Groupes et Algèbres de Lie

Jean-François Dat

2009-2010

Résumé

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19ème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie. Elle a connu de nombreuses ramifications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et reste encore très active. Par ailleurs ces objets interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des "formes automorphes" et du "programme de Langlands", et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativité générale.

Table des matières

1 Groupes topologiques et groupes de Lie linéaires

1.1 Notions de base.

1.1.1 DÉFINITION.– *Un groupe topologique est un ensemble G muni d'une loi de groupe $(x, y) \mapsto xy$ et d'une topologie vérifiant les axiomes suivants :*

i) L'application produit $(x, y) \mapsto xy$ est une application continue de $G \times G$ dans G.

ii) L'application "inverse" $x \mapsto x^{-1}$ est une application continue de G dans G.

Dans le point i), on munit bien-sûr $G \times G$ de la topologie produit. Une loi de groupe continue est en particulier *séparément continue* au sens où, pour tout $x \in G$, les translations $\gamma_x : y \mapsto xy$ et $\delta_x : y \mapsto yx$ sont des applications continues de G dans G. Une conséquence pratique du point ii) est que l'élément neutre e de G admet une base de voisinages symétriques (*i.e.* tels que $V = V^{-1}$).

1.1.2 *Quelques exemples.*

i) Tout groupe abstrait muni de la topologie discrète. On dit alors que G est *discret.*

ii) Un produit de groupes topologiques, muni de la topologie produit, est encore un groupe topologique. Par exemple, si G est fini, $G^{\mathbb{N}}$ est un groupe topologique non discret.

iii) Variante : *limites projectives.* Si $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de groupes (finis par exemple) et si $\varphi_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ est un morphisme de groupes, alors le sous -groupe

$$\varprojlim(G_n, \varphi_n) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x_n) = x_{n-1}\}$$

est un sous-groupe fermé (exercice) du produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$. On l'appelle *limite projective du système* $(G_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On ne s'intéressera pas beaucoup à ces exemples dans ce cours, mais ce sont des constructions importantes en arithmétique. Voici deux exemples :

– Les nombres p-adiques $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \pi_n)$ où p est un nombre premier et $\pi_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ est la projection canonique. C'est un groupe, et même un anneau topologique compact, très utile en théorie des nombres.

– Les groupes de Galois d'extension algébriques de degré infini. Par exemple l'homomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$, où K_n est une suite croissante d'extensions Galoisiennes de $\mathbb{Q}$ d'union $\overline{\mathbb{Q}}$, est un isomorphisme qui fait de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ un groupe compact, objet de toutes les attentions de la recherche moderne en théorie des nombres.

iv) Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ses sous-groupes fermés. Ce sont ces exemples qui nous intéresseront dans ce cours.

1.1.3 DÉFINITION.– *Un (homo)morphisme $f : G \to G'$ de groupes topologiques est un homomorphisme de groupes abstraits (c-à-d tel que $f(xy) = f(x)f(y)$) qui est continu.*

Comme d'habitude, un homomorphisme de groupes topologiques f est appelé *isomorphisme* s'il admet un inverse (c-a-d un homomorphisme de groupes topologiques $G' \xrightarrow{g} G$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{G'}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_G$). Cela équivaut à demander que f soit à la fois un isomorphisme de groupes abstraits et un homéomorphisme.

1.1.4 *Quelques propriétés faciles.*

i) *Un homomorphisme f de groupes abstraits est continu dès qu'il l'est en l'élément neutre e de G.*

ii) *Un groupe topologique G est séparé si (et seulement si) le point $\{e\}$ est fermé.* En effet, soient $x \neq y$ dans G. Le singleton $\{x^{-1}y\}$ est fermé (par translation), donc puisque $x^{-1}y \neq e$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de e ne contenant pas $x^{-1}y$. Mais par continuité de la loi de groupe, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de e tel que $\mathcal{U}.\mathcal{U}$ soit inclus dans $\mathcal{V}$. On a alors $e \notin x\mathcal{U}\mathcal{U}y^{-1}$, donc $x\mathcal{U} \cap y\mathcal{U}^{-1} = \emptyset$. (Notation : si A et B sont deux parties de G, $A.B = AB$ désigne l'ensemble des éléments de la forme ab, où $a \in A, b \in B$.)

iii) Si f est comme dans la définition ci-dessus et si G est séparé, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé dans G. Par contre, $\mathrm{Im}(f)$ n'a pas de raison de l'être.

iv) *Si H est ouvert dans G, il est automatiquement fermé.* En effet, son complémentaire est réunion des classes à gauche $xH, x \in G, x \notin H$. Par contre l'inverse n'est pas vrai !

v) Si H est fermé dans G, son *normalisateur* $N(H) := \{x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} \in H\}$ est un sous-groupe fermé de G ; idem pour son *centralisateur* $Z(H) := \{x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} = h\}$, donc pour le *centre* $Z(G)$ de G.

vi) *Si un sous-groupe Γ de G, muni de la topologie induite, est discret, alors il est fermé.* En effet, soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert symétrique de e tel que $\mathcal{V} \cap \Gamma = \{e\}$, et soit $y \in \overline{\Gamma}$ (adhérence de Γ). Alors $y\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de y donc $y\mathcal{V} \cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit x dans cette intersection. On a donc $y \in x\mathcal{V} \cap \overline{\Gamma}$. Comme $x\mathcal{V}$ est ouvert, on a $x\mathcal{V} \cap \overline{\Gamma} \subset \overline{x\mathcal{V} \cap \Gamma} = \{x\}$. Donc $y = x$.

vii) *La composante connexe G^0 de e (aussi appelée composante neutre de G) est un sous-groupe fermé normal (i.e. distingué : $N(G^0) = G$).* En effet, G^0 est fermé, comme toute composante connexe. De plus, pour tout x dans G^0, $x^{-1}G^0$ est connexe et contient e, donc est contenu dans G^0, qui est donc un sous-groupe ; de même, $x^{-1}G^0x$ est contenu dans G^0. Notons que G^0 *est ouvert si G est localement connexe.*

viii) *G^0 est contenu dans tout sous-groupe ouvert H de G.* En effet, on écrit $G^0 = (G^0 \cap H) \sqcup (G^0 \cap (G \setminus H))$ comme somme de deux ouverts (cf point iv)). Comme le premier est non vide (il contient e), le second est nécessairement vide par connexité de G^0, et on a donc bien $G^0 = G^0 \cap H$, *i.e.* $G^0 \subset H$.

1.1.5 Lemme.– *Soient G un groupe topologique, et $\mathcal{V}$ un voisinage connexe de e. Alors, G^0 est la réunion des $\mathcal{V}^n := \{x_1x_2...x_n, x_i \in \mathcal{V}\}$, où n parcourt $\mathbf{N}$.*

Démonstration. En effet, cette réunion $\mathcal{U}$ d'ensembles connexes d'intersection non vide est connexe, donc contenue dans G^0. Posons alors $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{-1}$; c'est un voisinage symétrique de e, donc la réunion des $\mathcal{W}^n, n \in \mathbf{N}$, est un sous-groupe ouvert H de G, donc $H^0 \supset G^0$. Noter alors que $\mathcal{U} \supset H$. □

1.1.6 DÉFINITION.– *Soit H un sous-groupe du groupe topologique G. On définit* l'espace topologique quotient G/H *comme l'ensemble quotient (au sens des groupes abstraits), muni de la topologie quotient,* i.e. *la topologie la plus fine rendant la projection canonique $\pi : G \to G/H$ continue.*

Concrètement, un sous-ensemble $U \subset G/H$ est donc ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans G. On constate alors que :

i) *π est une application* ouverte *(cad qui envoie tout ouvert sur un ouvert).* En effet, si $O \subset G$ est ouvert, alors $\pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup_{h\in H} Oh$ est aussi ouvert.

ii) *G/H est discret si et seulement si H est ouvert dans G.* Exercice.

iii) *G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.* Seul le sens $\Leftarrow$ est non trivial. Soient $x, y \in G$ tels que $xH \neq yH$, cad $x^{-1}y \notin H$. Considérons l'application continue de $G \times G$ dans G qui à (g, g') associe $gx^{-1}yg'$. Comme H est fermé et $f(e, e) \notin H$, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de e tel que $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \cap H = \emptyset$. Ceci équivaut à $y\mathcal{V}H \cap x\mathcal{V}^{-1}H = \emptyset$. Donc $\pi(y\mathcal{V}H)$ et $\pi(x\mathcal{V}^{-1}H)$ sont des voisinages respectifs de yH et xH d'intersection vide.

iv) *Si G/H et H sont connexes, alors G est connexe.* En effet, une application continue f de G vers $\{0, 1\}$ sera constante sur les classes à gauche modulo H par connexité, donc se factorisera par G/H en une application à nouveau constante par connexité de G/H. Donc f est nécessairement constante, et G est bien connexe.

v) *Si G est localement compact et H est fermé, alors G/H est localement compact.*

vi) Si H est distingué, G/H est un groupe topologique et π est un morphisme de groupes topologiques.

