cotangent à un morphisme pas nécessairement séparé, cf EGA IV.§16.

Dans le cas où  $X = \text{Spec}(A)$  et  $S = \text{Spec}(R)$ , la diagonale est donnée par le morphisme produit  $A \otimes_R A \xrightarrow{\mu} A$  de l'anneau  $A$ . Soit  $I_{A/R}$  le noyau de ce morphisme. Alors  $\Omega_{X/S}$  est donné par le  $A$ -module

$$\Omega_{A/R} := I_{A/R} \otimes_{A \otimes_R A} A = I_{A/R}/I_{A/R}^2.$$

Notons que  $I_{A/R}$  et  $I_{A/R}^2$  sont aussi naturellement des  $A$ -modules de deux manières : soit en envoyant  $A$  sur  $A \otimes 1 \subset A \otimes_R A$ , soit en l'envoyant sur  $1 \otimes A$ . Sur le quotient  $I_{A/R}/I_{A/R}^2$ , ces deux structures de  $A$ -modules coïncident, et coïncident avec celle définie ci-dessus par réduction mod  $I_{A/R}$ .

**3.2.2 Exemples.** (i) Supposons  $A = R[T_1, \dots, T_n]$ . Alors  $A \otimes_R A = R[T_1, \dots, T_n, T'_1, \dots, T'_n]$  et  $I = (T_1 - T'_1, \dots, T_n - T'_n)$ . On vérifie aisément que  $\Omega_{A/R} = I/I^2$  est le  $A$ -module libre de base les  $[(T_i - T'_i) \bmod I^2]$ .

(ii) Supposons que  $S = \text{Spec}(k)$  pour un corps algébriquement clos  $k$ , et soit  $x$  un point fermé de  $X$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(k) & \xhookrightarrow{x} & X \\ x \downarrow & & \downarrow (x, \text{Id}) \\ X & \xhookrightarrow{\Delta_{X/k}} & X \times_k X \end{array}$$

induit un épimorphisme  $\Omega_{X/k,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Celui-ci est en fait un isomorphisme, comme le montre le résultat un peu plus général suivant.

**3.2.3 PROPOSITION.**— Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme et  $s : S \hookrightarrow X$  une section de  $f$ . Alors le morphisme canonique  $s^* \Omega_{X/S} \rightarrow \mathcal{N}_{S/X}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 3.1.5 au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} S & \xhookrightarrow{s} & X & \xrightarrow{f} & S \\ s \downarrow & & \downarrow (s \circ f, \text{Id}) & & \downarrow s \\ X & \xhookrightarrow{\Delta_{X/S}} & X \times_S X & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

dans lequel  $\pi_1$  désigne la première projection. □

**3.2.4 Functorialité du cotangent.** Remarquons que lorsque  $f : X \rightarrow S$  est une immersion, on a  $\Omega_{X/S} = 0$  puisque la diagonale est alors un isomorphisme. Par ailleurs tout diagramme commutatif

$$(3.2.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & S' \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

induit un diagramme commutatif

$$(3.2.4.2) \quad \begin{array}{ccc} X' \hookrightarrow & \xrightarrow{\Delta_{f'}} & X' \times_{S'} X' \\ h \downarrow & & \downarrow h \times h \\ X \hookrightarrow & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_S X \end{array}$$

et par conséquent, un morphisme canonique du type (3.1.4.2)

$$(3.2.4.3) \quad h^* \Omega_f \longrightarrow \Omega_{f'}.$$

Celui-ci est un isomorphisme lorsque  $h$  est une immersion ouverte et  $g$  est l'identité de  $S$ . En effet, le diagramme (3.2.4.2) est alors cartésien et on peut appliquer 3.1.4. Ceci montre en particulier que  $\Omega_{X/S}$  est compatible à la localisation, et qu'il suffit de le calculer dans des cartes affines. Plus précisément, si  $U = \text{Spec}(A)$  est un ouvert affine de  $X$  tels que  $f|_U$  se factorise par l'ouvert affine  $V = \text{Spec}(R)$  de  $S$ , alors  $\Omega_{X/S}(U) = \Omega_{A/R}$ . Si  $x$  est un point de  $X$  d'image  $s$  dans  $S$ , alors  $\Omega_{X/S,x} = \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}$ .

Voici un autre cas où le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.

**3.2.5 PROPOSITION.**— *Si le diagramme (3.2.4.1) est cartésien, alors le morphisme (3.2.4.3) est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Il suffit en effet de compléter le diagramme (3.2.4.2) comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} X' \hookrightarrow & \xrightarrow{\Delta_{f'}} & X' \times_{S'} X' & \xrightarrow{\pi_1} & X' \\ h \downarrow & & \downarrow h \times h & & \downarrow h \\ X \hookrightarrow & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_S X & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

et d'appliquer le (ii) de la proposition 3.1.5. □

Pour voir la relation avec l'intuition habituelle de différentielle, rappelons la notion de dérivation.

**3.2.6 DÉFINITION.**— *Soit  $R$  un anneau commutatif et  $A$  une  $R$ -algèbre commutative. Une  $R$ -dérivation  $d : A \rightarrow M$  à valeurs dans un  $A$ -module  $M$  est une application  $R$ -linéaire telle que*

- $d(aa') = ad(a') + d(a)a'$  pour tous  $a, a' \in A$ .
- $d(r) = 0$  pour tout  $r \in R$ .

L'ensemble  $\text{Der}_R(A, M)$  des  $R$ -dérivations de  $A$  à valeurs dans  $M$  est naturellement un  $A$ -module. On définit une  $R$ -dérivation sur le  $A$ -module  $\Omega_{A/R}$  par la formule

$$d_{A/R}(a) := (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \text{ mod } I_{A/R}^2.$$

Le couple  $(\Omega_{A/R}, d_{A/R})$  est universel parmi les  $A$ -modules équipés d'une  $R$ -dérivation, au sens suivant :

**3.2.7 PROPOSITION.**— *Le couple  $(\Omega_{A/R}, d_{A/R})$  représente le foncteur  $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$  sur la catégorie  $\text{Mod}(A)$ . En d'autres termes, la composition avec  $d_{A/R}$  fournit pour tout  $A$ -module  $M$  un isomorphisme  $\text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_R(A, M)$ .*

*Démonstration.* Soit  $d : A \rightarrow M$  une  $R$ -dérivation. Notons  ${}_A(A \otimes_R A)$  pour la structure de  $A$ -module obtenue sur  $A \otimes_R A$  par action de  $A$  à gauche. L'application  $R$ -linéaire  $d$  induit une application  $A$ -linéaire  ${}_A d : {}_A(A \otimes_R A) \rightarrow M$ . Un calcul utilisant les propriétés de dérivation de  $d$  montre que  ${}_A d$  est nulle sur le sous- $A$ -module  $I_{A/R}^2$ . Il existe donc un morphisme de  $A$ -modules  $f : \Omega_{A/R} \rightarrow M$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_A(A \otimes_R A) & \xrightarrow{{}_A d} & M \\ \uparrow & & \uparrow f \\ I_{A/R} & \longrightarrow & \Omega_{A/R}. \end{array}$$

La proposition découle alors du fait que pour  $(M, d) = (\Omega_{A/R}, d_{A/R})$  on a  $f = \text{Id}_{\Omega_{A/R}}$ .  $\square$

**3.2.8 Exemples.** (i) Supposons que  $A$  est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos et soit  $x$  un point fermé de  $\text{Spec}(A)$ , d'idéal  $\mathfrak{m}_x$ . L'application

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \\ f \mapsto d_x(f) := [(f - f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^2] \end{array}$$

est une  $k$ -dérivation, appelée *différentielle en  $x$* . Le morphisme induit  $\Omega_{A/k} \otimes_A (A/\mathfrak{m}_x) \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  n'est autre que celui de l'exemple 3.2.2. Dans le cas particulier où  $A = k[T_1, \dots, T_n]$ , les  $d_x(T_i)$  forment une base de  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  et on a  $d_x(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(x) d_x T_i$  comme dans l'exemple 3.1.13.1.

(ii) Dans le cas  $A = R[T_1, \dots, T_n]$ , l'exemple 3.2.2 nous dit que  $\Omega_{A/R}$  est libre de base les  $d_{A/R}(T_i)$ . La dérivation  $d_{A/R}$  est alors donnée par

$$\begin{array}{l} d_{A/R} : A \rightarrow \Omega_{A/R} \\ f \mapsto d_{A/R}(f) := \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i} d_{A/R}(T_i) \end{array}$$

**3.2.9 PROPOSITION.**— *Soit  $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} S$  deux morphismes (séparés) de schémas (noéthériens). Alors on a sur  $Y$  une suite exacte de  $\mathcal{O}_Y$ -modules cohérents :*

$$g^* \Omega_f \rightarrow \Omega_{f \circ g} \rightarrow \Omega_g \rightarrow 0$$

où toutes les flèches sont du type 3.2.4.3. De plus, si l'immersion diagonale  $\Delta_g$  est régulière (on dit alors que  $g$  est différentiellement lisse) et si  $g$  est plate, alors la suite est aussi exacte à gauche, si on la prolonge par le morphisme nul.

*Démonstration.* Appliquons la proposition 3.1.15 aux immersions  $Y \hookrightarrow Y \times_X Y \hookrightarrow Y \times_S Y$ , ce qui nous donne une suite exacte

$$(3.2.9.1) \quad \Delta_{Y/X}^*(\mathcal{N}_{Y \times_X Y / Y \times_S Y}) \longrightarrow \Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \hookrightarrow & Y \times_S Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & X \times_S X \end{array}$$

est cartésien et induit donc un morphisme surjectif  $g^*\Omega_{X/S} \longrightarrow \Delta_{Y/X}^*(\mathcal{N}_{Y \times_X Y / Y \times_S Y})$ . D'où l'exactitude de la suite de la proposition. Supposons de plus que  $g$  est plate. Alors le morphisme surjectif ci-dessus est bijectif. Supposons encore que  $\Delta_{Y/X}$  est régulière, alors la suite 3.2.9.1 est exacte à gauche, toujours en vertu de la proposition 3.1.15.  $\square$

**3.2.10 Remarque.** L'hypothèse “ $g$  plate et différentiellement lisse” est en particulier vérifiée lorsque  $Y = \mathbb{A}^n \times X = \text{Spec}(\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_n])$  (spectre relatif sur  $X$ ) où encore lorsque  $Y$  est un fibré vectoriel sur  $X$ . Nous verrons que c'est une des propriétés caractéristiques des morphismes *lisses*.

**3.2.11 Exemple.** Considérons le cas  $Y = \mathbb{A}_k^n$ ,  $X = \mathbb{A}_k^m$  et  $S = \text{Spec}(k)$ . La suite exacte 3.2.9 permet de calculer  $\Omega_{Y/X}$  comme le conoyau de  $g^*\Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{Y/k}$ . Explicitons ce morphisme. Le morphisme  $g$  est donné par un morphisme d'anneau  $k[X_1, \dots, X_m] \longrightarrow k[T_1, \dots, T_n]$  qui est défini par ses valeurs en les  $X_j$  qui sont des polynômes  $P_j$  en les  $T_i$ . D'après 3.2.2,  $g^*\Omega_{X/k}$  est un  $k[T_1, \dots, T_n]$ -module libre de base les  $d_{X/k}(X_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  tandis que  $\Omega_{Y/k}$  est un  $k[T_1, \dots, T_n]$ -module libre de base les  $d_{Y/k}(T_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . L'application cherchée est alors donnée par

$$\begin{array}{ccc} g^*\Omega_{X/k} & \rightarrow & \Omega_{Y/k} \\ d_{X/k}(X_j) & \mapsto & \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial T_i} d_{Y/k}(T_i) \end{array} .$$

Lorsque  $g$  est une immersion fermée, le terme de droite de la suite 3.2.9 est nul. On peut alors prolonger vers la gauche la suite exacte.

**3.2.12 PROPOSITION.**— Soit  $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} S$  deux morphismes (séparés) de schémas (noéthériens) avec  $g$  une immersion fermée d'idéal  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ . Alors on a sur  $Y$  une suite exacte

$$\mathcal{N}_g \xrightarrow{\delta} g^*\Omega_f \longrightarrow \Omega_{fg} \longrightarrow 0$$

où  $\delta$  est définie par restriction de la dérivation  $d_{X/S} : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_f$  à  $\mathcal{I}$ , puis réduction modulo  $\mathcal{I}$ .



