Université Pierre et Marie Curie - Paris VI — Faculté de Mathématiques

Géométrie algébrique 2 — 2009–2010

Examen du 1er mars 2010 (durée : 3h00)

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1. Soit K un corps et X le K-sous-schéma affine de $\mathbb{A}^4_K$ défini par l'équation $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$.

i. Quelle est la dimension de X ? Quel est le lieu singulier de X ?

ii. Soit o le point d'idéal (x_1, x_2, x_3, x_4). Montrer que l'éclatement $\pi_o : \widetilde{X}_o \longrightarrow X$ est une résolution forte (*i.e.* qui ne touche pas au lieu régulier). Calculer le diviseur exceptionnel, en tant que sous-variété de $\mathbb{P}^3_K$.

iii. Soit $P_1 \subset X$ le plan d'équations $x_1 = x_3 = 0$. Montrer que l'éclatement $\pi_1 : \widetilde{X}_{P_1} \longrightarrow X$ est une résolution forte, dont la fibre $C_1 := \pi_1^{-1}(o)$ en o est isomorphe à $\mathbb{P}^1_K$.

iv. Même question (et mêmes notations) avec le plan $P_2 \subset X$ d'équations $x_1 = x_2 = 0$.

v. Montrer que $\widetilde{X}_{P_2}$ et $\widetilde{X}_{P_1}$ sont isomorphes, mais pas X-isomorphes.

vi. Montrer que $\widetilde{X}_o$ n'est pas isomorphe à $\widetilde{X}_{P_i}$.

vii. Montrer que pour $i = 1, 2$, π_o se factorise de manière unique sous la forme $\pi_o = \pi_i \circ \rho_i$, où ρ_i s'identifie à l'éclatement de $\widetilde{X}_{P_i}$ le long de C_i. Puis montrer que le morphisme $\widetilde{X}_o \xrightarrow{(\rho_1,\rho_2)} \widetilde{X}_{P_1} \times_X \widetilde{X}_{P_2}$ ainsi obtenu est un isomorphisme.

Exercice 2. Soit K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension 2.

i. Montrer que le foncteur contravariant en le K-schéma T

$$\mathbb{X} : T \mapsto \{\varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_T}(V \otimes_K \mathcal{O}_T), \det(\varphi) = 0\}$$

est représentable par un K-schéma affine intègre de dimension 3. Soit $\mathbb{X}$ un représentant et $\varphi_{\mathbb{X}} : V \otimes_K \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow V \otimes_K \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ l'endomorphisme de déterminant nul “universel”. Quel est le lieu singulier de $\mathbb{X}$?

ii. Expliquer pourquoi $\mathbb{P}(V)$ représente le foncteur

$$T \mapsto \{\text{sous-}\mathcal{O}_T\text{-modules inversibles et localement facteurs directs } \mathcal{K} \text{ de } V \otimes_K \mathcal{O}_T\}.$$

Montrer que le foncteur

$$\widetilde{\mathbb{X}} : T \mapsto \{(\varphi, \mathcal{K}) \in \mathbb{X}(T) \times \mathbb{P}(V)(T),\ \mathcal{K} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)\}$$

est représentable par un sous-K-schéma fermé $\widetilde{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{Y} := \mathbb{X} \times_K \mathbb{P}(V)$.

iii. Montrer que $\widetilde{\mathbb{X}}$ est lisse sur K.

iv. On va montrer que $\pi : \widetilde{\mathbb{X}} \longrightarrow \mathbb{X}$ est une résolution forte (*i.e.* birationnelle, de lieu exceptionnel $\pi^{-1}(\mathbb{X}^{\mathrm{sing}})$).

(a) Soit $\lambda \in V^*$ une forme K-linéaire sur V, et soit T un K-schéma. Vérifier que pour $\varphi \in \mathbb{X}(T)$, si $\lambda \circ \varphi : V \otimes_K \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_T$ est surjective, alors $\mathrm{Ker}(\lambda \circ \varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$, et c'est l'unique sous-$\mathcal{O}_T$-module inversible localement facteur direct de $V \otimes_K \mathcal{O}_T$ qui soit contenu dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(b) Montrer que le lieu où $\lambda \circ \varphi_{\mathbb{X}}$ est surjective est un ouvert de $\mathbb{X}$, et en déduire que π est birationnelle.