1.1.7 *Attention !.* Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes abstraits, il induit un isomorphisme de groupes abstraits :

$$\overline{f} : G/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(f).$$

Supposons de plus que G et G' sont des groupes topologiques. Alors il est naturel de munir $G/\operatorname{Ker}(f)$ de la topologie *quotient* et de munir $\operatorname{Im}(f)$ de la topologie *induite* par G'. L'application $\overline{f}$ est alors continue, mais *généralement pas un homéomorphisme.*

Exemple stupide : $G = G'$ et $f = \mathrm{id}$ avec la topologie discrète sur G et une topologie non discrète sur G'. Exemple moins stupide : enroulement irrationnel d'une ficelle sur un tore, cad injection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. À méditer.

Exercice : $\overline{f}$ est un homéomorphisme si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de e, $f(\mathcal{V})$ est un voisinage de e' dans $\operatorname{Im}(f)$.

1.1.8 LEMME.– *Soit G un groupe topologique connexe, de centre $Z = Z(G)$.*

i) Tout sous-groupe distingué et discret N de G est contenu dans Z.

ii) Si Z est discret, le centre de G/Z est réduit à son élément neutre.

Démonstration. i) Pour tout élément n de N, l'application $\phi : g \mapsto gng^{-1}n^{-1}$ de G dans G est continue. Elle envoie G dans N (puisque N est distingué), donc $\phi(G)$ est discret dans G. Mais $\phi(G)$ est connexe et contient $e = \phi(n^{-1})$. Donc $\phi(G)$ est réduit à $\{e\}$, et n commute à tous les éléments de G.

ii) Soit x un relevé dans G d'un élément du centre de G/Z. Alors, l'application $\psi : g \mapsto gxg^{-1}x^{-1}$ envoie G dans Z, donc son image est $\{e\}$, et par conséquent $x \in Z$. $\square$

1.1.9 DÉFINITION.– *Soient G et G' deux groupes topologiques. On appelle homomorphisme local de G vers G' toute application continue h, d'un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans G, vers G', telle que $h(xy) = h(x)h(y)$ dès que x, y et xy sont dans $\mathcal{V}$.*

Si un homomorphisme local induit un homéomorphisme d'un voisinage $\mathcal{V}$ de e sur un voisinage $\mathcal{V}'$ de e' dans G', on dit que c'est un *isomorphisme local.* Dans ce cas, $f^{-1} : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ est aussi un homomorphisme local et on dit que G et G' sont *localement isomorphes.* Noter qu'en général, un homomorphisme local ne se prolonge pas en un homomorphisme de groupes.

Exemple : la projection $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un authentique homomorphisme de groupes topologiques. C'est aussi un isomorphisme local, bien qu'elle ne soit pas injective. L'homomorphisme local inverse ne se prolonge pas en un homomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$. (Exercice : montrer qu'il n'existe pas de tel homomorphisme.)

Plus généralement, si $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe fermé discret, l'homomorphisme quotient $G \longrightarrow G/\Gamma$ est un isomorphisme local, mais n'admet en général pas d'inverse global.

1.1.10 *Actions continues de groupes topologiques.* Rappelons qu'une action d'un groupe abstrait G sur un ensemble X est un homorphisme $G \xrightarrow{\rho} \mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ désigne le groupe des bijections de X dans lui-même. Alternativement, c'est une application

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g,x) & \mapsto & gx := \rho(g)(x) \end{array}$$

satisfaisant les axiomes usuels $ex = x$ et $(gg')x = g(g'x)$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$.

DÉFINITION. – *Soit G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action de G sur X est dite* continue *si l'application $(g,x) \mapsto gx$ est continue.*

En guise d'exercice, on vérifiera que l'action de G sur G/H est continue. Soit X comme dans la définition et soit $x \in X$. Notons G_x son stabilisateur et $G \cdot x$ son orbite. L'action de G induit une bijection continue $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$. En général, comme dans 1.1.7, ce n'est pas un homéomorphisme. Il y a cependant un cas utile où c'est un homéomorphisme :

PROPOSITION. – *Si G/G_x est compact, la bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. En effet elle est alors ouverte (l'image d'un ouvert est le complémentaire de l'image du fermé complémentaire, laquelle est compacte puisque la bijection est continue et la source est compacte). □

Voici un autre résultat général dans ce sens, que nous citons pour la culture.

THÉORÈME. – *Supposons que G est localement compact et dénombrable à l'infini (union dénombrable de compacts), et que l'orbite est localement compacte. Alors la bijection ci-dessus est un homéomorphisme.*

Remarquons que l'hypothèse "dénombrable à l'infini" est vérifiée par tout groupe localement compact connexe, en vertu du lemme 1.1.5.

Démonstration. (Hors programme) Il suffit de prouver que l'application $g \in G \longrightarrow g \cdot x \in G \cdot x$ est ouverte. Comme d'habitude, à l'aide des translations, on se ramène à prouver que si $\mathcal{U}$ est un voisinage de e dans G, alors $\mathcal{U} \cdot x$ est un voisinage de x dans $G \cdot x$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage compact symétrique de e tel que $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{U}$. L'hypothèse "dénombrable à l'infini" implique l'existence d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments tels que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\mathcal{W}$. On a donc aussi $G \cdot x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\mathcal{W} \cdot x$. Chacun des $g_n\mathcal{W} \cdot x$ est compact dans $G \cdot x$. Le théorème de Baire (faire un tour sur wikipedia...), applicable à $G \cdot x$ puisqu'on suppose cette orbite localement compacte, nous dit qu'au moins l'un des $g_n\mathcal{W} \cdot x$ est d'intérieur non vide. Par translation, $\mathcal{W} \cdot x$ est donc d'intérieur non vide. Soit $w \cdot x$ un point dans l'intérieur de $\mathcal{W} \cdot x$. Par translation, x est dans l'intérieur de $w^{-1}\mathcal{W} \cdot x \subset \mathcal{U}.x$. □

Un espace de la forme G/H pour G localement compact et H fermé est généralement appelé *espace homogène*.

1.2 Groupe linéaire général

Soit V un espace de Banach (c.a.d. un espace vectoriel normé complet) sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'espace $\mathrm{L}(V/K)$ des endomorphismes K-linéaires continus de V, muni de la norme $||\varphi|| := sup\{||\varphi(v)||, v \in V, ||v|| = 1\}$ est aussi un espace de Banach.

1.2.1 THÉORÈME.– *Le groupe $G = \mathrm{GL}(V/K) \subset \mathrm{L}(V/K)$ des endomorphismes continus inversibles est un ouvert dans $\mathrm{L}(V/K)$, et l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est continue. En particulier G est un groupe topologique séparé. Si de plus V est de dimension finie, alors G est localement compact, et dense dans $\mathrm{L}(V/K)$.*

On prendra garde au fait que "inversible" sous-entend "inversible parmi les endomorphismes continus", c'est-à-dire que que l'inverse doit aussi être continu. En dimension finie, bijectif implique inversible, mais pas en dimension infinie.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{L}(V)$ tel que $||\varphi|| < 1$. Puisque $\mathrm{L}(V)$ est complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n$ converge, et est inversible d'inverse $\mathrm{id}_V - \varphi$. Ainsi $\mathrm{GL}(V)$ contient un voisinage $\mathcal{V}$ de id_V dans $\mathrm{L}(V)$. Soit alors $g \in G$ un élément. La multiplication par g dans $\mathrm{L}(V)$ est continue, et ouverte puisque celle par g^{-1} est aussi continue. Ainsi $g.\mathcal{V}$ est un voisinage de g dans $\mathrm{L}(V)$ contenu dans G, qui est donc bien ouvert. De même, la série ci-dessus dépendant continûment de φ, on voit que l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est continue au voisinage de id_V. Par translation, elle est continue en tout point.

Reste à voir la densité dans le cas de dimension finie. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$, considérons la $\mathbb{R}$-droite affine $D_M := (M(t) := M - tI_n)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathrm{M}_n(K)$. Il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ n'est pas inversible, donc $D_M \cap \mathrm{GL}_n(K)$ est dense dans D_M. □

Exercice. – Si V est de dimension finie, montrer directement la continuité de $g \mapsto g^{-1}$ à l'aide des formules de Cramer. Montrer aussi dans ce cas qu'une partie fermée Γ de G est compacte si et seulement s'il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall g \in \Gamma, ||\gamma|| \leqslant c$ et $det(\gamma) > 1/c$.

Remarque. – Un espace de Banach V sur $\mathbb{C}$ fournit naturellement un espace de Banach $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R}$, muni d'un automorphisme J de carré $-id_{\tilde{V}}$, ce qui permet d'identifier $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ au sous-groupe fermé $\{g \in \mathrm{GL}(\tilde{V}/\mathbb{R}), gJ = Jg\}$ de $\mathrm{GL}(\tilde{V}/\mathbb{R})$, et en particulier, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exercice. – Voici deux applications de la densité de $\mathrm{GL}_n(K)$ dans $\mathrm{M}_n(K)$, bien connues des agrégatifs, que nous laissons en exercice :

i) Si $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.

ii) Le centre de $\mathrm{GL}_n(K)$ est exactement le groupe $\{\lambda.\mathrm{id}_{K^n}, \lambda \in K^\times\} \simeq K^\times$ des homothéties non nulles de l'espace vectoriel K^n.