*Démonstration.* L'exactitude en  $\Omega_{fg}$  découle de la proposition précédente et du fait que  $\Omega_g = 0$ . Pour le reste, on se ramène au cas affine où  $S = \text{Spec}(R)$ ,  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(A/I)$ . Compte tenu de la proposition 3.2.7, il faut montrer que pour tout  $A/I$ -module  $M$ , la suite

$$0 \longrightarrow \text{Der}_R(A/I, M) \longrightarrow \text{Der}_R(A, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, M)$$

est exacte au milieu, ce qui est immédiat.  $\square$

**3.2.13 Exemple.** (i) Faisons  $S = \text{Spec}(k)$  avec  $k$  un corps algébriquement clos et  $Y = \{x\}$ . Dans ce cas on a  $\Omega_{Y/S} = 0$  d'où un morphisme surjectif  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/k} \otimes \kappa(x)$ . Celui-ci est un isomorphisme, inverse de celui des exemples 3.2.2 (ii) et 3.2.8 (i).

(ii) Supposons encore  $S = \text{Spec}(k)$ , et supposons de plus que  $Y$  est une sous-variété de  $X = \mathbb{A}_k^n$  d'algèbre  $k[Y] := k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_r)$ . La suite exacte 3.2.12 et la connaissance de  $\Omega_{X/k} = k[X]^n$  permettent de calculer  $\Omega_{Y/k}$  comme le conoyau de l'application  $k[Y]^r \longrightarrow k[Y]^n$  dont la matrice est  $\left( \frac{\partial P_j}{\partial T_i} \Big|_Y \right)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, r}$ .

(iii) Soit  $k$  un corps et  $\kappa = k[T]/P(T)$  une extension de corps monogène finie de  $k$ . Ainsi,  $\kappa$  est le corps résiduel d'un point fermé  $x$  de  $\mathbb{A}_k^1$ . La suite exacte de  $\kappa$ -espaces vectoriels  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{A}^1/k, x} \longrightarrow \Omega_{\kappa/k} \longrightarrow 0$  est isomorphe à  $\kappa \xrightarrow{\times P'(x)} \kappa \longrightarrow \Omega_{\kappa/k}$  et permet de voir que  $\Omega_{\kappa/k}$  est nul si et seulement si  $P'(x) \neq 0$ , *i.e.* si et seulement si  $\kappa$  est séparable sur  $k$ .

**3.2.14 Remarques.** Les suites exactes partielles 3.2.9 et 3.2.12 sont des manifestations d'un phénomène beaucoup plus général. En effet le faisceau cotangent  $\Omega_{X/S}$  n'est pas un invariant assez fin lorsque  $X$  n'est pas *lisse* sur  $S$ . On le remplace par un "complexe cotangent" et les suites exactes partielles ci-dessus sont extraites de suites exactes longues associées à des "triangles distingués" de complexes cotangents (*cf* Illusie).

**3.2.15 Exemple.** Dans le contexte de la proposition 3.2.12, supposons que  $X = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n])$  et  $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_m])$ . L'idéal  $\mathcal{I}$  de  $Y$  dans  $X$  est donc l'idéal engendré par  $T_{m+1}, \dots, T_n$ . Alors la suite de 3.2.12 est exacte à gauche, isomorphe à la suite

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=m+1}^n \mathcal{O}_Y \overline{T}_i \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_Y d_{X/S} T_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_Y d_{Y/S} T_i \longrightarrow 0$$

dans laquelle  $\overline{T}_i$  est l'image de  $T_i \in \mathcal{I}$  dans  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{N}_{Y/X}$  et  $\delta$  envoie  $\overline{T}_i$  sur  $d_{X/S}(T_i)$ .

**3.2.16 Remarque.** Dans l'exemple 3.1.13 d'une paire lisse  $Y \subset X$  de variétés sur un corps  $k$ , la suite de 3.2.12 est aussi exacte à gauche et tous ses membres sont localement libres sur  $Y$ . En effet, on a déjà vu que l'immersion  $Y \hookrightarrow X$  est régulière, donc  $\mathcal{N}_{Y/X}$  est localement libre, de rang  $\text{codim}(Y, X)$ . Par ailleurs  $Y \times_k Y$  est aussi une variété lisse, donc l'immersion diagonale  $\Delta_{Y/k}$  est régulière et  $\Omega_{Y/k}$  est localement libre de rang  $\dim(Y)$ . Enfin  $i^* \Omega_{X/k}$  est localement libre de rang  $\dim(X)$ . L'additivité des rangs impose l'exactitude à gauche. On confirme ainsi la signification géométrique du conormal en un point régulier :

c'est l'orthogonal du tangent de la sous-variété dans le cotangent ambiant. Dans la section "morphisms lisses" on donnera une généralisation de ceci sur une base  $S$  quelconque.

### 3.3 Morphismes étales

Rappelons que tous les schémas considérés sont noethériens, et les morphismes sont soit de type fini, soit locaux.

**3.3.1 Rappel sur le support d'un faisceau cohérent.** Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . On appelle *support* de  $\mathcal{M}$  et on note  $\text{Supp}(\mathcal{M})$  l'ensemble des points  $x \in X$  où la fibre  $\mathcal{M}_x$  est non-nulle. C'est un *fermé* de  $X$ . Lorsque  $X = \text{Spec}(A)$  et  $\mathcal{M}$  donné par un module  $M$ , le support de  $M$  est le fermé  $V(\text{Ann}(M))$  défini par l'idéal annulateur de  $M$ .

**3.3.2 DÉFINITION.**— *Un morphisme  $Y \xrightarrow{f} X$  est dit non ramifié au point  $y \in Y$  si la fibre  $\Omega_{Y/X,y}$  de  $\Omega_{Y/X}$  en  $y$  est nulle. Il est dit non ramifié, s'il est non ramifié en tout point, i.e. si  $\Omega_{Y/X} = 0$ .*

**3.3.3 Remarques.** (i) On voit que le lieu de non-ramification d'un morphisme est un ouvert. Cet ouvert peut être vide, comme le montre l'exemple d'une extension non séparable de corps.

(ii) De la proposition 3.2.9, on tire qu'une composée de morphismes non ramifiés est non ramifiée. Du corollaire 3.2.5, on tire qu'un changement de base de morphisme non ramifié est non ramifié.

(iii) Une immersion (ouverte ou fermée) est non-ramifiée.

(iv)  $f$  est non ramifié en  $y$  si et seulement si l'immersion diagonale  $\Delta_{Y/X}$  est une immersion ouverte au voisinage de  $y$ . En effet une immersion fermée donnée par un idéal  $I$  d'un anneau local noethérien  $A$  dont le conormal  $I/I^2$  est nul est un isomorphisme ( $I$  est nul par Nakayama). Plus globalement, *un morphisme est non ramifié si et seulement si l'immersion diagonale associée est une immersion ouverte*. On voit en particulier qu'un morphisme non ramifié est toujours *différentiellement lisse* au sens de la proposition 3.2.9.

**3.3.4 PROPOSITION.**— *Un morphisme de type fini  $Y \xrightarrow{f} X$  est non ramifié au point  $y$  si et seulement si, posant  $x := f(y)$ , on a  $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$  et  $\kappa(y)$  est une extension finie séparable de  $\kappa(x)$ .*

*Démonstration.* Comme la formation de  $\Omega$  est compatible à la localisation, on a  $\Omega_{Y/X,y} = \Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}}$ . De plus, par le corollaire 3.2.5 appliqué au changement de base par  $\text{Spec}(\kappa(x)) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ , on a  $\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y) = \Omega_{(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y})/\kappa(x)} \otimes \kappa(y)$ . Maintenant, par Nakayama, le  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -module  $\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}}$  est nul si et seulement si le  $\kappa(y)$ -vectoriel  $\Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{O}_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)$  est nul, donc, utilisant la précédente égalité si et seulement si  $\Omega_{(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y})/\kappa(x)}$  l'est.

On est donc ramené à prouver que si  $A$  est une  $k$ -algèbre locale, alors  $\Omega_{A/k} = 0$  si et seulement si  $A$  est une extension séparable de  $k$ . On a déjà prouvé le sens  $\Leftarrow$ .

Supposons donc  $\Omega_{A/k} = 0$  et montrons d'abord que  $K := A/\mathfrak{m}$  est une extension finie séparable de  $k$ . La surjection  $A/\mathfrak{m} \otimes_A \Omega_{A/k} \twoheadrightarrow \Omega_{(A/\mathfrak{m})/k}$  montre que  $\Omega_{K/k} = 0$ . Écrivons  $K$  comme une extension purement inséparable d'une extension séparable  $K'$  d'un corps de fonctions  $k(X_i)_{i \in I}$  sur  $k$ . La suite exacte

$$\Omega_{K'/k} \otimes K \longrightarrow \Omega_{K/k} \longrightarrow \Omega_{K/K'} \longrightarrow 0$$

nous impose que  $\Omega_{K/K'} = 0$  donc  $K' = K$  puisque  $K'$  est supposée purement inséparable. Ainsi  $K$  est séparable sur  $k(X_i)_{i \in I}$ , donc le morphisme  $\text{Spec}(K) \longrightarrow \text{Spec}(k(X_i))$  est différentiellement lisse, puisque non ramifié. Comme il est de plus évidemment plat, on déduit de la proposition 3.2.9 un isomorphisme  $\Omega_{k(X_i)/k} \otimes K \xrightarrow{\sim} \Omega_{K/k}$ . Or, par localisation à partir du cotangent de l'espace affine que nous avons déjà calculé, on en déduit que  $\dim_K(\Omega_{K/k}) = \text{card}(I)$  est le cardinal d'une base de transcendance. Comme on veut que cette dimension soit nulle, on en déduit que  $K$  est algébrique séparable sur  $k$ . Elle est aussi finie puisque tous nos morphismes sont par hypothèse de type fini.

Reste à prouver que  $A = K$ , *i.e.* que le radical  $\mathfrak{m}$  de  $A$  est nul. Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ , il suffit de montrer que le radical de  $A_{\bar{k}} := A \otimes_k \bar{k}$  est nul, ou encore que chacun des localisés (en nombre fini) de  $A_{\bar{k}}$  est un corps. Or, on a  $\Omega_{A_{\bar{k}}/\bar{k}} = 0$ , donc  $\Omega_{A'/\bar{k}}$  pour chacun des localisés de  $A_{\bar{k}}$ . Le corps résiduel de  $A'$  est une extension finie séparable de  $\bar{k}$  donc égale à  $\bar{k}$ . L'exemple 3.2.2 nous dit que  $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 \simeq A'/\mathfrak{m}' \otimes_{A'} \Omega_{A'/\bar{k}}$ , donc  $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 = 0$ , et par Nakayama  $\mathfrak{m}' = 0$ . □

**3.3.5 Remarque.** La proposition montre que cette notion géométrique de ramification est compatible avec la notion arithmétique de ramification. Soit  $F$  une extension finie de  $\mathbb{Q}$ , et  $O_F$  son anneau d'entiers. Le lieu de ramification du morphisme  $Y = \text{Spec}(O_F) \longrightarrow X = \text{Spec}(\mathbb{Z})$  est l'ensemble des idéaux premiers de  $O_F$  au-dessus d'un premier  $p$  qui est "ramifié dans  $F$ ", au sens arithmétique. L'idéal "différente" utilisé en arithmétique n'est autre que l'annulateur  $\mathfrak{D}_{Y/X}$  de  $\Omega_{Y/X}$ .

**3.3.6 Morphismes quasi-finis.** La proposition montre qu'un morphisme non ramifié est *quasi-fini*, au sens où  $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{f(y)}\mathcal{O}_{Y,y}$  est fini sur  $\kappa(f(y))$  pour tout point de  $Y$ . Du point de vue géométrique, cette condition revient à demander que  $y$  soit un point isolé de sa fibre (exercice). Cette condition est aussi équivalente à la finitude du complété  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,f(y)}$  (exercice). D'ailleurs, dans cette situation, la topologie  $\mathfrak{m}_y$ -adique coïncide avec la topologie  $\mathfrak{m}_{f(y)}\mathcal{O}_{Y,y}$ -adique, si bien que le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,f(y)} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,f(y)}} \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  est un isomorphisme. *On voit ainsi que dans la proposition précédente, on peut remplacer  $\mathcal{O}_{Y,y}$  par son complété.* En d'autres termes, la non ramification en un point se lit sur les anneaux locaux complétés.