(c) Faisant varier λ, montrer que π est un isomorphisme au-dessus de $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^{\mathrm{sing}}$.

v. Pour $\lambda \in V^*$, soit $\mathcal{I}_\lambda$ l'idéal $\mathrm{Im}(\lambda \circ \varphi_{\mathbb{X}}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$ et $\pi_\lambda : \widetilde{\mathbb{X}}_\lambda \longrightarrow \mathbb{X}$ l'éclatement de $\mathbb{X}$ en cet idéal.

(a) Montrer que $\pi^{-1}(\mathcal{I}_\lambda)\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{X}}}$ est un $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{X}}}$-module inversible.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\lambda \circ \pi_\lambda^*(\varphi_{\mathbb{X}}))$ est un sous-$\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{X}}_\lambda}$-module localement facteur direct de rang 1 de $V \otimes_K \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{X}}_\lambda}$, et contenu dans le noyau de $\pi_\lambda^*(\varphi_{\mathbb{X}})$.

(c) En déduire que $\widetilde{\mathbb{X}}_\lambda$ et $\widetilde{\mathbb{X}}$ sont canoniquement $\mathbb{X}$-isomorphes.

vi. Montrer que π_λ est isomorphe à la flèche π_1 du premier exercice.

vii. Considèrons maintenant le foncteur

$$\widetilde{\mathbb{X}}' : T \mapsto \{(\varphi, \mathcal{L}) \in \mathbb{X}(T) \times \mathbb{P}(V)(T),\ \mathcal{L} \subset \mathrm{Im}(\varphi)\}.$$

(a) Montrer qu'il est représentable par un sous-schéma fermé de $\mathbb{Y}$.

(b) Montrer que $\pi' : \widetilde{\mathbb{X}}' \longrightarrow \mathbb{X}$ est une résolution forte.

(c) Soit $v \in V$ et $\mathcal{I}_v$ l'idéal $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathbb{X}} \circ v)$ (où v est vu comme un $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}$-morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow V \otimes_K \mathcal{O}_{\mathbb{X}}$). Montrer que $\widetilde{\mathbb{X}}'$ est canoniquement isomorphe à l'éclaté de $\mathbb{X}$ en $\mathcal{I}_v$.

(d) Montrer que π' est isomorphe à la flèche π_2 de l'exercice précédent.

viii. Quel foncteur représente le K-schéma $\widetilde{X}_o$ de l'exercice précédent ?

Exercice 3. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine muni d'une action d'un groupe fini G. On note A^G l'anneau des G-invariants dans A et π le morphisme de X vers $Y = \mathrm{Spec}(A^G)$.

i. Montrer que si B_0 est un anneau *plat* sur A^G, alors $B_0 = (B_0 \otimes_{A^G} A)^G$.

ii. Montrer que pour tout schéma Z, tout morphisme G-invariant $X \longrightarrow Z$ se factorise de manière unique à travers $\pi : X \longrightarrow Y$. On dit que (π, Y) est un *quotient catégorique* de X par G.

iii. Montrer que A est entier sur A^G.

iv. Montrer que $X \xrightarrow{\pi} Y$ est aussi un *quotient ensembliste* (*i.e.* surjectif de fibres les orbites sous G). [On pourra utiliser le Théorème de Cohen-Seidenberg qui dit que si un anneau B est entier sur un sous-anneau A, alors l'application $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est surjective et strictement croissante pour l'inclusion.]

v. Supposons que A est de type fini sur un corps K contenu dans A^G.

   (a) Montrer que $X \xrightarrow{\pi} Y$ est fini.

   (b) Soit $x \in X(K)$ de stabilisateur G_x dans G. Montrer que π induit un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{\pi(x)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_x^{G_x}$.

   (c) Supposons K algébriquement clos, X lisse sur K, et G agissant librement sur $X(K)$. Montrer que Y est lisse sur K et π est étale fini de degré $|G|$.

vi. Soit $A = K[T_1, \cdots, T_n]$ muni de l'action naturelle du groupe symétrique $G = S_n$. Montrer que π est plat et que son lieu de ramification est le fermé de X d'équation $\prod_{i \neq j}(T_i - T_j)$.