Exercice. – Vérifier que l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur K^n est continue. Soit $P_n(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices dont la dernière colonne est $(0, \cdots, 0, 1)$ (parfois appelé sous-groupe *mirabolique*).

i) Utiliser le théorème 1.1.10 pour prouver que $\mathrm{GL}_n(K)/P_n(K)$ est homéomorphe à $K^n \setminus \{0\}$.

ii) Vérifier que $P_n(K)$ est homéomorphe au produit $\mathrm{GL}_{n-1}(K) \times K^{n-1}$.

iii) En déduire par récurrence que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

iv) Toujours par récurrence, prouver que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes et que sa composante neutre est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), det(g) > 0\}$.

Cette étude de la connexité des groupes linéaires utilise le théorème 1.1.10. On peut se contenter en fait de la proposition 1.1.10 à l'aide des décompositions polaires qui ramènent l'étude des groupes linéaires à celles de certains sous-groupes compacts.

1.2.2 *L'exponentielle.* Soit $u \in \mathrm{L}(V/K)$. Rappelons que u^k désigne la composée $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois). Comme la norme $||.||$ sur $\mathrm{L}(V/K)$ est sous-mutiplicative (*i.e.* $||u^k|| \leqslant ||u||^k$), la série

$$\exp(u) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{u^k}{k!}$$

est normalement convergente, donc convergente dans $\mathrm{L}(V/K)$ puisque celui-ci est complet. Pour les mêmes raisons, elle dépend continûment de u. Par ailleurs, on vérifie facilement que si u et v commutent, on a $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$, de sorte que, en particulier, on a $\exp(u)\exp(-u) = \mathrm{id}_V$. On a donc obtenu une application continue

$$\exp : \mathrm{L}(V/K) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/K).$$

Un passage à la limite montre que pour tout $g \in \mathrm{GL}(V/K)$, on a $\exp(gug^{-1}) = g\exp(u)g^{-1}$.

Exercice. – Si V est de dimension finie, on a $\det(\exp(u)) = \exp(\mathrm{tr}(u))$.

Dans l'autre sens, considérons la série

$$\log(u) := \sum_{k \geqslant 1} \frac{(\mathrm{id}_V - u)^k}{k}.$$

Elle converge normalement vers une fonction continue

$$\log : B(\mathrm{id}_V, 1) \longrightarrow \mathrm{L}(V/K)$$

sur la boule ouverte $B(\mathrm{id}_V, 1) = \{u, ||\,\mathrm{id}_V - u|| < 1\}$, qui est contenue dans $\mathrm{GL}(V/K)$. On vérifie formellement que $\exp \circ \log(u) = u$ pour tout $u \in B(\mathrm{id}_V, 1)$. Inversement, on a $\log \circ \exp(u) = u$ pour tout $u \in B(0, \log(2))$ (la convergence du log étant ici assurée par $||\,\mathrm{id}_V - \exp(u)|| < \exp(||u||) - 1 < 1$). En termes moins précis, on constate que exp réalise un homéomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de id_V.

Exercice. – Vérifier que exp n'est pas injective. (Indication : en dimension 2 sur $\mathbb{R}$, calculer $\exp\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$.)

Exercice. – Trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de id_V dans $\mathrm{GL}(V/K)$ qui ne contient pas de sous-groupe non-trivial.

En dimension finie, on peut utiliser des techniques différentielles, qui seront très utiles par la suite.

LEMME. – *Supposons V de dimension finie. Alors*

i) exp *est K-analytique (donc en particulier de classe C^∞).*

ii) exp *réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de* $0 \in \mathrm{L}(V/K)$ *sur un voisinage de* $\mathrm{id}_V \in \mathrm{GL}(V/K)$.

Démonstration. i) est clair. On peut aussi prouver la différentiabilité par le théorème de dérivation d'une série dont la somme des dérivées converge uniformément sur tout compact. ii) On a $\exp(u) - \exp(0) = u + o(u)$, donc la différentielle en 0 est l'identité qui est inversible, et on peut appliquer le théorème d'inversion locale. Alternativement, on peut utiliser le log. □

1.2.3 *Rappels sur les décompositions de Jordan.* On suppose ici que V est de dimension finie. De plus, si le corps de base $K = \mathbb{R}$, on note $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V.

DÉFINITION. – *Soit $a \in \mathrm{L}(V/K)$ un K-endomorphisme de V. Si $K = \mathbb{R}$, notons $a_{\mathbb{C}}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de a à $V_{\mathbb{C}}$. On dit que a est :*

i) semi-simple *si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(a) $V_{\mathbb{C}}$ est somme directe de sous-espaces propres pour $a_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire $a_{\mathbb{C}}$ est diagonalisable ;

*(b) le polynôme minimal $m_a(T)$ de a est séparable (*i.e. *n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$), autrement dit : la K-algèbre $K[a]$ engendrée par a dans $End(V/K)$ est isomorphe à un produit de corps.*

ii) nilpotent *si une puissance de a est nulle (de façon equivalente, si toutes les valeurs propres de $a_{\mathbb{C}}$ sont nulles),*

iii) unipotent *si $a - id_V$ est nilpotent (de façon equivalente, si toutes les valeurs propres de $a_{\mathbb{C}}$ sont égales à 1).*

Il est conseillé de relire, si besoin est, les cours d'algèbre linéaire de L2-L3 pour se convaincre de l'équivalence des conditions. On rappelle aussi les propriétés très utiles de diagonalisation ou trigonalisation simulanées : *soit $\mathcal{E} \subset \mathrm{L}(V/K)$ une famille d'endomorphismes trigonalisables (resp. diagonalisables) qui commutent deux à deux, alors il existe une base de V dans laquelle tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont triangulaires (resp. diagonaux).*

Exercice. – Montrer que l'ensemble $\mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{ss}}$ des K-endomorphismes semi-simples de V est ouvert et dense dans $\mathrm{L}(V/K)$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{nilp}}$ des endomorphismes nilpotents de V est fermé dans $\mathrm{L}(V/K)$. Montrer enfin que l'ensemble $\mathrm{GL}(V/K)^{\mathrm{unip}}$ des automorphismes unipotents de V est fermé dans $\mathrm{L}(V/K)$.

PROPOSITION. – *L'exponentielle induit un homéomorphisme*

$$\exp :\ \mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{nilp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V/K)^{\mathrm{unip}}$$

dont l'inverse est donné par la série log.

Démonstration. Si a est nilpotent, on a $a^n = 0$ pour $n = \dim(V)$. Donc la restriction de l'exponentielle à $\mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{nilp}}$ est donnée par le polynôme $a \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$. En particulier $\mathrm{id}_V - \exp(a)$ est nilpotent donc $\exp(a)$ est unipotent. Réciproquement si u est unipotent, $\log(u)$ est donnée par le polynôme $\sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{id}_V - u)^k}{k}$ et est clairement nilpotent. Ainsi $\exp : \mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{nilp}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V/K)^{\mathrm{unip}}$ et $\log : \mathrm{GL}(V/K)^{\mathrm{unip}} \longrightarrow \mathrm{L}(V/K)^{\mathrm{nilp}}$ sont bien définis. Un calcul formel montre qu'ils sont inverses l'un de l'autre. $\square$

PROPOSITION. – *i) (*Jordan additif*) Soit a un K-endomorphisme de V. Il existe un unique couple (a_s, a_n) de K-endomorphismes de V, avec a_s semi-simple, a_n nilpotent et $a_s a_n = a_n a_s = a$. De plus, a_s et a_n s'expriment comme des polynômes en a à coefficients dans K, sans termes constants.*

*ii) (*Jordan multiplicatif*) Soit g un K-automorphisme de V. Il existe un unique couple (g_s, g_u) de K-automorphismes de V, avec g_s semi-simple, g_u unipotent et $g_s g_u = g_u g_s = g$. De plus, g_s et g_u s'expriment comme des polynômes en a à coefficients dans K.*

Démonstration. Pour l'existence de ces décompositions, et leur expression sous forme polynômiale, voir le cours d'algèbre de L3. L'unicité se déduit de la remarque suivante. Soit a et b deux endomorphismes de V tels que $ab = ba$. Alors, si a et b sont nilpotents, $a+b$ est nilpotent ; si a et b sont unipotents, ab est unipotent ; si a et b sont semi-simples, ab et $a+b$ sont semi-simples. (En effet, a et b, ou le cas échéant $a_{\mathbb{C}}$ et $b_{\mathbb{C}}$, sont simultanément diagonalisables). $\square$

Corollaire. – *Si $K = \mathbb{C}$, l'exponentielle* $\exp : \mathrm{L}(V/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ *est surjective.*

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$. Ecrivons g sous forme de Jordan $g = g_s g_u$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de g. Choisissons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \log\lambda_i$ pour tout i. Alors $x_s := P(g_s)$ est un logarithme de g_s. Comme dans la première proposition, $x_u := \log(\mathrm{id}_V - g_u)$ est un polynôme en g_u, est nilpotent, et est un logarithme de g_u. Comme x_u et x_s sont des polynômes en g, ils commutent, et par conséquent, posant $x = x_u x_s$, on a $\exp(x) = \exp(x_s)\exp(x_u) = g_s g_u = g$. $\square$

Si $K = \mathbb{R}$, on vérifie facilement que l'image de l'exponentielle est contenue dans la composante neutre $\mathrm{GL}^+(V/\mathbb{R})$. Pour $n > 1$, elle y est strictement contenue.