Pour un morphisme de type fini, la version Grothendieck du *Main Theorem* de Zariski donne la caractérisation globale suivante :  *$f$  est quasi fini si et seulement si il existe une factorisation  $Y \xrightarrow{i} Y' \xrightarrow{f'} X$  avec  $i$  une immersion ouverte et  $f'$  un morphisme fini.* Une bonne référence pour ces notions est le chapitre 3 de Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*.

**3.3.7 DÉFINITION.**— *Un morphisme  $Y \xrightarrow{f} X$  est dit étale au point  $y \in Y$  s'il y est non ramifié et plat. Il est dit étale, s'il est étale en tout point.*

**3.3.8 Remarques.** (i) Le lieu où  $f$  est étale est un ouvert de  $Y$ .

(ii) Compositions et chgt de base de morphismes étales sont étales.

(iii) Une immersion ouverte est étale.

(iv) Un morphisme est étale si et seulement si il est plat et l'immersion diagonale associée est une immersion ouverte (en plus d'être fermée).

(v) Comme un morphisme étale  $f : Y \rightarrow X$  est plat et différentiellement lisse (comme tout morphisme non ramifié), il découle de la suite exacte 3.2.9 que si  $X$  et  $Y$  sont des  $S$ -schémas, alors le morphisme canonique  $f^*\Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{Y/S}$  est un isomorphisme.

**3.3.9 Exemple.** Soit  $A$  un anneau et  $P \in A[T]$  un polynôme unitaire tel que l'idéal  $(P, P')$  soit l'idéal unité  $A$ . Alors le morphisme  $Y = \text{Spec}(A[T]/(P)) \rightarrow X = \text{Spec}(A)$  est étale. En effet la suite exacte 3.2.12 donne

$$\mathcal{N}_{Y/\mathbb{A}_X^1} \simeq \mathcal{O}_Y \cdot \bar{P} \rightarrow \mathcal{O}_Y \cdot dT \rightarrow \Omega_{Y/X} \rightarrow 0$$

avec  $\bar{P}$  l'image de  $P$  dans  $(P)/(P^2)$ . Or le premier morphisme envoie  $\bar{P}$  sur  $P'(T)dT$ . Comme par hypothèse  $P'$  est un inversible dans  $\mathcal{O}_Y$ , ce premier morphisme est surjectif, d'où  $\Omega_{Y/X} = 0$ . Par ailleurs, comme  $P$  est unitaire,  $A[T]/(P)$  est libre sur  $A$ , de base les images des  $T^i$  avec  $i < \deg(P)$ .

Nous allons voir que cet exemple est assez représentatif de la structure locale des morphismes étales. Nous aurons besoin du critère de platitude suivant.

**3.3.10 PROPOSITION.**— *Soit  $A$  un anneau local nothérien,  $I$  un idéal propre, et  $M$  un  $A$ -module. On suppose que  $M$  est aussi un module fini sur une  $A$ -algèbre noethérienne  $B$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i)  $M$  est plat sur  $A$ .

ii)  $M/IM$  est plat sur  $A/I$ , et le morphisme canonique  $(M/IM) \otimes_A \text{gr}^I(A) \rightarrow \text{gr}^I(M)$  est un isomorphisme.

iii) pour tout  $n > 0$ ,  $M/I^n M$  est plat sur  $A/I^n$ .

*Démonstration.* i)  $\Rightarrow$  ii). Pour tout  $n$ , le morphisme  $I^n \otimes_A M \rightarrow I^n M$  est injectif, ce qui par réduction modulo  $I$  donne l'isomorphisme des gradués. Par ailleurs l'extension des scalaires préserve la platitude donc  $M/IM$  est plat sur  $A/I$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii). Fixons  $n$ . Puisqu'on travaille dans  $A/I^n$ , peut supposer que  $I^n = 0$ . On veut alors prouver que sous l'hypothèse ii), on a  $M$  plat sur  $A$ , i.e. que pour tout  $A$ -module  $N$ , on a  $\text{Tor}_1^A(M, N) = 0$ . Par dévissage il suffit de le prouver pour  $N$  tel que  $IN = 0$ , auquel cas on a une suite exacte

$$\text{Tor}_1^A(M, A/I) \otimes_{A/I} N \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_1^{A/I}(M/IM, N) \rightarrow 0.$$

Par hypothèse, le terme de droite est nul, donc on est ramené à prouver que  $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I) = 0$ . Ceci équivaut à l'injectivité de l'application  $I \otimes M \longrightarrow IM$ . On prouve par récurrence descendente sur  $k$  l'injectivité de  $I^k \otimes M \longrightarrow I^k M$ . Pour  $k = n$ , c'est trivial. Pour passer de  $k + 1$  à  $k$  on utilise le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} I^{k+1} \otimes_A M & \longrightarrow & I^k \otimes_A M & \longrightarrow & \mathrm{gr}^k A \otimes_A M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ I^{k+1} M & \longrightarrow & I^k M & \longrightarrow & \mathrm{gr}^k M \end{array}$$

*iii)  $\Rightarrow$  i).* C'est ici qu'on utilise l'hypothèse de finitude sur une algèbre noethérienne intermédiaire. Celle-ci implique que la filtration  $I$ -adique d'un module du type  $M \otimes_A N$  est *séparée*. Soit alors  $N \hookrightarrow N'$  un monomorphisme de  $A$ -modules. On veut prouver que  $M \otimes_A N \xrightarrow{\alpha} M \otimes_A N'$  est injective. Dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A N & \longrightarrow & M \otimes_A (N/N \cap I^n N') \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_A N' & \longrightarrow & M \otimes_A (N'/I^n N') \end{array}$$

la deuxième flèche verticale s'identifie à l'injection  $N/(N \cap I^n N') \hookrightarrow N'/I^n N'$  tensorisée par  $M/I^n M$  au-dessus de  $A/I^n$ , donc est injective, par hypothèse. Le noyau de  $\alpha$  est donc inclus dans (l'image de)  $M \otimes_A (N \cap I^n N')$ . Maintenant, on sait (lemme d'Artin-Rees) que pour tout  $m \in \mathbb{N}$  il existe  $n$  tel que  $I^n N' \cap N \subset I^m N$ . Il s'ensuit que le noyau de  $\alpha$  est inclus dans tous les  $I^m(M \otimes_A N)$ , pour  $m \in \mathbb{N}$ , donc est nul.  $\square$

**3.3.11 PROPOSITION.**— *Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme et  $y \in Y$  un point d'image  $x \in X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i)  $f$  est étale en  $y$ .*
- ii) le morphisme canonique  $\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_x}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_y}(\mathcal{O}_{Y,y})$  est un isomorphisme, et l'extension  $\kappa(y)/\kappa(x)$  est séparable finie.*
- iii) Il existe un polynôme unitaire  $Q \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]$  tel que  $Q$  et  $Q'$  engendrent l'idéal unité de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]$  et  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]/(Q)$ .*
- iv) Il existe un polynôme unitaire  $P \in \mathcal{O}_{X,x}[T]$  tel que  $\mathcal{O}_{Y,y}$  soit isomorphe à un localisé de  $\mathcal{O}_{X,x}[T]/(P)$ , et, désignant par  $u$  l'image de  $T$  dans  $\mathcal{O}_{Y,y}$ , l'élément  $P'(u)$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{Y,y}$ .*

*Démonstration.* *i)  $\Leftrightarrow$  ii) :* Le morphisme canonique de *ii)* est un cas particulier de functorialité du conormal pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\kappa(y)) & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathrm{Spec}(\kappa(x)) & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Supposons alors  $f$  étale en  $y$ . Le critère 3.3.4 de non ramification dit que ce diagramme est cartésien. La platitude de  $f$  assure alors la propriété d'isomorphisme voulue, cf 3.1.4. Réciproquement, supposons que le morphisme des gradués est un isomorphisme. Alors le critère de platitude précédent assure que  $f$  est plat en  $y$ . De plus, on obtient en particulier que la flèche  $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes \mathfrak{m}_x \longrightarrow \mathfrak{m}_y$  est surjective, *i.e.* que  $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$ .

*iii)  $\Leftrightarrow$  i).* Supposons *iii)* ; comme dans l'exemple plus haut, on voit que  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  est plate et non ramifiée sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . À l'aide de la caractérisation de la proposition 3.3.4, on a déjà remarqué que  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est alors aussi non ramifié sur  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Le critère de platitude ci-dessus montre que  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est aussi plate sur  $\mathcal{O}_{X,x}$ . On en déduit que  $f$  est étale en  $y$ . Réciproquement, supposons *i)*. Alors  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  est plate et non ramifiée sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . *Le point clef est que  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  est aussi finie sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ , de degré  $\dim_{\kappa(x)}(\kappa(y))$ .* Soit alors  $u$  un élément de  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  dont l'image  $\bar{u}$  engendre l'extension finie séparable  $\kappa(y)$  de  $\kappa(x)$ . Par Nakayama, la sous-algèbre  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[u]$  engendrée par  $u$  est égale à  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ . Plus précisément, les  $u^i$ ,  $0 \leq i < \dim_{\kappa(x)}(\kappa(y))$ , forment une base de  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ . Écrivant  $u^{\dim_{\kappa(x)}(\kappa(y))}$  dans cette base, on trouve un polynôme  $P \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]$  séparable (ie tel que  $(P, P')$  soit l'idéal unité de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]$ ) et que le morphisme  $T \mapsto u$  induise un isomorphisme  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]/(P) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ .

*iv)  $\Rightarrow$  iii).* Comme  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  est *hensélien* (ie satisfait le lemme de Hensel, cf chapitre 1 de Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*),  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/(P)$  est produit d'algèbres locales, et  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  s'identifie à un facteur direct de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/(P)$ , de la forme  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}/(Q)$  pour un polynôme  $Q \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[T]$  divisant  $P$ . On a alors  $Q'(u)$  inversible dans  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ .

*i)  $\Rightarrow$  iv).* (sketch) Par hypothèse, *i.e.*  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est plate et non ramifiée sur  $\mathcal{O}_{X,x}$ . *La différence essentielle avec i)  $\Rightarrow$  iii) est que  $\mathcal{O}_{Y,y}$  n'est pas nécessairement finie sur  $\mathcal{O}_{X,x}$  (même si  $f$  est fini).* On utilise alors la version Grothendieck du Main Theorem de Zariski rappelée plus haut, qui affirme que  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est la localisation d'une  $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre finie  $B$  en un idéal maximal  $\mathfrak{n}$ . On peut trouver un élément  $u$  de  $B$ , appartenant aux autres idéaux maximaux de  $B$ , et dont l'image engendre l'extension séparable  $B/\mathfrak{n}$  de  $\kappa(x)$ . On montre alors que la sous-algèbre  $\mathcal{O}_{X,x}[u]$  de  $B$  localisée en  $\mathfrak{n} \cap \mathcal{O}_{X,x}[u]$  est isomorphe à  $B$  localisé en  $\mathfrak{n}$ , puis qu'il existe  $P$  tel que  $P(u) = 0$ ,  $P'(u) \in \mathfrak{n}$ , et que  $T \mapsto u$  soit un isomorphisme  $\mathcal{O}_{X,x}[T]/(P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}[u] \subset B$ . (Voir SGA 1, Exp. 1, lemme 7.9.)  $\square$

**3.3.12 Remarques.** Il est intéressant de souligner quelques cas particuliers.

- i) Si  $\kappa(x) = \kappa(y)$ , alors  $f$  est étale si et seulement si elle induit un isomorphisme  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ .
- ii) En inspectant la preuve *iv)  $\Rightarrow$  iii)*, on constate que la seule propriété utile du complété est qu'il est hensélien. On peut donc dans le point *iii)* remplacer  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  par une sous- $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre locale hensélienne  $B$  (et  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  par  $B \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y}$ ). On montre qu'il existe une plus petite telle sous-algèbre  $B = \mathcal{O}_{X,x}^h$ , appelée *hensélisée* de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . On a alors  $\mathcal{O}_{Y,y}^h = \mathcal{O}_{X,x}^h \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Y,y}$ . Cf chapitre 8 de Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*.
- iii) Supposons que  $Y$  et  $X$  sont des variétés complexes. On montre que les sous-algèbres  $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{hol}}$  de  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  et  $\mathcal{O}_{Y,y}^{\text{hol}}$  de  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  formées des germes de fonctions holomorphes sont

henséliennes (c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites, cf chapitre 7 de Raynaud, *Anneaux locaux henséliens.*). Dans ce cas,  $f$  est étale en  $y$  si et seulement si elle induit un isomorphisme  $\mathcal{O}_{X,x}^{\text{hol}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y,y}^{\text{hol}}$ .