Exercice. – Trouver un logarithme réel pour la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mais montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

1.2.4 *Décomposition polaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un outil très utile pour l'étude topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ *orthogonales*, et soit SDP_n l'ensemble des matrices $n \times n$ *symétriques définies positives.* Nous aurons aussi besoin de l'espace vectoriel $\mathrm{S}_n \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ de toutes les matrices symétriques de taille n.

Lemme. – *i)* $\mathrm{O}(n)$ *est un sous-groupe compact (donc fermé) de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

ii) SDP_n *est un demi-cône convexe de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, fermé dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

iii) L'application $\exp$ *induit un homéomorphisme* $\mathrm{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{SDP}_n$.

iv) L'application $S \mapsto S^2$ est un homéomorphisme de SDP_n *dans lui-même.*

Démonstration. i) Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$, donc il est fermé. Il est aussi borné pour la norme euclidienne $M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc compact.

ii) Être un "demi-cône" signifie simplement être "stable par homothéties positives", ce qui est évident pour SDP_n. Être convexe signifie que pour $A, B \in \mathrm{SDP}_n$, on a $M(t) := tA + (1-t)B \in \mathrm{SDP}_n$ pour tout $t \in [0,1]$. Il est clair que $M(t)$ est symétrique. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle M(t)x, x\rangle = t\langle Ax, x\rangle + (1-t)\langle Bx, x\rangle > 0$, donc $M(t)$ est bien définie positive. Enfin, si une suite de matrices de SDP_n converge vers S dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors S est symétrique et ses valeurs propres de S sont $\geqslant 0$. Donc si S est dans $\mathrm{GL}_n(K)$, elle est aussi dans SDP_n.

iii) Si T est symétrique, alors ses valeurs propres sont réelles. La matrice $\exp(T)$ est clairement symétrique et ses valeurs propres sont les exponentielles de celles de T, donc sont strictement positives. On a donc bien $\exp(T) \in \mathrm{SDP}_n$. Prouvons la surjectivité. Soit $S \in \mathrm{SDP}_n$. Elle est diagonalisable dans une base orthonormée et à valeurs propres strictement positives. Elle est donc de la forme $S = O.D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).O^{-1}$ où O est une matrice orthogonale et $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_i > 0$ de S. La matrice $\ell(S) := O.D(\log\lambda_1, \cdots, \log\lambda_n).O^{-1}$ est symétrique et vérifie $S = \exp(\ell(S))$, d'où la surjectivité. Pour l'injectivité, fixons $T \in \mathrm{S}_n$, posons $S := \exp(T)$, et montrons que $T = \ell(S)$. Pour cela on remarque que $\ell(S)$ est un polynôme en S (prendre un polynôme qui envoie chaque λ_i sur $\log\lambda_i$). Il s'ensuit que T commute à $\ell(S)$, puisqu'elle commute à S. On peut alors diagonaliser T et $\ell(S)$ dans une même base. Comme elles ont les mêmes valeurs propres, elles sont donc égales.

Reste à voir la continuité de la bijection réciproque $S \mapsto \ell(S)$. Soit $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers S. Écrivons chaque S_i sous la forme $O_i D_i O_i^{-1}$ avec O_i orthogonale et D_i diagonale. Comme $\mathrm{O}(n)$ est compact, on peut extraire de la suite $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite $(O_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente. La suite $(D_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $D = D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, et par conséquent la suite $(\ell(S_{\varphi(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(S)$.

iv) L'homéomorphisme réciproque est $S \mapsto \sqrt{S} := \exp(\frac{1}{2}\ell(S))$.

□

Théorème. (Décomposition polaire) – *L'application produit*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(n) \times \mathrm{SDP}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. L'application est évidemment continue. Observons que si $M = OS$, alors ${}^tMM = S^2$. Réciproquement, si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ est définie positive et $M.\sqrt{{}^tMM}^{-1}$ est orthogonale. Il s'ensuit que l'application continue

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{O}(n) \times \mathrm{SDP}_n \\ M & \mapsto & (M.\sqrt{{}^tMM}^{-1}, \sqrt{{}^tMM}) \end{array}$$

est une (la) bijection réciproque de l'application de l'énoncé. □

Exercice. – Vérifier que l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur la sphère euclidienne $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 = 1\}$ est continue. Soit $\mathrm{SO}(n)$ le groupe spécial orthogonal (déterminant 1). Utiliser la proposition 1.1.10 pour trouver un homéomorphisme $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$, où l'on voit $\mathrm{SO}(n-1)$ plongé dans un bloc diagonal de $\mathrm{SO}(n)$. En déduire par récurrence la connexité[1] de $\mathrm{SO}(n)$, puis le fait que $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes, et enfin retrouver les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ grâce à la décomposition polaire.

1.2.5 *Décomposition polaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Celle-ci est analogue à la précédente, mais il faut trouver un substitut au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, qui n'est plus compact. Soit $\mathrm{U}(n)$ le groupe des matrices $n \times n$ *unitaires* (*i.e.* qui vérifient ${}^t\overline{A}.A = I_n$) et soit HDP_n l'ensemble des matrices $n \times n$ *hermitiennes définies positives*. Les deux résultats suivants se prouvent comme dans le cas réel. Nous avons aussi besoin de l'espace vectoriel $\mathrm{H}_n \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de toutes les matrices hermitiennes de taille n.

LEMME. – *i)* $\mathrm{U}(n)$ *est un sous-groupe compact (donc fermé) de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

ii) HDP_n *est un demi-cône convexe de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, fermé dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

iii) L'application exp *induit un homéomorphisme* $\mathrm{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{HDP}_n$.

iv) L'application $M \mapsto M^2$ *est un homéomorphisme de* HDP_n *dans lui-même.*

THÉORÈME. – *L'application produit*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{U}(n) \times \mathrm{HDP}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) & \mapsto & UH \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Exercice. – Reprendre l'exercice précédent avec l'action naturelle de $\mathrm{U}(n)$ sur la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. En particulier on a un homéomorphisme $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) \xrightarrow{\sim} S^{2n-1}$. On en déduit par récurrence la connexité[2] de $\mathrm{U}(n)$ et celle de $\mathrm{SU}(n)$.

1.3 Groupes de Lie linéaires. Exemples classiques.

1.3.1 DÉFINITION.– *On appelle groupe de Lie linéaire tout sous-groupe fermé d'un groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on peut remplacer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ou même par $\mathrm{GL}(V/K)$ pour V de dimension finie, dans la définition ci-desus.

Par commodité, nous parlerons souvent simplement de "groupe de Lie". Il faut préciser ici que la notion de groupe de Lie que l'on trouve dans la littérature avancée est plus générale et plus intrinsèque que celle-ci, mais nécessite le vocabulaire de la géométrie différentielle que nous ne supposons pas connu.

Nous avons déjà rencontré $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{U}(n)$. Voici un tour d'horizon des groupes de Lie dits "classiques".

[1] Par la même méthode on peut montrer aussi que le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{SO}(n))$ est un groupe d'ordre 2, pour $n \geqslant 3$. Le revêtement universel $\mathrm{Spin}(n)$ de $\mathrm{SO}(n)$ est appelé groupe spinoriel.

[2] Par la même méthode on prouve la simple connexité de $\mathrm{SU}(n)$ et on montre que le groupe fondamental de $\mathrm{U}(n)$ est isomorphe à $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$.

1.3.2 *Groupes linéaires spéciaux et projectifs.* Pour tout K-ev V de dimension finie, le déterminant est un homomorphisme de groupes topologiques de $\mathrm{GL}(V/K)$ dans $K^* := \mathrm{GL}_1(K)$. Son noyau $\mathrm{SL}(V/K)$ s'appelle le groupe spécial linéaire de V. Il est fermé, non compact, dans $\mathrm{GL}(V/K)$ (sauf $\mathrm{SL}_1(K) = \{1\}$ qui est compact). Pour $V = K^n$ on note $\mathrm{SL}_n(K)$.

Pour $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe[3], de même que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$[4].

Exercice. – Le centre de $\mathrm{SL}_n(K)$ est formé des homothéties de déterminant 1, donc il est isomorphe au groupe $\mu_n(K)$ des racines n-ièmes de l'unité dans K^* (d'ordre n si $K = \mathbb{C}$, d'ordre 1 ou 2 si $K = \mathbb{R}$).

Les groupes $\mathrm{PGL}_n(K) := \mathrm{GL}_n(K)/(K^*\mathbf{I}_n), \mathrm{PSL}_n(K) := \mathrm{SL}_n(K)/(\mu_n(K)\mathbf{I}_n)$ interviennent naturellement en géométrie projective. Il n'est pas complètement évident de voir que ce sont bien des groupes de Lie linéaires. Voici une possibilité.

Exercice. – Montrer que l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $V = \mathrm{M}_n(K)$ est continue et induit un homomorphisme continu $\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/K)$, dont le noyau est le centre $K^\times$ de $\mathrm{GL}_n(K)$. Enfin, montrer que ce morphisme identifie $\mathrm{PGL}_n(K)$ à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/K)$.

1.3.3 *Groupes orthogonaux.* Comme d'habitude K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On pose

$$\mathrm{O}(\Phi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/K),\ \Phi(gv, gw) = \Phi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/K)$ appelé groupe orthogonal de Φ. On vérifie facilement que deux formes quadratiques équivalentes ont des groupes orthogonaux isomorphes (et mêmes conjugués). Lorsque $K = \mathbb{C}$, on sait que toutes les formes quadratiques sont équivalentes, de sorte que $\mathrm{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe orthogonal complexe usuel

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ {}^tMM = I_n\}.$$

Exercice. – Utiliser la décomposition polaire pour exhiber un homéomorphisme entre $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Lorsque $K = \mathbb{R}$, le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leqslant n$ et d'une base $e_1, \cdots, e_n$ dans laquelle

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

[3]connexe, mais pas simplement connexe ; ainsi, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a un π_1 isomorphe à $\mathbb{Z}$, et il n'existe aucun homomorphisme continu injectif de son revêtement universel dans un groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ce revêtemet universel est un exemple de groupe de Lie "non linéaire".

[4]qui, lui, est simplement connexe.

Le couple d'entiers $(p, q := n - p)$ s'appelle la *signature* de Φ. Ainsi $\mathrm{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\mathrm{O}(p,q) := \left\{M \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{R}),\ {}^tM.D_{p,q}.M = D_{p,q}\right\}$$

où $D_{p,q} = D(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$ est la matrice diagonale où 1 est répété p fois et -1 l'est q fois. Pour $p = n$ et $p = 0$, on retrouve le groupe orthogonal *euclidien* $\mathrm{O}(n, 0) = \mathrm{O}(n)$ qui, comme on l'a vu, est compact et agit continûment sur la sphère euclidienne S^{n-1}. Les autres groupes orthogonaux ne sont pas compacts ; ils agissent sur des espaces "hyperboliques". Par exemple $\mathrm{O}(1, n-1)$ est le groupe d'isométrie de l'hyperboloïde $\mathcal{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = 1\}$. On a $\mathrm{O}(p,q) = \mathrm{O}(q,p)$ et on montre que les $\mathrm{O}(p,q)$ pour $q \leqslant p$ sont deux à deux non isomorphes.

Exemple. – Pour la forme $xx' + yy' + zz' - tt'$ sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$, on obtient ainsi le *groupe de Lorentz* $\mathrm{O}(3, 1)$ qui intervient dans la théorie de la relativité générale.[5]

Exercice. – Vérifier que $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(p+q) = \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$. Puis montrer que la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ se restreint en un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SDP}_{p+q}).$$

À l'aide de l'exponentielle, vérifier que $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SDP}_{p+q}$ est homéomorphe à un espace affine $\mathbb{R}^d$. Ceci ramène l'étude topologique des $\mathrm{O}(p,q)$ à celles des $\mathrm{O}(n)$. En particulier, on constate que $\mathrm{O}(p,q)$ a 4 composantes connexes dès que $pq \neq 0$.

Par ailleurs, on définit les groupes spéciaux orthogonaux par

$$\mathrm{SO}(p,q) := \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

On peut montrer que $\mathrm{SO}(p,q)$ a deux composantes connexes et est d'indice 2 dans $\mathrm{O}(p,q)$.

Lorsque la signature est $(n, 0)$, la forme quadratique $\Phi(v,v)$ est définie positive et $\mathrm{O}(\Phi)$ est le groupe d'isométries de l'espace euclidien (V, Φ). Plus généralement, soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(V)$ est le groupe des isométries de V, c'est-à-dire des automorphismes K-linéaires g de V tels que $||g(v)|| = ||v||$ pour tout $v \in V$, ou encore tels que $g.g^* = g^*.g = id_V$, où g^* désigne l'adjoint de g pour le produit scalaire. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/K)$.

1.3.4 *Groupes unitaires.* Ici $K = \mathbb{C}$. Soit donc V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\Psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme sesquinéaire *hermitienne* non dégénérée. On pose

$$\mathrm{U}(\Psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{C}),\ \Psi(gv, gw) = \Psi(v,w), \forall v, w \in V\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ appelé groupe unitaire de Ψ. Comme dans le cas réel, deux formes hermitiennes équivalentes ont des groupes unitaires isomorphes. Ici aussi,

[5]Le groupe spécial correspondant $\mathrm{SO}(3,1)$ admet $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour revêtement universel.

les formes hermitiennes sont classifiées par leur *signature* : le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leqslant n$ et d'une base $e_1, \cdots, e_n$ dans laquelle

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p x_i \overline{y}_i - \sum_{i=p+1}^n x_i \overline{y}_i.$$

Ainsi, posant $q = n - p$, le groupe topologique $\mathrm{U}(\Psi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\mathrm{U}(p,q) := \left\{M \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{M}.D_{p,q}.M = D_{p,q}\right\}$$

Pour $pq = 0$, on retrouve le groupe unitaire habituel $\mathrm{U}(n,0) = \mathrm{U}(n)$ qui, comme on l'a vu, est compact. Les autres groupes unitaires ne sont pas compacts. On a $\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{U}(q,p)$ et on montre que les $\mathrm{U}(p,q)$ pour $q \leqslant p$ sont deux à deux non isomorphes.

Exercice. – Comme dans le paragraphe précédent, la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$ induit un homéomorphisme

$$\mathrm{U}(p,q) \simeq \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \times (\mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{HDP}_{p+q}),$$

que l'on peut utiliser pour ramener l'étude topologique des $\mathrm{U}(p,q)$ à celle des $\mathrm{U}(n)$.

Remarque. – Les groupes $\mathrm{U}(1, n-1)$ jouent un rôle prépondérant dans des problèmes actuels de théorie des nombres.

De même que précédemment, on a le groupe spécial unitaire

$$\mathrm{SU}(p,q) := \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Exercice. – Déterminer les centres de $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$.

En dimension infinie, on définit le groupe unitaire d'un espace de Hilbert V comme le groupe d'isométrie du produit scalaire, qui est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$, comme dans le cas réel.

1.3.5 *Groupe symplectique.* À nouveau, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère cette fois un K-ev de dimension finie V muni d'une forme bilinéaire $\psi : V \times V \longrightarrow K$, *alternée* et non dégénérée (aussi appelée "forme symplectique"). L'existence d'une telle forme sur V implique que la dimension de V est paire, disons $\dim(V) = 2n$. On définit alors

$$\mathrm{Sp}(\psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/K),\ \psi(gv, gw) = \psi(v,w), \forall v, w \in V\}.$$

Comme plus haut, ce groupe ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'équivalence de ψ. Or, on sait que toutes les formes symplectiques sont équivalentes. En particulier, il existe une base $e_1, \cdots, e_{2n}$ de V dans laquelle on a

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

En d'autres termes, la matrice de ψ dans cette base est la matrice antisymétrique $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$. On voit alors que $\mathrm{Sp}(\psi)$ est isomorphe au *groupe symplectique*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(K) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(K), {}^tMJM = J\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)$. Plus généralement, on démontre que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1, de sorte que pour tout n, $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ est un sous-groupe fermé, non compact, de $\mathrm{SL}_{2n}(K)$.

Exercice. – Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel $V/\mathbb{C}$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent $\tilde{V}$. En déduire que dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), P^{-1}J_2P = J_2\} \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

1.3.6 *Quaternions.* Soient $\mathbb{H}$ le corps des *quaternions* de Hamilton, σ l'anti-involution de $\mathbb{H}$ définie par $\sigma(x+yi+zj+tk) = x-yi-zj-tk$, de sorte que $||u|| := \sqrt{\sigma(u).u}$ définit une structure euclidienne sur $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, et U le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ formé par les quaternions de norme 1. On peut voir $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 , et $||.||$ comme un produit hermitien. Alors, l'application $\rho : U \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui attache à $u \in U$ l'automorphisme **C**-linéaire de $\mathbb{H}$: $h \to \rho(u)(h) := hu^{-1}$ est un homomorphisme de groupes injectif. Comme $||hu|| = ||h||.||u|| = ||h||$ pour tout $h \in \mathbb{H}$, son image est contenue dans le groupe unitaire $\mathrm{U}(2)$. En fait, pour $u^{-1} = \alpha + \beta j \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ de norme $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta} = 1$, la matrice représentative de $\rho(u)$ dans la base $\{1, j\}$ de $\mathbb{H}$ est donnée par $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1}$, de sorte que ρ établit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{SU}(2)$.