*Exercice :* Soit  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  défini par  $z \mapsto z^2$ . Vérifier que  $f$  est plat, de lieu de ramification  $\{0\}$ . Soit  $y = 1$  (et donc  $x = 1$ ). Vérifier explicitement que  $\mathcal{O}_{Y,1}$  n'est pas fini sur  $\mathcal{O}_{X,1}$ , et que le plongement  $\mathcal{O}_{X,1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,1} \times \mathcal{O}_{Y,-1}$  n'est pas surjectif. Vérifier ensuite que le plongement  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{Y,1} \times \widehat{\mathcal{O}}_{Y,-1}$  est bijectif, puis que  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,1} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{Y,1}$ .

**3.3.13 COROLLAIRE.**— (*Propriétés de permanence*) Soit  $f : Y \longrightarrow X$  un morphisme étale en un point  $y \in Y$  d'image  $x \in X$ . Alors

- i)  $\mathcal{O}_{X,x}$  et  $\mathcal{O}_{Y,y}$  ont même dimension et même profondeur.
- ii)  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier, resp. Cohen-Macaulay, resp. normal, resp. réduit si et seulement si  $\mathcal{O}_{Y,y}$  l'est.

*Démonstration.* (i) L'égalité des dimensions découle du ii) de la proposition précédente, via le polynôme de Hilbert.

(ii) La permanence de la régularité découle de (i). L'assertion pour Cohen-Macaulay découle de l'égalité des profondeurs. Pour la normalité, on utilise le critère de Serre :

*Un anneau local noethérien est normal si et seulement si*

- i) pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1, le localisé  $A_{\mathfrak{p}}$  est régulier.
- ii) pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur  $\geq 2$ , la profondeur de  $A_{\mathfrak{p}}$  est  $\geq 2$ .

Puis on remarque que le morphisme  $\text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$  conserve la hauteur des idéaux et que les localisés de ce morphismes sont étales.  $\square$

Pour un point  $x$  d'un schéma  $X$  on définit l'espace tangent en  $x$  comme le dual  $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$  de l'espace cotangent. C'est un espace vectoriel sur  $\kappa(x)$ . Tout morphisme  $f : Y \longrightarrow X$  envoyant un point  $y$  sur un point  $x$  induit une *application tangente*

$$T_y(f) : (\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)^* \longrightarrow (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \otimes \kappa(y).$$

Celle-ci est duale de l'application cotangente qui est le morceau de degré 1 du morphisme entre les gaudés  $\mathfrak{m}$ -adiques du (i) de la proposition précédente. Ainsi on extrait de ce (i) la propriété suivante :

**3.3.14 COROLLAIRE.**— *Pour un morphisme étale, l'application tangente  $T_y(f)$  ci-dessus est un isomorphisme.*

**3.3.15 Remarque.** Comme le suggère ce dernier résultat, ainsi que le iii) de la remarque précédente, les morphismes étales sont les analogues en géométrie algébrique des "isomorphismes locaux" en topologie. Pour des variétés sur  $\mathbb{C}$ , c'est plus qu'une analogie. En effet, la forme locale des morphismes étales et le théorème des fonctions implicites, qui permet de paramétrer une solution d'une équation polynomiale, montrent qu'un morphisme étale

entre deux variété sur  $\mathbb{C}$  est un isomorphisme local pour la *topologie analytique* (mais pas pour la topologie de Zariski).

Cette analogie a été particulièrement fructueuse pour les développements et les applications de la géométrie algébrique. Citons trois exemples.

- i) De même que les revêtements localement triviaux permettent de définir le groupe fondamental d'un espace topologique, les *revêtements étales* (voir plus bas) permettent de définir le *groupe fondamental d'un schéma*.
- ii) On sait retrouver la cohomologie singulière d'un espace topologique comme cohomologie du faisceau constant pour le "topos" formé par les revêtements localement triviaux. De même, les morphismes étales forment un "site" sur lequel on peut faire de la cohomologie des faisceaux. La *cohomologie étale* a des propriétés remarquables, notamment pour les variétés sur un corps  $k$ . Si  $k = \mathbb{C}$  elle redonne la cohomologie singulière. Si  $k$  est un corps fini, elle permet de compter le nombre de  $k$ -points d'une variété. Pour tout autre corps  $k$ , par exemple  $\mathbb{Q}$ , les espaces de cohomologie étale sont munis d'une action du groupe de Galois absolu de  $k$ , et ont donc un intérêt arithmétique primordial.
- iii) Tout comme les revêtements localement triviaux, les morphismes étales sont *rigides par déformation*. Et pour un morphisme de type fini, c'est même là une propriété caractéristique.

Vue l'importance de ces applications, nous en disons un peu plus, sans toutefois donner de détails. Pour la définition du groupe fondamental d'un schéma, voici comment l'on procède (voir SGA1, Exp. V pour les preuves).

**3.3.16 DÉFINITION.**— *On appelle revêtement étale tout morphisme étale et fini.*

Soit  $X$  un schéma et soit  $\mathcal{C}_X$  la catégorie des revêtements étales  $Y \xrightarrow{f} X$  de  $X$ . On montre le résultat suivant :

**3.3.17 THÉORÈME.**— *La catégorie  $\mathcal{C}_X$  est "Galoisienne", i.e. possède les propriétés suivantes :*

- i) *Existence des limites inductives et projectives finies.*
- ii) *Factorisation de tout morphisme  $f$  en une composée  $i \circ p$ , avec  $p$  un épimorphisme strict et  $i$  un isomorphisme sur un facteur direct.*

Un épimorphisme  $p : X \rightarrow X'$  est dit *strict* si la suite

$$X \times_{X'} X \rightrightarrows X \xrightarrow{p} X'$$

est exacte.

Soit maintenant  $\bar{x} : \text{Spec}(\Omega) \hookrightarrow X$  un point "géométrique" de  $X$ , i.e.  $\Omega$  est un corps algébriquement clos. On définit le foncteur "fibre en  $\bar{x}$ "

$$\begin{aligned} F_{\bar{x}} : \mathcal{C}_X &\rightarrow \mathcal{E}ns \\ (Y \xrightarrow{f} X) &\mapsto f^{-1}(\bar{x}) \end{aligned}$$



C'est un foncteur contravariant à valeurs dans les ensembles finis.

**3.3.18 THÉORÈME.**— *Le foncteur  $F_{\bar{x}}$  est un “foncteur fibre” sur la catégorie Galoisienne  $\mathcal{C}_X$ , i.e. il possède les propriétés suivantes :*

- i) Commute aux limites projectives et inductives finies.*
- ii) Si  $F_{\bar{x}}(f)$  est une bijection, alors  $f$  est un isomorphisme.*

On applique alors une machinerie abstraite valable pour toute catégorie Galoisienne  $\mathcal{C}$  munie d'un foncteur fibre  $F$ . Soit  $\text{Aut}(F)$  le groupe des automorphismes du foncteur fibre  $F$ . On le munit de la topologie engendrée par les noyaux  $\text{Aut}(F) \longrightarrow \text{Aut}(F(Y))$  pour  $Y$  objet de  $\mathcal{C}$ . En particulier, les sous-groupes ouverts sont tous d'indice fini. Par construction le foncteur  $F$  induit un foncteur

$$\tilde{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Aut}(F) - \mathcal{E}ns$$

où le terme de droite désigne la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de  $\text{Aut}(F)$ . Alors on montre

**3.3.19 PROPOSITION.**— *Le foncteur  $\tilde{F}$  est une équivalence de catégories.*

Dans le cas qui nous intéresse, on note  $\pi_1(X, \bar{x})$  pour  $\text{Aut}(F_{\bar{x}})$  et on l'appelle le *groupe fondamental du schéma pointé*  $(X, \bar{x})$ . Contrairement au cas topologique, il s'agit ici d'un groupe topologique profini, et non un groupe discret. On démontre que si  $\bar{y}$  est un autre point géométrique de  $X$ , alors  $F_{\bar{y}}$  est isomorphe à  $F_{\bar{x}}$ <sup>5</sup>. Le groupe fondamental ne dépend donc pas du point base, à isomorphisme *non unique* près. Lorsque  $\pi_1(X) = 0$  on dit que  $X$  est *simplement connexe*. Ceci équivaut à la propriété que tout revêtement étale de  $X$  est isomorphe à une somme de copies de  $X$ .

**3.3.20 Exemples.** (i) Lorsque  $X$  est une variété algébrique sur  $\mathbb{C}$ , on montre que le  $\pi_1$  algébrique défini ci-dessus s'identifie à la complétion profinie du  $\pi_1$  topologique.

(ii) Si  $X = \text{Spec}(k)$  pour un corps  $k$  et  $\bar{x} = \text{Spec}(\bar{k})$  pour une clôture algébrique de  $k$ , alors  $\pi_1(X, \bar{x}) = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

(iii) On montre en arithmétique que tout corps de nombres est ramifié sur  $\mathbb{Q}$  en au moins un premier. Cela implique que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  n'a pas de revêtement étale non trivial, i.e. que  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  est simplement connexe.

**3.3.21 Exercice.** Vérifier que le morphisme  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1, x \mapsto x^p - x$  est un revêtement étale non trivial. En particulier la droite affine sur  $\mathbb{F}_p$  n'est pas simplement connexe !

---

<sup>5</sup>On peut considérer l'ensemble des isomorphismes  $F_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} F_{\bar{y}}$  comme un analogue de l'ensemble des classes d'homotopie de chemins entre deux points  $x$  et  $y$  d'un espace topologique

### 3.4 Morphismes lisses

On a déjà rappelé qu'une variété sur un corps algébriquement clos est dite *lisse* si tous ses points sont réguliers. Le but ici est d'introduire une version relative de la lissité. Il y a plusieurs définitions possibles, et on va vérifier qu'elles sont équivalentes.

La première définition s'inspire de la géométrie différentielle.

**3.4.1 DÉFINITION.**— Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme et  $x \in X$ . On dit que  $f$  est lisse en  $x$  s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , un entier  $n$  et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & S \times \mathbb{A}^n \\ & \searrow f|_U & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

avec  $\varphi$  un morphisme étale. On dit que  $f$  est lisse s'il est lisse en tous les points de  $X$ .

Par rapport à ce qu'on pourrait attendre de l'analogie avec la géométrie différentielle, on autorise donc  $\varphi$  à être étale plutôt que de lui imposer d'être une immersion ouverte. La première chose à faire est de comparer cette définition avec la précédente, lorsque  $S$  est le spectre d'un corps algébriquement clos.

**3.4.2 PROPOSITION.**— Soit  $k$  un corps algébriquement clos,  $X$  un  $k$ -schéma de type fini, et  $x$  un point fermé de  $X$ . Alors le morphisme structural  $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est lisse au point  $x$  si et seulement si l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier.

*Démonstration.* L'implication directe découle des remarques suivantes : l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n, y}$  est régulier pour tout point  $y$  de  $\mathbb{A}_k^n$  ; le caractère régulier est préservé par les morphismes étales, cf Proposition 3.3.13 ii).