L'espace $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ des quaternions purs, muni de $||.||$, s'identifie à l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$. Pour tout $u \in U$, l'application $Int(u) : h \mapsto uhu^{-1}$ de $\mathbb{H}$ induit une isométrie de $\mathbb{R}^3$, d'où un homomorphisme de groupe $\pi : U \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, appliquant u sur $\pi(u) = (Int(u))|_{\mathbb{R}^3}$, de noyau $U \cap Z(\mathbb{H}^*) = \{\pm 1\}$. On montrera plus tard que π est surjective, de sorte que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathbf{1}_2\}$.[6]

Dans le même ordre d'idée, considérons $\mathbb{H}^n$ comme un espace vectoriel à droite sur $\mathbb{H}$, et soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ le groupe des automorphismes $\mathbb{H}$-linéaires de $\mathbb{H}^n$. Avec l'identification $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n + j\mathbb{C}^n$, on a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}), PJ_{2n} = J_{2n}\overline{P}\}$. Son sous-groupe $\mathrm{U}_n(\mathbb{H}) = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ coïncide avec $U \simeq \mathrm{SU}(2)$ pour $n = 1$, mais c'est en général un nouveau groupe (compact, connexe et simplement connexe).

1.3.7 *Groupes triangulaires.* Soit V un K-ev de dimension n. Un *drapeau complet* dans V est une suite strictement croissante

$$\mathcal{V} = (\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{V}_n = V)$$

[6] En d'autre termes, le groupe simplement connexe $\mathrm{SU}(2)$ est le revêtement universel $\mathrm{Spin}(3)$ de $\mathrm{SO}(3)$.

de K-sev de V. En particulier, on a $\dim_K(\mathcal{V}_i) = i$ pour $i = 0, \cdots, n$. On pose

$$\mathrm{B}(\mathcal{V}/K) := \{g \in \mathrm{GL}(V/K),\ g(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \forall i = 0, \cdots, n\}.$$

et son sous-groupe

$$\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/K) := \{g \in \mathrm{B}(\mathcal{V}/K),\ (g - \mathrm{id}_V)(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

On vérifie facilement que ce sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(V/K)$ et que $\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/K)$ est distingué dans $\mathrm{B}(\mathcal{V}/K)$.

Exercice. – Montrer qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de V telle que pour tout i, on ait $\mathcal{V}_i = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$. En déduire que

i) si $\mathcal{V}'$ est un autre drapeau, $\mathrm{B}(\mathcal{V}/K)$ et $\mathrm{B}(\mathcal{V}'/K)$ sont conjugués.

ii) $\mathrm{B}(V/K) \simeq \mathrm{B}_n(K) = \{$matrices triangulaires supérieures$\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$.

iii) $\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/K) \simeq \mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(K) = \{$matrices triangulaires sup. unipotentes $\} \subset \mathrm{B}_n(K)$. On vérifiera à cette occasion qu'une matrice triangulaire est unipotente si et seulement si ses termes diagonaux valent 1.

Réciproquement, nous verrons plus tard que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé de matrices unipotentes est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(K)$; en d'autres termes, un tel sous-groupe est "triangularisable".

Notons que le choix de la lettre B plutôt que la lettre T (triangulaire) pour noter ces groupes est une tradition et un hommage à A. Borel, qui a beaucoup contribué à la théorie moderne des groupes de Lie.

Exercice. – Vérifier que l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme du groupe additif K sur le groupe matriciel $\mathrm{B}_2^{\mathrm{unip}}(K)$.

Exercice. – Déterminer les composantes neutres de ces groupes, ainsi que leurs centres.

Remarque. – Soit H le quotient de $N_3(\mathbb{R})$ par le sous-groupe discret, isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de son centre. H est le *groupe de Heisenberg* de dimension 3. Il ne peut se plonger dans aucun groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.3.8 *Tores.* Le cercle unité S^1 s'identifie au groupe topologique $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, qui est isomorphe au groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sa puissance n-ième $(S^1)^n := T^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ s'appelle le tore de dimension n. C'est un groupe abélien connexe compact [de revêtement universel $\mathbb{R}^n$, avec $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.]

On prendra garde, pour $n > 1$, à ne pas confondre T^n avec la sphère S^n (= bord de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$), ni S^n avec l'espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbb{R})$. On a néanmoins les homéomorphismes : $S^1 \simeq SO(2) \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{R}), S^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C}), S^3 \simeq SU(2), S^4 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{H})$.

1.3.9 *Décompositions de Jordan.* En guise d'exercice, le lecteur pourra vérifier que tous les sous-groupes fermés $G \subset \mathrm{GL}(V/K)$ que nous avons décrits ci-dessus sont *stables par décomposition de Jordan.* Cela signifie que si $g \in G$, et si $g = g_u g_s$ est la décomposition de Jordan de g, alors $g_u \in G$ et $g_s \in G$.

On peut démontrer que tout sous-groupe "algébrique" (*i.e.* défini par des équations algébriques) de $\mathrm{GL}(V/K)$ est stable par décomposition de Jordan. Mais on peut aussi exhiber des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(V/K)$ qui ne le sont pas.

2 Des groupes de Lie aux algèbres de Lie

2.1 Compléments sur l'exponentielle

2.1.1 *Sous-groupes à un paramètre.* Par définition un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique G est un morphisme de groupes topologiques $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$.

Théorème. – *Soit V un K-ev de dimension finie et soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(V/K)$ un sous-groupe à un paramètre. Alors il existe un unique endomorphisme $x \in \mathcal{L}(V/K)$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \exp(tx).$$

En particulier, λ est C^∞ et déterminé par sa dérivée $x = \lambda'(0)$.

Démonstration. Montrons d'abord que λ est dérivable. Par continuité de λ, on peut trouver une fonction $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et normalisée par $\int_\mathbb{R} \theta(t)dt = 1$, vérifiant la condition

$$\int_\mathbb{R} \theta(t)||\lambda(-t) - \mathrm{id}_V||dt < 1.$$

Sous cette condition, l'endomorphisme $y = \int_\mathbb{R} \theta(t)\lambda(-t)dt$ est inversible car il vérifie l'inégalité $||y - \mathrm{id}_V|| < 1$. Posons alors

$$\kappa(t) := \int_\mathbb{R} \theta(t-s)\lambda(s).$$

La fonction $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{L}(V/K)$ est C^∞ (dérivation sous le signe somme...), et un changement de variable montre que

$$\kappa(t) = \int_\mathbb{R} \theta(u)\lambda(t-u)du = \lambda(t) \cdot y.$$

Donc λ est de classe C^∞. Mais alors la différentielle λ' est donnée par $\lambda'(t) = \lambda(t)\lambda'(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(\exp(-t\lambda'(0))\lambda(t)) = 0$, puis par intégration $\lambda(t) = \exp(tX)$ avec $X = \lambda'(0)$. $\square$

2.1.2 *Crochet de Lie.* Soit V de dimension finie sur K. Pour $u, v \in \mathrm{L}(V/K)$ on pose $[u, v] := uv - vu$, et on l'appelle "crochet de Lie" de u et v. En notation matricielle, cela donne $[X, Y] = XY - YX$ pour $X, Y \in \mathrm{M}_n(K)$.

Lemme. – *Soient X et Y deux éléments de $M_n(K)$. Alors,*

i) $\lim_{k\to+\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k}))^k = \exp(X+Y)$;

ii) $\lim_{k\to+\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k})(\exp(\frac{-X}{k})\exp(\frac{-Y}{k}))^{k^2} = \exp([X,Y])$.

Démonstration. i) Un développement limité fournit l'estimée

$$\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right) = I + \frac{(X+Y)}{k} + O\left(\frac{1}{k}^2\right).$$

En particulier, pour k suffisamment grand, on peut prendre le logarithme et obtenir

$$k \cdot \log\left(\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right) = X + Y + O(\frac{1}{k}).$$

ii) On procède de la même manière en passant par l'estimée

$$\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\exp\left(\frac{-X}{k}\right)\exp\left(\frac{-Y}{k}\right) = I + \frac{[X,Y]}{k^2} + O\left(\frac{1}{k}^3\right).$$

□

Corollaire. – *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(K)$. L'ensemble*

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathrm{M}_n(K),\ \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$$

est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(K)$, stable par le crochet de Lie.

Démonstration. Par définition, $\mathfrak{g}$ est stable par multipication par $\mathbb{R}$. Puisque G est fermé, la formule i) du lemme montre que $\mathfrak{g}$ est stable par addition, donc c'est un $\mathbb{R}$-sev. La formule ii) montre alors la stabilité par crochet. □

Lorsque $K = \mathbb{C}$, on prendra garde au fait que $\mathfrak{g}$ n'est pas nécessairement un K-sev de $\mathrm{M}_n(K)$.

2.2 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ un sous-groupe fermé. L'ensemble $\mathfrak{g}$ défini au corollaire précédent est appelé *algèbre de Lie* de G, et est parfois aussi noté $\mathrm{Lie}(G)$. Avant d'étudier la notion abstraite d'algèbre de Lie, explicitons les liens ténus entre G et son algèbre de Lie.

2.2.1 $\mathrm{Lie}(G)$ *est canonique.* Tel que nous l'avons défini, $\mathfrak{g}$ semble dépendre non seulement de G mais aussi du $\mathrm{GL}_n(K)$ dans lequel on voit G. Or, en vertu du théorème 2.1.1, l'ensemble $\mathfrak{g}$ s'interprète comme l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G, ce qui en donne une définition *intrinsèque.* De plus, la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathfrak{g}$ et le crochet sont donnés par les formules
- $(r.\lambda)(t) = \lambda(rt)$ pour $r \in \mathbb{R}$,
- $(\lambda + \mu)(t) = \lim_{k\to\infty}(\lambda(t/k)\mu(t/k))^k$,
- $[\lambda, \mu](t) = \lim_{k\to\infty}(\lambda(1/k)\mu(t/k)\lambda(-1/k)\mu(-t/k))^{k^2}$.

Ces formules montrent que l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de son crochet est *canoniquement* attaché à G. En particulier, il ne dépend pas du plongement de G dans un $\mathrm{GL}_n(K)$. Notons cependant que ces formules n'ont pas nécessairement de sens pour un groupe topologique quelconque.

2.2.2 *Changement de groupe.* L'avantage de voir Lie(G) comme ensemble des sous-groupes à un paramètre est qu'on en déduit immédiatement que tout morphisme de groupes topologiques $G \xrightarrow{\varphi} H$ entre deux groupes de Lie linéaires induit une application

$$\begin{array}{rccc} d\varphi : & \mathrm{Lie}(G) & \to & \mathrm{Lie}(H) \\ & \lambda & \mapsto & d\varphi(\lambda) := \varphi \circ \lambda \end{array}$$

Vu les définitions de la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur Lie(G) et Lie(H), l'application $d\varphi$ est $\mathbb{R}$-linéaire et compatible aux crochets.

Exercice. – Si le noyau de φ est discret, montrer que $d\varphi$ est injective. Nous allons voir ci-dessous que la réciproque est vraie.

Remarque. – Si l'on fixe des plongements $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ et que l'on identifie Lie(G), resp. Lie(H), à des espaces de matrices $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h} \subset M_m(\mathbb{R})$, l'application $d\varphi$ est donnée par

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ d\varphi(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(t \mapsto \varphi(\exp(tX))).$$

2.2.3 *L'exponentielle de G.* Par définition, l'application exp définie au paragraphe 1.2.2 pour le groupe $\mathrm{GL}_n(K)$ envoie $\mathfrak{g}$ dans G. On note parfois $\exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ sa restriction. Encore une fois, elle est intrinsèque puisque, en termes de sous-groupes à un paramètre, elle est simplement donnée par $\lambda \mapsto \lambda(1)$. Cette formulation nous montre d'ailleurs immédiatement que si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes topologiques entre deux groupes de Lie linéaires, alors on a :

$$\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ d\varphi.$$

THÉORÈME. – *L'application exponentielle $\exp_G$ établit un homéomorphisme local d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de 1 dans G.*

Démonstration. L'application $\exp_G$ est évidemment continue. Puisque c'est la restriction de exp qui est localement injective, elle est elle-même localement injective. Ce qui n'est pas évident par contre, c'est pourquoi elle est localement surjective (ou plus précisément, pourquoi il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que la restriction de $\exp_G$ à $\mathcal{V}$ soit ouverte). Dans le cas de $\mathrm{GL}_n(K)$ nous avions pu utiliser le logarithme. Mais ici, on ne sait pas a priori si $\log(B(\mathrm{id}_V, 1) \cap G) \subset \mathfrak{g}$.

Soit E un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, et considérons l'application

$$F : \mathfrak{g} \times E \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y).$$

Sa différentielle en $(0,0)$ est inversible, donc il existe des voisinages $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) de 0 (resp. 1) dans $\mathfrak{g}$, E (resp. G) tels que F induise un difféomorphisme de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$. Admettons un instant que

(*) : il existe un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de 0 dans E tel que exp$(\mathcal{V}') \cap G = \{\mathbf{I}_n\}$.

Posons alors $\mathcal{W}' = F(\mathcal{U} \times \mathcal{V}')$. Pour tout $g \in \mathcal{W}' \cap G$, il existe $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}'$ tels que $g = F(X,Y)$. Mais alors, $\exp(Y) = \exp(-X)g \in \exp(\mathcal{V}') \cap G = \{\mathbf{I}_n\}$, d'où $g = \exp(X)$. Il s'ensuit que exp induit un homéomorphisme $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}' \cap G$, comme voulu.

Reste à prouver *(*)*. Supposons le contraire. On peut alors trouver une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments *non nuls* de E tendant vers 0, telle que $\exp(Y_n) \in G$ pour tout n. Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que la suite $(Y_n/||Y_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite Y dans E (compacité de la sphère). Notons que $Y \neq 0$. Nous allons montrer que $Y \in \mathfrak{g}$, ce qui contredira le fait que $\mathfrak{g} \cap E = \{0\}$. Pour cela nous devons prouver que $\exp(tY) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $[x]$ la partie entière d'un réel x, et écrivons

$$\exp(t/||Y_n|| \cdot Y_n) = \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \cdot \exp((t/||Y_n|| - [t/||Y_n||])Y_n).$$

Comme le terme $\exp((t/||Y_n|| - [t/||Y_n||])Y_n)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que

$$\exp(tY) = \lim_{n\to+\infty} \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \in G.$$

□

On déduit de ce théorème que G est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, où $d = dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ s'appelle la *dimension du groupe de Lie G*. Nous déterminerons plus loin les dimensions des groupes de Lie classiques.

Combiné avec le lemme 1.1.5, le théorème ci-dessus entraîne le corollaire important suivant.

COROLLAIRE. – *La composante neutre G^0 de G est engendrée (comme sous-groupe fermé) par l'image de* $\exp_G$. *En particulier, si deux sous-groupes fermés G_1 et G_2 de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *ont la même algèbre de Lie, leurs composantes neutres coïncident.*

Notons que par définition, on a $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0)$ pour tout sous-groupe fermé G de $\mathrm{GL}_n(K)$.

Exercice. – Soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme continu de groupes de Lie linéaires.

i) Si $d\varphi$ est injective, montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est discret.

ii) Si $d\varphi$ est surjective, montrer que $\mathrm{Coker}\,\varphi$ est discret. En particulier, si H est connexe et $d\varphi$ est surjective, alors φ est surjective.

Exemple. – Nous pouvons maintenant (presque) terminer de prouver que l'homomorphisme $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SO}(3)$ construit à l'aide des quaternions est un homéomorphisme. On a déjà vu qu'il est injectif et continu. L'application $d\varphi$ est injective d'après un exercice plus haut. En admettant que Lie(SU(2)) et Lie(SO(3)) ont même dimension (ce que nous vérifierons plus loin), il s'ensuit que $d\varphi$ est surjective. Mais puisque SO(3) est connexe, φ est surjective et donc bijective. Enfin, puisque SU(2) est compact, φ est aussi ouverte et c'est donc un homéomorphisme.

COROLLAIRE. – *Soient G un sous-groupe fermé connexe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et H un sous-groupe fermé connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors,* *i)* $H \subset Z(G)$ *si et seulement si* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = 0$.

ii) H *est distingué dans* G *si et seulement si on a* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ *(on dit alors que* $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*).*

Démonstration. i) Supposons H central. Le ii) du lemme 2.1.2 montre que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\exp(t[X,Y]) = 1$. Prenant t assez petit, il vient $[X,Y] = 0$. Réciproquement, supposons $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = 0$. Alors pour $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$. On en déduit l'existence d'un voisinage V de 1 dans G, resp. U de 1 dans H tel que tout élément de V centralise tout élément de U. Mais alors le groupe engendré par V centralise le groupe engendré par U, donc G centralise H.

ii) Supposons H distingué dans G. Alors le ii) du lemme 2.1.2 et le fait que H est fermé montrent que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Réciproquement, supposons $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Comme on suppose H connexe, il suffit de montrer que pour tout $g \in G$, on a $\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) = \mathrm{Lie}(H)$, *i.e.* $g\mathfrak{h}g^{-1} = \mathfrak{h}$. Comme on suppose aussi G connexe, il suffit de prouver ceci pour g dans un voisinage de l'identité de 1 dans G. On peut donc supposer $g = \exp(X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Mais alors, on montre que pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, on a

$$(*) \quad \exp(X)Y\exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}(X))(Y)$$

où $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{L}(M_n(\mathbb{R})/\mathbb{R})$ est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathrm{ad}(X)(Y) := [X,Y]$. En effet, notons $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{GL}(M_n(\mathbb{R})/\mathbb{R})$ l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$. Alors on vérifie que les deux sous-groupes à un paramètre $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp(tX))$ et $t \mapsto \exp(t\mathrm{ad}(X))$ de $\mathrm{GL}(M_n(\mathbb{R})/\mathbb{R})$ coïncident, car ils ont la même différentielle en $t = 0$. Or puisque $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, on a aussi $\exp(\mathrm{ad}(X))(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ et par conséquent $\exp(X)Y\exp(-X) \in \mathfrak{h}$ comme voulu. □

L'égalité (*) utilisée dans la preuve se généralise comme suit.