Prouvons l'implication réciproque. Supposons donc  $\mathcal{O}_{X,x}$  régulier et choisissons un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  s'annulant en  $x$  et dont les images forment une base de  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  (de sorte que  $n = \dim_x(X)$ ). Ces fonctions définissent un morphisme  $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}_k^n$ . Par définition de "régulier", le morphisme local  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  induit un isomorphisme des gradués  $gr^{\mathfrak{m}_{\varphi(x)}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n} \xrightarrow{\sim} gr^{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{X,x}$ . Comme l'extension résiduelle est triviale (en effet,  $\kappa(x) = \kappa(y) = k$ , par le Nullstellensatz), on conclut grâce à 3.3.13 (i) que  $\varphi$  est étale en  $x$ . Il ne reste plus qu'à rapetisser convenablement  $U$ .  $\square$

**3.4.3 Remarque.** (i) Si  $k$  n'est pas algébriquement clos, la preuve ci-dessus montre que si  $f$  est lisse en  $x$ , alors  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier. La réciproque n'est vraie que si  $\kappa(x)$  est une extension séparable de  $k$ . En particulier, si  $k$  est parfait, "lisse sur  $k$ " équivaut à "régulier" pour un schéma de type fini sur  $k$ .

(ii) Sur un corps algébriquement clos,  $X$  (disons connexe) est lisse sur  $k$  si et seulement si  $\Omega_{X/k}$  est libre de rang  $\dim(X)$ . On verra plus loin que cette équivalence est encore vraie sur un corps quelconque. En particulier,  $X$  est lisse sur un corps  $k$  si et seulement si  $X_{\bar{k}}$  est lisse sur  $\bar{k}$ .

**3.4.4 Remarques.** (i) tout morphisme étale est lisse. (ii) Les morphismes lisses sont stables par composition et changement de base.

**3.4.5 PROPOSITION.**— (Critères fibre à fibre). Soit  $Y \xrightarrow{f} X$  un morphisme de  $S$ -schémas,  $y$  un point de  $Y$ ,  $x$  son image dans  $X$  et  $s$  celle dans  $S$ . Alors on a :

- i)  $f$  est non ramifié au point  $y$  si et seulement si  $f \times \kappa(s) : Y_s \rightarrow X_s$  est non ramifié au point  $y$ .
- ii) Supposons de plus  $X$  et  $Y$  plats sur  $S$ . Alors  $f$  est plat (resp. étale, lisse) en  $y$  si et seulement si  $f \times \kappa(s) : Y_s \rightarrow X_s$  est plat (resp. étale, lisse) en  $y$ .

*Démonstration.* (i) On a  $\mathcal{O}_{Y_s, y} = \mathcal{O}_{Y, y} / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{Y, y}$  et de même pour  $\mathcal{O}_{X_s, x}$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{O}_{Y, y} / \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y, y} = \mathcal{O}_{Y_s, y} / \mathfrak{m}_{X_s, x} \mathcal{O}_{Y, y}$ . Ainsi le critère 3.3.4 ii) nous dit que  $g$  est non ramifié en  $y$  si et seulement si  $g \times \kappa(s)$  l'est.

(ii) Pour les trois propriétés, remarquons que la partie “seulement si” provient du fait que ces propriétés restent vraies après changement de base. Il suffit donc de prouver la partie “si”.

Traitons d'abord la platitude. On applique plusieurs fois le critère 3.3.10 ii). En effet, la platitude de  $\mathcal{O}_{Y, y}$  et  $\mathcal{O}_{X, x}$  sur  $\mathcal{O}_{S, s}$  fournit les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{S, s}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{X, x}) \text{ et } \mathcal{O}_{Y, y} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{S, s}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{Y, y})$$

desquels on déduit que le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{Y, y} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x}} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{X, x}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{\mathfrak{m}_s}(\mathcal{O}_{Y, y})$$

est un isomorphisme. Ceci, couplé à l'hypothèse  $\mathcal{O}_{Y, y} / \mathfrak{m}_s$  est plat sur  $\mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_s$  permet de conclure. On prend en effet  $A = \mathcal{O}_{X, x}$ ,  $M = \mathcal{O}_{Y, y}$ , et  $I = \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X, x}$ .

Pour le caractère étale, cela découle de la platitude et la non ramification, déjà traitées.

Traitons donc le cas lisse. Un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_s & \xrightarrow{\varphi_s} & \mathbb{A}_{X_s}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_s & \longrightarrow & X_s \end{array}$$

est donnée par  $n$  fonctions  $f_i \in \Gamma(U_s, \mathcal{O}_{U_s})$ . Notons encore  $f_i$  les germes de ces fonctions dans  $\mathcal{O}_{Y_s, y}$  et choisissons des relèvements  $f_i$  dans  $\mathcal{O}_{Y, y}$ . Ces germes s'étendent à un voisinage  $U$  de  $y$  et définissent un diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}_X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Par ce qu'on a déjà prouvé,  $\varphi$  est étale en  $y$ , puisque  $\varphi_s$  est étale en  $y$ . Quitte à rétrécir  $U$ , on a donc un diagramme comme dans la définition de lisse.  $\square$

**3.4.6 Remarque.** Si on fait en particulier  $S = X$ , on voit qu'un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  est lisse si et seulement si il est plat à fibres lisses.

**3.4.7 PROPOSITION.**— (*Propriétés locales*) Si  $f : Y \rightarrow X$  est lisse en  $y$ , alors  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est régulier (resp. Cohen-Macaulay, resp. normal, resp. réduit) si et seulement si  $\mathcal{O}_{X,x}$  l'est.

*Démonstration.* Cela découle du fait que ces assertions sont vraies pour étale et pour les morphismes  $\mathbb{A}_X^n \rightarrow X$ .  $\square$

**3.4.8 PROPOSITION.**— Si  $f : X \rightarrow S$  est lisse alors  $f$  est différentiellement lisse. En particulier,  $\Omega_{X/S}$  est localement libre. Son rang est la dimension relative de  $f$ .

*Démonstration.* Cela découle du fait que les morphismes étales et les morphismes  $\mathbb{A}_S^n \rightarrow S$  sont différentiellement lisses, et du fait qu'une composée de morphismes plats différentiellement lisses est encore plate et différentiellement lisse. Pour ce dernier point, il suffit d'utiliser les diagrammes de la preuve de la proposition 3.2.9.  $\square$

Nous voulons maintenant savoir quand un sous-schéma fermé d'un schéma lisse est lisse.

**3.4.9 THÉORÈME.**— Soit  $X$  un  $S$ -schéma lisse,  $Y$  sous-schéma fermé de  $X$  d'idéal  $\mathcal{I}$ , et  $x \in X$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $Y$  est lisse en  $x$ .
- ii) Il existe un diagramme de  $S$ -schémas

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \longleftarrow & U & \cap & Y & \xrightarrow{\varphi|_{U \cap Y}} & \mathbb{A}_S^{n-p} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longleftarrow & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}_S^n
 \end{array}$$

avec  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $\varphi$  un morphisme étale, et les deux carrés cartésiens. (Aucun cas  $p = \text{Codim}(Y, X)$ ).

iii) (*Critère Jacobien*). Il existe des générateurs  $g_1, \dots, g_p$  de  $\mathcal{I}_x$  sur  $\mathcal{O}_{X,x}$ , tels que les  $dg_i$  sont linéairement indépendants dans  $\Omega_{X/S,x} \otimes \kappa(x) = \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}} \otimes \kappa(x)$ . (Rappelons que  $d : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,s}}$  est la dérivation universelle).

iv) la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{Y/X} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{d} i^* \Omega_{X/S} \rightarrow \Omega_{Y/S} \rightarrow 0$$

est exacte en  $x$  et formée de modules localement libres.

*Démonstration.* Les propriétés i), ii) et iv) sont vraies pour l'immersion de  $Y = \mathbb{A}_S^p$  dans  $X = \mathbb{A}_S^n$ . On en déduit que ii) implique ces trois propriétés, car les morphismes étales induisent des isomorphismes sur les  $\Omega$ , cf remarque 3.3.8 v).

Prouvons  $iii) \Rightarrow ii)$ . On peut trouver des fonctions  $g_{p+1}, \dots, g_n$  dans  $\mathcal{O}_{X,x}$  dont les différentielles complète la famille libre de  $dg_i, i \leq p$  en une base de  $\Omega_{X/S}$  en  $x$ . Ces germes

s'étendent en des fonctions sur un voisinage de  $x$  et définissent un diagramme comme dans ii). Par construction  $\varphi$  induit un isomorphisme  $\varphi^* \Omega_{\mathbb{A}_S^n/S} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X/S}$  au voisinage du point  $x$ , et par conséquent  $\Omega_{U/\mathbb{A}_S^n} = 0$  dans ce voisinage. Reste à voir que  $\varphi$  est plat en  $x$ . Par le critère fibre à fibre, on se ramène au cas où  $S$  est le spectre d'un corps. On sait alors que  $\mathcal{O}_{X,x}$  est un anneau régulier, de même que  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, \varphi(x)}$ . Par construction, le morphisme  $\varphi$  induit un isomorphisme des gradués  $\kappa(x) \otimes \text{gr}^{\text{m}\varphi(x)}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, \varphi(x)}) \xrightarrow{\sim} \text{gr}^{\text{m}x}(\mathcal{O}_{X,x})$ . On conclut par le critère de platitude 3.3.10.

Prouvons  $i) \Rightarrow iii)$ . Dans la suite exacte

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{d} i^* \Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{Y/S} \longrightarrow 0,$$

les deux derniers modules sont libres en  $x$ . On peut alors choisir des germes  $g_1, \dots, g_p$  dans  $\mathcal{I}_x$  dont les images par  $d$  forment une base du noyau de  $i^* \Omega_{X/S} \longrightarrow \Omega_{Y/S}$ . Ces germes s'étendent en des fonctions sur un voisinage de  $x$  qui par l'implication prouvée précédemment définissent un sous-schéma  $S$ -lisse  $Y'$  de  $X$ . Au voisinage de  $x$  on a par construction  $Y \subset Y'$  donc  $Y = Y'$  par égalité des dimensions relatives.

Enfin, l'implication  $iv) \Rightarrow iii)$  est triviale. □

**3.4.10 COROLLAIRE.**— *Soit  $f : X \longrightarrow S$  et  $f' : X' \longrightarrow S'$  son changement de base par un  $S$ -schéma plat  $S'$ . Soit  $x' \in X'$  d'image  $x \in X$ . Alors  $f$  est lisse en  $x$  si et seulement si  $f'$  est lisse en  $x'$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $X$  affine de type fini sur  $S$  affine. On réalise alors  $X$  comme un sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_X^N$ , puis on utilise le critère (iv). □

**3.4.11 Remarques.** (i) La lissité peut donc se tester après changement de base fidèlement plat.

(ii) Ce corollaire justifie la remarque 3.4.3.

Voici une version relative du iii) du théorème 3.1.10.

**3.4.12 THÉORÈME.**— *Soit  $X$  un  $S$ -schéma,  $Y$  sous-schéma fermé de  $X$  d'idéal  $\mathcal{I}$ , et  $x \in X$ . On suppose  $Y$  lisse en  $x$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*i)  $X$  est lisse en  $x$ .*

*ii) L'immersion de  $Y$  dans  $X$  est régulière.*

*Démonstration.* L'implication  $i) \Rightarrow ii)$  résulte du critère ii) du théorème précédent couplé avec le fait que l'immersion  $\mathbb{A}_S^p \hookrightarrow \mathbb{A}_S^n$  est régulière.

Pour la réciproque, on travaille localement. On complète un système régulier de générateurs  $g_1, \dots, g_p$  de  $\mathcal{I}$  par des fonctions  $g_{p+1}, \dots, g_n$  sur  $X$  dont la restriction à  $Y$  définissent (localement) un morphisme étale  $Y \longrightarrow \mathbb{A}_S^{n-p}$ . On obtient ainsi (localement) un morphisme

$X \longrightarrow \mathbb{A}_S^n$ , qui s'inscrit dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & U \cap Y & \xrightarrow{\varphi|_{U \cap Y}} & \mathbb{A}_S^{n-p} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}_S^n \end{array}$$

Reste à voir que  $\varphi$  est étale. On voit que  $\varphi$  est non ramifié puisque  $(\Omega_\varphi)_x = (i^*\Omega_\varphi)_x = (\Omega_{\varphi|_{Y \cap U}})_x = 0$  puisque  $\varphi|_{Y \cap U}$  est étale. Pour la platitude, on utilise le critère 3.3.10 ii) avec  $A = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^n, \varphi(x)}$ ,  $B = M = \mathcal{O}_{X,x}$  et  $I$  l'idéal tel que  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_S^{n-p}, \varphi(x)} = A/I$ . Alors  $B/IB = M/IM = \mathcal{O}_{Y,x}$  est bien plat sur  $A/I$ , et l'hypothèse de régularité de  $IB$  nous assure que le morphisme  $B \otimes_A gr^I(A) \longrightarrow gr^{IB}(B)$  est un isomorphisme. □

**3.4.13 COROLLAIRE.**— *Soit  $X$  un schéma et  $Y$  un sous-schéma fermé. Supposons  $X$  et  $Y$  lisses sur  $S$ . Alors l'éclatement  $\tilde{X}_Y$  et son diviseur exceptionnel  $Y'$  sont lisses sur  $S$ .*

*Démonstration.* Par le théorème précédent,  $Y$  est régulièrement immergé dans  $X$ . D'après la proposition 3.1.7, le diviseur exceptionnel  $Y'$  s'identifie à  $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$  donc est lisse sur  $Y$ , et par composition lisse sur  $S$ . Or, étant un diviseur, il est régulièrement immergé dans  $\tilde{X}_Y$ , donc d'après le théorème précédent, ce dernier est lisse sur  $S$ . □

**3.4.14 COROLLAIRE.**—  *$f : X \longrightarrow S$  est lisse en  $x$  si et seulement si il est plat et différentiellement lisse en  $x$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu  $\Rightarrow$ . Supposons donc  $f$  plat différentiellement lisse. D'après le corollaire plus haut, il suffit de montrer que  $f$  devient lisse après n'importe quelle extension fidèlement plate. On peut donc supposer qu'il existe une section  $i : S \hookrightarrow X$  de  $f$  et un point  $s \in S$  tel que  $x = i(s)$  (faire un changement de base par  $S' = X$ ). Le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & S \\ \downarrow i & & \downarrow \text{Id} \times i \circ f & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_S X & \xrightarrow{\pi_2} & X \end{array}$$

et la proposition 3.1.14 montrent que l'immersion  $S \hookrightarrow X$  est régulière en  $x$ . Comme  $S$  est évidemment lisse sur  $S$ , on conclut par le résultat précédent que  $X$  est lisse sur  $S$  en  $x$ . □

**3.4.15 Lissité et lissité formelle.** Le critère Jacobien est en principe intéressant pour déterminer si un schéma donné par des équations est lisse ou non. Cependant beaucoup de schémas intéressants ne sont pas donnés par des équations, ou en tous cas ce n'est pas la meilleure manière de les voir. C'est par exemple le cas des espaces de modules (de fibrés, de variétés abéliennes, de courbes, etc.) Il existe un autre critère de lissité plus adapté à ces situations.

On dit qu'un morphisme  $f : X \longrightarrow S$  est formellement lisse, resp. non ramifié, resp. étale, si pour tout schéma affine  $T$ , tout sous-schéma  $T_0$  défini par un idéal nilpotent, et tout carré commutatif

$$(3.4.15.1) \quad \begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{u_0} & X \\ \downarrow & \nearrow u & \downarrow f \\ T & \xrightarrow{v} & S \end{array}$$

il existe une, resp. au plus une, resp. exactement une flèche diagonale  $u$ , appelée “relèvement”, rendant les deux triangles commutatifs. Remarquons que

- pour “formellement étale” et “formellement non ramifié”, on peut enlever l’hypothèse affine sur  $T$  en vertu de l’unicité qui permet de recoller les relèvements ;
- on peut supposer l’idéal  $\mathcal{J}$  définissant  $T_0$  dans  $T$  de carré nul  $\mathcal{J}^2 = 0$ , par un dévissage évident.

**3.4.16 THÉORÈME.**— *Le morphisme  $f$  est lisse, resp. étale, resp. non-ramifié, si et seulement si il est formellement lisse, resp. étale, resp. non-ramifié. (rappelons que  $f$  est supposé de type fini).*

*Démonstration.* Regardons la situation dans le cas affine. On s’intéresse donc à un diagramme d’anneaux

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u_0} & R/I \\ \uparrow & \nearrow u & \uparrow \\ A & \xrightarrow{v} & R \end{array}$$

avec  $I$  un idéal de carré nul. On remarque que  $I = I/I^2$  est naturellement un  $R/I$ -module et par conséquent un  $B$ -module. Soient  $u, u'$  deux relèvements de  $u_0$  comme dans le diagramme. Un calcul montre que la différence  $u - u' : B \longrightarrow I$  est une  $A$ -dérivation de  $B$  à valeurs dans  $I$ . Ainsi

$$(3.4.16.2) \quad (u - u') \in \text{Der}_A(B, I) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, I) = \text{Hom}_{R/I}(R/I \otimes_B \Omega_{B/A}, I).$$

*Le cas non-ramifié.* Le calcul ci-dessus appliqué à  $R = (B \otimes_A B)/I_{B/A}^2$  et  $I = I_{B/A}/I_{B/A}^2 = \Omega_{B/A}$  avec  $u$  le relèvement donné par  $b \in B \mapsto b \otimes 1 \in B \otimes B$  montre l’équivalence entre non-ramifié et formellement non-ramifié dans le cas affine. Dans le cas général, il suffit de recouvrir  $f$  par des morphismes entre ouverts affines pour conclure, puisque l’unicité localement partout d’un éventuel relèvement implique évidemment son unicité globale.

*Le cas étale.* Montrons qu’un morphisme étale est formellement étale. Partons d’un diagramme (3.4.15.1) et posons  $X_T = X \times_S T$  et  $X_{T_0} = X \times_S T_0$ . On doit trouver une section  $u$  du morphisme étale  $X_T \xrightarrow{f_T} T$ , sachant que l’on dispose d’une section  $u_0$  de  $X_{T_0} \xrightarrow{f_{T_0}} T_0$ . Remarquons que la section  $u_0$  est une immersion fermée et ouverte, puisque c’est le changement de base du morphisme diagonal  $\Delta_{f_{T_0}}$  par le morphisme  $\text{Id} \times (u_0 \circ f)$  :

$X_{T_0} \longrightarrow X_{T_0} \times_{T_0} X_{T_0}$ . Ainsi  $u_0$  est un isomorphisme de  $T_0$  sur un ouvert fermé  $Y_0$  de  $X_{T_0}$ . Par conséquent,  $f_{T_0}$  induit un isomorphisme  $Y_0 \xrightarrow{\sim} T_0$ . Soit alors  $Y$  le sous-schéma ouvert fermé de  $X_T$  dont l'espace sous-jacent est le même que celui de  $Y_0$ . Il nous suffira de montrer que  $f_T$  induit un isomorphisme  $Y \xrightarrow{\sim} T$ . Or, le morphisme  $f_T$  est un homéomorphisme universel (*i.e.* reste un homéomorphisme après tout changement de base) car  $f_{T_0}$  en est un. En particulier,  $f_T$  est propre, donc fini puisqu'il est aussi quasi-fini. Par ailleurs, les extensions résiduelles de  $f_T$  sont triviales puisque ce sont les mêmes que celles de  $f_{T_0}$ . Ainsi, pour  $t \in T$  d'image réciproque  $y \in Y$ , l'homomorphisme local  $\mathcal{O}_{T,t} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$  est fini et induit un isomorphisme des complétés. C'est donc un isomorphisme, et  $f$  induit bien un isomorphisme  $Y \xrightarrow{\sim} T$ .

Pour aider l'intuition, on peut considérer le cas particulier suivant : supposons  $S$  affine d'anneau  $A$  et  $X$  affine d'anneau  $B$  de la forme  $A[t] = A[T]/P(T)$  avec  $P$  un polynôme unitaire et  $P'(t)$  inversible dans  $B$ . Supposons aussi  $T$  affine d'anneau  $R$  et  $T_0$  donné par l'idéal nilpotent  $I$ . Choisissons un relèvement  $r_0$  dans  $R$  de  $u_0(t)$ . On a alors  $P(r_0) \in I$  et  $P'(r_0) \in R^\times$ . On vérifie alors qu'en posant  $u(t) := r_0 - \frac{P(r_0)}{P'(r_0)}$  on définit un relèvement comme voulu.

La réciproque (formellement étale  $\Rightarrow$  étale) découlera du cas lisse ci-dessous, puisque étale = lisse + non-ramifié.

*Le cas lisse.* Montrons que lisse  $\Rightarrow$  formellement lisse. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  tel que  $f|_U$  soit la composée d'un morphisme étale et d'un morphisme  $\mathbb{A}_S^n \longrightarrow S$ . Soit  $V_0$  un ouvert affine de  $T_0$  contenu dans  $u_0^{-1}(U)$ . Il induit aussi un ouvert  $V$  de  $T$  (puisque  $T$  et  $T_0$  ont même espace topologique). On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V_0 & \xrightarrow{u_0} & U \\
 \downarrow & \nearrow u & \downarrow f \\
 V & \xrightarrow{v} & S
 \end{array}$$

On a déjà vu que étale implique formellement étale. Il suffira donc de compléter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 V_0 & \xrightarrow{u_0} & \mathbb{A}_S^n \\
 \downarrow & \nearrow u & \downarrow f \\
 V & \xrightarrow{v} & S
 \end{array}$$

Or le morphisme  $u_0$  est le produit de  $v|_{V_0}$  par un morphisme  $V_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n$  donné par  $n$  éléments de  $\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{T_0})$ . Donc en choisissant  $n$  relèvements de ces éléments dans  $\Gamma(V, \mathcal{O}_T)$ , on obtient un morphisme  $T \longrightarrow \mathbb{A}^n$  dont le produit avec  $v$  fournit le  $u$  cherché.

En recouvrant  $X$  par des  $U$  comme ci-dessus, on obtient un recouvrement  $T = \bigcup_i V_i$  de  $T$  par des ouverts affines sur lesquels on connaît l'existence d'un relèvement  $u$ . Cependant, une difficulté apparaît car rien ne dit qu'on peut effectivement recoller ces différents relèvements. D'après 3.4.16.2, pour tous  $i, j$  la différence  $\delta_{ij} = u_i - u_j$  est un élément de  $\text{Hom}_{V_i \cap V_j}(u_0^* \Omega_{X/S}, \mathcal{I})$ . Ainsi les  $\delta_{ij}$  forment un 1-cocycle de Čech pour le recouvrement



$(V_i)_i$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{T_0}}(u_0^*\Omega_{X/S}, \mathcal{I})$ . C'est ici qu'intervient l'hypothèse que  $T$  est *affine*. En effet, pour tout schéma affine noethérien  $T = \text{Spec}(R)$  et tout faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , on a  $H^i(T, \mathcal{F}) = 0$  pour  $i > 0$  (ceci découle du fait que le faisceau quasi-cohérent associé à un module injectif est un faisceau flasque, donc  $\Gamma(T, -)$ -acyclique, cf Hartschorne III.3.5). Il s'ensuit que le 1-cocycle  $(\delta_{ij})_{i,j}$  peut être trivialisé, *i.e.* mis sous la forme  $\delta_{ij} = a_i - a_j$  avec des sections  $a_i \in \text{Hom}_{V_i}(u_0^*\Omega_{X/S}, \mathcal{I})$ . Par conséquent, les relèvements locaux  $u'_i := u_i - a_i$  se recollent.

Il reste à prouver que formellement lisse implique lisse. Pour cela, il suffit de montrer que  $\Omega_{X/S}$  est localement libre et qu'étant donné un  $S$ -plongement fermé  $g : X \hookrightarrow Y$  de  $X$  dans un  $S$ -schéma  $Y$ , d'idéal noté  $\mathcal{J}$ , la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow g^*\Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{X/S} \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, on peut alors appliquer le critère iv) de 3.4.9 en ayant pris soin de choisir  $Y$  lisse sur  $X$ , par exemple de la forme  $\mathbb{A}_S^n$ .

Par ce qui précède, il suffit de considérer le cas affine. Posons donc  $X = \text{Spec}(B)$  et  $S = \text{Spec}(A)$ . Montrons d'abord que  $\Omega_{B/A}$  est un  $B$ -module projectif. Partons d'un épimorphisme  $p : M \twoheadrightarrow N$  de  $B$ -module ; on doit prouver que le morphisme  $\text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \longrightarrow \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N)$  est encore surjectif. D'après 3.2.7, cette flèche s'écrit encore  $\text{Der}_A(B, M) \longrightarrow \text{Der}_A(B, N)$ . Fixons une  $A$ -dérivation  $\partial : B \longrightarrow N$  et considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \partial} & B \oplus N \\ f \uparrow & \searrow u & \uparrow \text{Id} \oplus p \\ A & \xrightarrow{f \oplus 0} & B \oplus M \end{array}$$

Ici  $B \oplus M$  désigne la  $B$ -algèbre dont le produit est donnée par  $(b, m)(b', m') = (bb', bm' + b'm)$  (en particulier  $M$  est un idéal de carré nul). Idem pour  $B \oplus N$ . La propriété de dérivation de  $\partial$  implique que  $\text{Id} \oplus \partial : B \longrightarrow B \oplus N$  est un morphisme de  $A$ -algèbres. Par lissité formelle, il existe  $u$  comme dans le diagramme. L'égalité  $(\text{Id} \oplus p) \circ u = (\text{Id} \oplus \partial)$  implique que  $u$  est de la forme  $\text{Id} \oplus \partial'$ , et un calcul montre que  $\partial' : B \longrightarrow M$  vérifie  $\partial'(bb') = b\partial'(b') + b'\partial'(b)$ . L'égalité  $u \circ f = f \oplus 0$  implique que  $\partial'_A = 0$  donc  $\partial'$  est une  $A$ -dérivation, qui vérifie  $\partial = p \circ \partial'$ . On a donc prouvé que  $\Omega_{B/A}$  est projectif sur  $B$ .

Passons à l'exactitude de la suite plus haut. Posons  $Y = \text{Spec}(C)$  et  $I$  l'idéal dans  $C$  tel que  $B = C/I$ . Il nous suffira d'exhiber un inverse à gauche du morphisme  $\delta : I/I^2 \longrightarrow C/I \otimes_C \Omega_{C/A}$ . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xlongequal{\quad} & C/I \\ f \uparrow & \searrow u & \uparrow \\ A & \longrightarrow & C/I^2 \end{array}$$

La lissité formelle de  $B$  sur  $A$  assure l'existence d'un  $u$  comme dans ce diagramme. D'où une décomposition  $C/I^2 = B \oplus I/I^2$ , et par conséquent une rétraction  $C/I^2 \twoheadrightarrow I/I^2$  de

l'inclusion  $I/I^2 \subset C/I^2$ . Considérons alors l'application  $\partial : C \rightarrow C/I^2 \rightarrow I/I^2$ . C'est une  $A$ -dérivation qui induit donc un  $C/I$ -morphisme

$$\gamma : C/I \otimes_C \Omega_{C/A} \longrightarrow I/I^2.$$

Montrons que  $\gamma \circ \delta = \text{Id}_{I/I^2}$ . Par définition de  $\delta$ , cela revient à montrer que la restriction de  $\partial$  à  $I$  est la projection canonique  $I \rightarrow I/I^2$ , ce qui découle immédiatement de la construction.  $\square$

En général (sans hypothèses noethériennes), un morphisme est dit lisse s'il est formellement lisse et de présentation finie.

**3.4.17 Exemple.** (i) Si  $X$  est un schéma lisse sur  $\mathbb{Z}_p$ , alors l'application  $X(\mathbb{Z}_p) \rightarrow X(\mathbb{F}_p)$  est surjective.

(ii) Le foncteur "fibre au point fermé", de la catégorie des morphismes étales sur  $\mathbb{Z}_p$  vers celle des morphismes étales sur  $\mathbb{F}_p$  est une équivalence de catégories.

## 4 Désingularisation. Autour du théorème de Hironaka

On travaille ici sur un corps algébriquement clos  $k$ . Une “variété” sur  $k$  est un  $k$ -schéma de type fini irréductible et réduit. On note  $X^{\text{sing}}$  le lieu des points où  $X$  n’est pas régulier et  $X^{\text{reg}}$  le complémentaire. On sait que  $X^{\text{reg}}$  est un ouvert non-vide, l’ouvert “de lissité”. Lorsque  $X$  est normale, on sait que  $X^{\text{sing}}$  est un fermé de codimension  $\geq 2$ .

### 4.1 Le problème de la désingularisation

Une désingularisation (ou résolution des singularités) d’une variété  $X$  est un morphisme propre et birationnel  $X' \xrightarrow{f} X$  avec  $X'$  une variété lisse. Un exemple simple (et très peu représentatif de la complexité du problème) est celui où  $X$  est une *courbe*. Dans ce cas, il existe une *unique* désingularisation donnée par *normalisation* de la courbe. En particulier  $f$  est alors un morphisme fini. En général, normaliser est bien-sûr une première étape pas chère vers une éventuelle désingularisation, mais bien insuffisante.

L’existence même d’une désingularisation est déjà intéressante, mais pour les applications, et même pour la preuve de leur existence, il est souhaitable d’ajouter quelques requêtes. Par exemple on peut déjà souhaiter que  $f$  soit projectif.

**4.1.1 La forme du lieu exceptionnel.** Pour tout morphisme birationnel  $f : X' \rightarrow X$ , il existe un plus grand ouvert non vide  $U$  de  $X$  tel que  $f : f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$ . On appelle *lieu exceptionnel* de  $f$  et on note  $\text{Ex}(f)$  le complémentaire de  $f^{-1}(U)$  dans  $X'$ . C’est donc un fermé de  $X'$ .

La première propriété que l’on peut demander à une “bonne” résolution des singularités est que son lieu exceptionnel soit aussi simple que possible, par exemple le support d’un diviseur. Cependant un diviseur général est encore trop compliqué (une hypersurface dans  $\mathbb{P}^n$  peut déjà avoir des singularités très désagréables). On utilise alors la notion de *diviseur à croisements normaux*.

Rappelons que dans un anneau local régulier  $A$  d’idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , on appelle *système de paramètres réguliers* une famille  $(f_1, \dots, f_n)$  d’éléments de  $\mathfrak{m}$  dont les images dans  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  en forment une base sur  $A/\mathfrak{m}$ . Dans le cas où  $A = \mathcal{O}_{X,x}$  on pourra aussi l’appeler un *système de coordonnées locales de  $X$  en  $x$* .

**4.1.2 DÉFINITION.**— *Soit  $X$  un schéma régulier.*

- *Un diviseur effectif  $D$  est appelé diviseur à croisements normaux si pour tout  $x \in X$ , il existe des coordonnées locales  $f_1, \dots, f_n$  et des entiers  $c_1, \dots, c_n$  tels que  $D|_{\mathcal{O}_{X,x}} = (f_1^{c_1} f_2^{c_2} \dots f_n^{c_n})$ .*
- *Un sous-schéma fermé  $Y$  est appelé diviseur à croisements normaux s’il est de la forme  $Y(D)$  pour  $D$  comme ci-dessus.*

**4.1.3 LEMME.**— *Soit  $X$  régulier et  $Y \subset X$  un fermé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $Y$  est le support d'un dcn au sens ci-dessus.
- ii) Le sous-schéma réduit de  $X$  défini par  $Y$  est localement donné par une équation du type  $f_1 f_2 \cdots f_m = 0$  pour des coordonnées locales  $f_1, \dots, f_m$  en  $x$ .
- iii) Soient  $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$  la décomposition de  $Y$  en composantes irréductibles. Pour tout sous-ensemble  $J$  de  $I$ , l'intersection  $Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j$  est soit vide, soit lisse de codimension  $|J|$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre i) et ii) est claire. Supposons iii). Soit  $x \in X$  et soit  $J_x$  l'ensemble des composantes contenant  $x$ . Pour chaque  $j \in J_x$ , la sous-variété  $Y_j$  est lisse de codimension 1 donc donnée localement par un paramètre régulier  $f_j \in \mathfrak{m}_x$ . L'équation de  $Y$  en  $x$  est alors  $\prod_{j \in J_x} f_j$  et l'intersection  $\bigcap_{j \in J_x} Y_j$  est donnée par l'idéal  $(f_j)_{j \in J_x}$ . D'après la preuve de 3.1.10 ii), l'hypothèse que cette intersection est lisse assure que les  $f_j$  sont linéairement indépendants dans  $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ . Supposons maintenant ii). Soit  $J$  un sous-ensemble de  $I$  tel que  $Y_J$  soit non vide, et  $x \in Y_J$ . Soit  $J_x$  comme ci-dessus. On a donc  $J_x \supset J$ . La forme de l'équation de  $Y$  au point  $x$  implique l'existence d'une bijection  $\{1, \dots, m\} \xrightarrow{\sim} J_x$  telle que  $f_{j(i)}$  soit une équation locale de  $Y_{j(i)}$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . Le ii) de 3.1.10 montre encore que  $Y_J$  est lisse au point  $x$ .  $\square$

Introduisons la propriété suivante d'une résolution des singularités  $X' \xrightarrow{f} X$  :

(RS1) Le lieu exceptionnel  $\text{Ex}(f)$  est le support d'un dcn.

Une autre requête naturelle à faire sur une bonne résolution des singularités est qu'elle ne touche pas au lieu régulier de  $X$  :

(RS2) Le lieu exceptionnel  $\text{Ex}(f)$  est contenu dans (et donc égal à)  $f^{-1}(X^{\text{sing}})$ .

Notons qu'en présence de (RS2), on peut renforcer (RS1) en demandant que la préimage schématique du fermé  $X^{\text{sing}}$  muni de la structure de sous-schéma fermé réduite, soit un diviseur.

**4.1.4 Exemple.** Soit  $S$  le cône quadrique d'équation  $(xy - z^2 = 0) \subset \mathbb{A}_k^3$ . Il a une singularité isolée en  $(0, 0, 0)$ . L'éclatement  $\tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$  de ce point est une désingularisation qui vérifie (RS2) et (RS1) renforcé. Le diviseur exceptionnel est un  $\mathbb{P}^1$ .

En effet, si l'on recouvre l'éclaté  $\tilde{\mathbb{A}}^3_{(0,0,0)}$  par les trois cartes affines  $U_z = \text{Spec}(k[\frac{u}{w}, \frac{v}{w}, z])$ ,  $U_y = \text{Spec}(k[\frac{u}{v}, y, \frac{w}{v}])$  et  $U_x = \text{Spec}(k[x, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}])$ , on voit que le transformé total de  $S$  est donné par les équations respectives  $z^2(\frac{u}{w} \cdot \frac{v}{w} - 1)$ ,  $y^2(\frac{w^2}{v^2} - \frac{u}{v})$  et  $x^2(\frac{w^2}{u^2} - \frac{v}{u})$ , et on obtient le transformé strict en divisant par la  $z$ ,  $y$ , ou  $x$ -torsion, ce qui donne les équations respectives  $\frac{u}{w} \cdot \frac{v}{w} - 1$ ,  $\frac{w^2}{v^2} - \frac{u}{v}$  et  $\frac{w^2}{u^2} - \frac{v}{u}$ . Ces équations montrent que  $U_z \cap \tilde{S}$  est égal à l'intersection de  $(U_y \cap \tilde{S}) \simeq \text{Spec}(k[y, \frac{w}{v}]) = \mathbb{A}_k^2$  et  $(U_x \cap \tilde{S}) = \text{Spec}(k[x, \frac{w}{u}]) = \mathbb{A}_k^2$ .

Plus généralement, les deux propriétés (RS1) et (RS2) sont utiles dans l'étude des singularités isolées car elles permettent d'associer à une telle singularité un invariant combinatoire, comme par exemple le type d'homotopie du complexe simplicial dual du dcn exceptionnel.

Cependant d'autres applications potentielles exigent de nouvelles requêtes.

**4.1.5** *Compatibilité avec les compactifications.* Une *compactification* de  $X$  est une  $k$ -variété propre  $\overline{X}$  contenant  $X$  comme ouvert. Si  $X$  est quasi-projective, on peut en obtenir en plongeant  $X$  dans un  $\mathbb{P}_k^n$  et en prenant l'adhérence. Néanmoins, même si  $X$  est lisse, les compactifications naturelles le sont rarement. De plus, même si  $\overline{X}$  est lisse, le complémentaire  $\overline{X} \setminus X$  l'est *très* rarement, et n'a presque aucune chance de le devenir après morphisme birationnel. On peut néanmoins souhaiter qu'il soit le plus simple possible. Pour les applications, notamment cohomologiques, la propriété recherchée est qu'il soit le support d'un dcn.

Dans ce cadre, la donnée de départ n'est plus seulement une variété  $X$  mais une paire  $(X, Z)$  avec  $Z \subsetneq X$  un sous-ensemble fermé de  $X$ . Les propriétés souhaitables deviennent alors

(RS1) Le fermé  $\text{Ex}(f) \cup f^{-1}(Z)$  est le support d'un dcn.

(RS2) Le lieu exceptionnel  $\text{Ex}(f)$  est contenu dans  $f^{-1}(X^{\text{sing}} \cup Z)$ .

On peut aussi renforcer (RS1) en demandant de plus que le *sous-schéma* fermé  $f^{-1}(Z)$  soit un diviseur ( $Z$  étant alors supposé non vide, et muni de la structure réduite). En présence de (RS2), on peut de même vouloir que le *sous-schéma* fermé  $f^{-1}(X^{\text{sing}})$  soit un diviseur. Notons que l'on retrouve la situation précédente en faisant  $Z = \emptyset$ .

**4.1.6 THÉORÈME.** (Hironaka)– *Supposons  $k$  de caractéristique 0. Soit  $(X, Z)$  une paire comme ci-dessus. Alors il existe une résolution des singularités  $X' \xrightarrow{f} X$  satisfaisant les propriétés (RS1) et (RS2).*

Cette version de résolution est déjà extrêmement utile. Mais on pourrait aussi espérer qu'il existe une construction “fonctorielle” de résolutions. L'exemple suivant montre qu'il ne faut pas trop en demander.

**4.1.7 Exemple.** Soit  $S$  le cône quadrique et  $\tilde{S}$  sa résolution de l'exemple précédent. Toute résolution forte se factorise par l'éclatement  $\tilde{S}$ , (vue la requête iii). Soit alors  $\varphi : \mathbb{A}_k^2 \rightarrow S$  donné par  $(x, y) \mapsto (x^2, y^2, xy)$ . La seule résolution forte de  $\mathbb{A}^2$  est l'identité. Or,  $\varphi$  ne se relève pas en un morphisme vers  $\tilde{S}$  puisque  $\varphi^{-1}(0, 0, 0) = (0, 0)$ .

**4.1.8 THÉORÈME.** (Hironaka?)– *Supposons  $k$  de caractéristique 0. Il existe un procédé  $(X, Z) \mapsto (X' \xrightarrow{f_{X,Z}} X)$  de désingularisation des paires  $(X, Z)$  comme ci-dessus qui est fonctoriel en les morphismes lisses.*

Comme application importante, on en déduit que si un groupe  $G$  agit sur  $X$  et préserve le fermé  $Z$ , il existe une résolution  $G$ -équivariante de  $(X, Z)$ , i.e. une résolution  $X' \xrightarrow{f} X$  avec  $X'$  muni d'une action de  $G$  et  $f$  équivariant.

**4.1.9 Changement d'approche : résolutions plongées.** Comme on l'a vu, tout morphisme projectif birationnel entre variétés algébriques est un éclatement. Cependant un éclatement quelconque peut être assez difficile à calculer. On peut alors essayer de construire une désin-

gularisation par éclatements “simples” successifs. Le problème est que les seuls éclatements vraiment “simples” sont les éclatements de sous-variétés lisses d’une variété lisse. Mais justement on part d’une variété qui n’est pas lisse...

L’idée est alors de considérer une variante *plongée* de résolution. Soit  $Y$  une sous-variété d’une variété lisse  $X$ . Une *résolution plongée* de  $Y$  est un morphisme projectif birationnel  $X' \xrightarrow{f} X$  tel que le *transformé strict*  $Y'$  de  $Y$  soit une désingularisation de  $Y$ .

Pour chercher une telle résolution plongée, on essaye de ne s’autoriser que des éclatements lisses :

(*RP3*) :  $f$  est une composition  $f : X' = X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_0} X_0 = X$  d’éclatements de centres lisses  $Z_j \subset X_j$ .

Cependant, si on veut contrôler le lieu exceptionnel à chaque éclatement, il est préférable d’imposer que l’intersection entre  $Z_j$  et  $\text{Ex}(f_0 \circ \dots \circ f_{j-1})$  soit aussi simple que possible. D’où la notion suivante :

**4.1.10 DÉFINITION.**— Soit  $X$  une variété lisse,  $Z$  une sous-variété et  $D$  un dcn. On dit que  $Z$  et  $D$  ont des croisements normaux si pour tout  $x$  il existe des coordonnées locales  $f_1, \dots, f_n$  en  $x$  telles que  $D$  soit donné par un monôme en les  $f_i$  et  $Z$  par l’idéal  $(f_1, \dots, f_m)$ .

En particulier, une sous-variété  $Z$  comme dans la définition est lisse. De plus, si  $Z$  n’est pas contenue dans  $D$ , l’intersection  $D \cap Z$  est un dcn sur  $Z$ . De plus, dans l’éclaté  $\tilde{X}_Z$ , le transformé total  $\pi_Z^{-1}(D)$  de  $D$  est un dcn.

(*RP3'*) :  $f$  est une composition  $f : X' = X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_0} X_0 = X$  d’éclatements de centre lisse  $Z_j \subset X_j$  ayant des croisements normaux avec  $\text{Ex}(f_0 \circ \dots \circ f_{j-1})$  (notons que par induction ce lieu exceptionnel est bien un dcn).

Dans ce cas,  $\text{Ex}(f)$  est le support d’un dcn. Maintenant, si l’on veut que la résolution  $Y' \rightarrow Y$  satisfasse (*RS1*), on rajoute

(*RP1*) : Le transformé strict  $Y'$  et le dcn  $\text{Ex}(f)$  n’ont que des croisements normaux.

Si l’on veut de plus que  $Y' \rightarrow Y$  satisfasse (*RS2*) on rajoute

(*RP2*) :  $f$  est un isomorphisme au-dessus de  $Y^{\text{reg}}$ ,

ce que l’on peut inclure dans (*RP3*) en demandant que le centre  $Z_j$  de l’éclatement  $f_j$  soit disjoint de  $Y^{\text{reg}}$  (cette condition fait sens si l’on pense qu’elle implique inductivement que  $f_0 \circ \dots \circ f_{j-1}$  est un isomorphisme au-dessus de  $Y^{\text{reg}}$ ).

Enfin, on est confronté au problème du recollement. En effet, toutes les variétés ne sont pas plongeables dans une variété lisse (mais toutes les quasi-projectives le sont bien-sûr). Pour pouvoir recoller il faut une certaine functorialité de la résolution plongée.

**4.1.11 THÉORÈME.** (Hironaka)— ( $k$  est toujours de caractéristique 0.) Il existe un procédé associant à toute paire  $(X, Y)$  comme ci-dessus une résolution plongée  $f$  satisfaisant

(RP1), (RP2) et (RP3)', et qui est de plus fonctorielle en les morphismes lisses  $X' \rightarrow X$  et les immersions fermées  $X \hookrightarrow X'$ .

Ce théorème implique l'existence d'une désingularisation forte et fonctorielle en les morphismes lisses.

**4.1.12** *Changement d'approche : principalisation d'idéaux.* Le théorème de résolution plongée est en fait déduit d'un théorème concernant les paires  $(X, \mathcal{I})$  avec  $X$  lisse et  $\mathcal{I}$  un faisceau d'idéaux *quelconque*. Le déplacement et l'amplification du problème initial sont cruciaux dans le raisonnement inductif qui sous-tend la preuve.

Soit  $(X, \mathcal{I})$  une telle paire. Un morphisme projectif birationnel  $X' \xrightarrow{f} X$  avec  $X'$  lisse est appelé

- *principalisation* de  $\mathcal{I}$  si  $f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$  est un idéal inversible (donc un diviseur effectif).
- *monomialisation* de  $\mathcal{I}$  si  $f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$  est un dcn.

Si on admet l'existence de désingularisations, on obtient une principalisation de  $(X, \mathcal{I})$  en éclatant  $\mathcal{I}$ , puis en résolvant l'éclatement  $\tilde{X}_{\mathcal{I}}$ , et on obtient une monomialisation en résolvant la paire  $(\tilde{X}_{\mathcal{I}}, Z)$  avec  $Z$  le support du diviseur exceptionnel. Mais on voudrait au contraire déduire l'existence de désingularisations de celle de principalisations.

**4.1.13** THÉORÈME. (Hironaka)– ( $k$  est de caractéristique 0). *Il existe un procédé associant à chaque paire  $(X, \mathcal{I})$  comme ci-dessus une monomialisation  $X' \xrightarrow{f} X$  de  $\mathcal{I}$ , de la forme prescrite en (RP3'), de lieu exceptionnel  $\text{Ex}(f)$  inclus dans le support du dcn  $f^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$ , et fonctoriel en les morphismes lisses  $Y \rightarrow X$  et les immersions fermées  $X \hookrightarrow Y$ .*

Ce théorème implique les deux précédents. On remarquera pourtant qu'il n'y est plus question de désingularisation ! En fait c'est la forme de la principalisation (axiome (RP3')) qui joue un rôle primordial.

Expliquons brièvement comment il implique la résolution plongée. On part donc d'une sous-variété  $Y$  dans une lisse  $X$  et on note  $\mathcal{I}$  son idéal. Soit  $f : X' \rightarrow X$  une principalisation de  $\mathcal{I}$  comme dans le théorème ci-dessus. On a donc une factorisation  $f : X' = X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_0} X_0 = X$  d'éclatements de centre lisse  $Z_j \subset X_j$  ayant des croisements normaux avec  $\text{Ex}(f_0 \circ \dots \circ f_{j-1})$ . Supposons d'abord  $Y$  de codimension au moins 2. Dans ce cas  $f$  ne peut pas être un isomorphisme au-dessus du point générique  $\eta_Y$  de  $Y$  et donc  $\text{Ex}(f)$  contient  $f^{-1}(Y)$ . Il existe alors un plus petit indice  $j$  tel que  $Z_j$  contienne  $\eta := (f_0 \circ \dots \circ f_{j-1})^{-1}(\eta_Y)$ . Comme de plus  $\text{Ex}(f)$  est inclus dans  $f^{-1}(Y)$ , le point  $\eta$  est le point générique de  $Z_j$ . Donc  $Z_j$  est le transformé strict de  $Y$  par  $f_0 \circ \dots \circ f_{j-1}$ . Comme  $Z_j$  est le centre d'un éclatement, il doit être lisse et c'est une désingularisation de  $\bar{X}$ . Il s'ensuit que le morphisme  $f_0 \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X$  est une désingularisation plongée de  $X$ , qui vérifie les propriétés (RP1), (RP2) et (RP3'). Si maintenant  $Y$  est de codimension 1, et donc un diviseur, alors le transformé strict de  $Y$  par  $f$  est une composante irréductible de  $\text{Ex}(f)$  donc est lisse, puisque  $\text{Ex}(f)$  est le support d'un dcn.

Une fois qu'on a la résolution plongée fonctorielle, on a la résolution "abstraite" fonc-

torielle des variétés. Pour avoir la résolution des paires  $(X, Z)$ , il suffit d'appliquer une nouvelle fois la principalisation.

**4.1.14** *Si la caractéristique est positive.* Des désingularisations sont connues en petite dimension et dans des cas particuliers. Le résultat le plus général est dû à De Jong. Au lieu de morphismes birationnels, il considère des *altérations*.

Une altération est un morphisme propre surjectif et génériquement fini.

**4.1.15** THÉORÈME. (De Jong)– *Soit  $X$  une variété sur un corps algébriquement clos et  $Z \subset X$  un fermé. Alors il existe une altération  $X' \xrightarrow{f} X$  génériquement étale telle que  $X'$  soit lisse et  $f^{-1}(Z)$  soit le support d'un dcn.*

Il n'y a pas de propriété générale de functorialité, mais en présence de l'action d'un groupe, il existe une version équivariante de ce résultat. Ce théorème a des conséquences cohomologiques nombreuses et importantes.