Exercice. – Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie.

i) Montrer que la conjugaison par un élément de G dans $M_n(\mathbb{R})$ stabilise $\mathfrak{g}$ et définit un homomorphisme continu de groupes topologiques

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Ad}: & \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \mathrm{Ad}(g): X \mapsto gXg^{-1} \end{array}$$

ii) Montrer que $d\mathrm{Ad}$ est l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \to & \mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{R}) \\ & Y & \mapsto & \mathrm{ad}(Y): X \mapsto [Y,X] \end{array}.$$

On se servira de la formule de la remarque 2.2.2

$$d\mathrm{Ad}(Y) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (t \mapsto \exp(tY)X\exp(-tY)).$$

iii) En déduire que $\mathrm{Ad} \circ \exp_G = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})} \circ \mathrm{ad}$.

Remarque. – Un sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ stable par crochet (ou même un idéal) n'est pas nécessairement l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de G (considérer comme d'habitude une droite $\mathfrak{h}$ de pente irrationnelle dans l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^2 \simeq \mathrm{Lie}((S^1)^2)$.)

2.3 Exemples classiques

De manière générale, on note avec des lettres gothiques les algèbres de Lie des groupes classiques. Par exemple $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ se note $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Par définition, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et le crochet est donné par $[X, Y] = XY - YX$. De même, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ muni de son crochet. De manière plus intrinséque, si V est un K-ev de dimension finie, on note

$$\mathfrak{gl}(V/K) := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V/K)) = \mathrm{L}(V/K), \text{ muni du crochet } [u, v] := uv - vu.$$

Tous les groupes classiques sont définis dans un GL_n ou un $\mathrm{GL}(V/K)$ convenable, et le crochet de leur algèbre de Lie est induit par celui de $\mathfrak{gl}_n$ ou de $\mathrm{GL}(V/K)$. Il nous suffit donc de décrire les conditions qui définissent les $\mathbb{R}$-ev sous-jacents.

Par exemple, le premier exercice du paragraphe 1.2.2 nous dit que

$$\mathfrak{sl}(V/K) := \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(V/K) = \{u \in \mathcal{L}(V/K), \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$

Remarquons que c'est toujours un K-sev. En termes matriciels, cela donne

i) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (matrices de trace nulle). Sa dimension est $n^2 - 1$.

ii) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Sa dimension réelle est $2n^2 - 1$.

Par ailleurs, supposons $G = \{g \in \mathrm{GL}(V/K), \Psi(gv, gw), \forall v, w \in V\}$ défini par une forme bilinéaire non dégénérée Ψ (qu'elle soit symétrique, alternée ou hermitienne). En d'autres termes, si g^* désigne l'adjoint de g pour Ψ, on a $G = \{g \in G,\ gg^* = \mathrm{id}_V\}$. Comme $\exp(u)^* = \exp(u^*)$ (par passage à la limite), on constate que

$$\mathfrak{g} = \{u \in \mathrm{L}(V/K),\ u + u^* = 0\}.$$

Notons d'ailleurs que c'est toujours un K-espace vectoriel, sauf dans le cas unitaire, ou $K = \mathbb{C}$ mais $\mathfrak{g}$ n'est qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En termes matriciels, cela donne :

iii) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), X + {}^tX = 0\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques. Sa dimension est $n(n-1)/2$.

iv) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n, \mathbb{C})) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^tX = 0\}$. Sa dimension réelle est $n(n-1)$.

v) $\mathfrak{u}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^t\overline{X} = 0\}$. Par exemple, $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Sa dimension est n^2.

vi) $\mathfrak{su}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(n)) = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Sa dimension est $n^2 - 1$.

vii) $\mathfrak{sp}_{2n}(K) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n}(K)) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(K), {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0\}$. Sa dimension est $n(n+1)/2$.

Enfin, si $\mathcal{V}$ est un drapeau complet dans V/K, on vérifie que

$$\mathfrak{b}(\mathcal{V}/K) := \mathrm{Lie}(\mathrm{B}(\mathcal{V}/K)) = \{u \in \mathcal{L}(V/K),\, u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \forall i = 0, \cdots, n\}$$

tandis que

$$\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K) := \mathrm{Lie}(\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/K)) = \{u \in \mathcal{L}(V/K),\, u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

En termes matriciels, cela donne :

viii) $\mathfrak{b}_n(K) = \mathrm{Lie}(\mathrm{B}_n(K)) = \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(K), \forall i > j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures).

ix) $\mathrm{Lie}(\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(K) := \mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}(K) = \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(K), \forall i \geqslant j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures nilpotentes).

Enfin, on vérifie que :

x) $\mathrm{Lie}((S^1)^n) = (i\mathbb{R})^n \simeq \mathbb{R}^n$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie abélienne. Le "i" rappelle qu'on la voit comme une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie abélienne complexe $\mathrm{Lie}((\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n$ formée par les matrices diagonales de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Exercice. – Montrer que l'exponentielle exp induit un homéomorphisme de $\mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}(K)$ sur $\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(K)$.

3 Structure des algèbres de Lie

Le fait qu'un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{GL}(V/K)$ soit déterminé par son "algèbre de Lie", qui est un objet d'algèbre linéaire a priori plus simple que le groupe lui-même, est une motivation pour étudier ces nouveaux objets, après en avoir donné un fondement axiomatique. C'est ce que nous commençons à faire ici.

3.1 Algèbres de Lie "abstraites". Exemples.

Soit K un corps commutatif quelconque.

3.1.1 DÉFINITION.– *Une* algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *sur* K *est un* K*-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne* $[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}:(X,Y)\mapsto[X,Y]$ *qui est* K*-bilinéaire, alternée (*$[X,X]=0$*, donc* $[X,Y]=-[Y,X]$*), et qui vérifie l'identité de Jacobi*

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}\ ,\ \ [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Si $K=\mathbb{R}$*, on dira simplement "algèbre de Lie". La loi* $[,]$ *s'appelle le crochet de Lie.*

Pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, on note $\mathrm{ad}(X)\in\mathrm{L}(\mathfrak{g}/K)$ l'endomorphisme du K-espace vectoriel $\mathfrak{g}:Y\mapsto\mathrm{ad}(X)(Y):=[X,Y]$. On a donc

$$\mathrm{ad}(X)([Y,Z])=[\mathrm{ad}(X)(Y),Z]+[Y,\mathrm{ad}(X)(Z)]. \tag{3.1.1.1}$$

Un *morphisme* entre deux algèbres de Lie est un homomorphisme f des K-espaces vectoriels sous-jacents respectant leurs lois d'algèbres de Lie : $f([X,Y])=[f(X),f(Y)]$.

3.1.2 DÉFINITION.– *Un sous-*K*-espace vectoriel* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est appelé :*
- *Une* sous-algèbre de Lie *de* $\mathfrak{g}$ *s'il est stable sous le crochet de Lie,* i.e. $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$*, ou encore* $\forall X,Y\in\mathfrak{h},[X,Y]\in\mathfrak{h}$.
- *Un idéal de* $\mathfrak{g}$ *s'il vérifie* $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}$*, c'est-à-dire* $\forall X\in\mathfrak{h},Y\in\mathfrak{g},[X,Y]\in\mathfrak{h}$.

Exercice. – Si $\mathfrak{h}$ est un idéal, l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie. Si $\mathfrak{h}'\supset\mathfrak{h}$ est un autre idéal de $\mathfrak{g}$, l'image $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et on a l'isomorphisme canonique "habituel" $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'\xrightarrow{\sim}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{h}'/\mathfrak{h})$. Par ailleurs, lorsque $\mathfrak{h}'$ n'est plus contenu dans $\mathfrak{h}$, la *somme*

$$\mathfrak{h}+\mathfrak{h}':=\{X+Y,X\in\mathfrak{h},Y\in\mathfrak{h}'\}$$

est un idéal de $\mathfrak{g}$, et on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{h}'/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{h}')\xrightarrow{\sim}(\mathfrak{h}'+\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$.

Exercice. – Pour tout morphisme d'algèbre de Lie $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$, le noyau $\mathfrak{h}=\mathrm{Ker}(f)$ de f est un idéal de $\mathfrak{g}$, l'image $\mathfrak{h}'=\mathrm{Im}(f)$ de f est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, et f induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}'$.

3.1.3 On appelle centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'idéal

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{L}(\mathfrak{g}/K))$$

de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *abélienne* si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, c'est-à-dire, si le crochet de $\mathfrak{g}$ est *nul*.

Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, l'espace vectoriel

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] := \mathrm{Vect}_K (\{[X, Y], X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}'\})$$

est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$, et appelé *produit* de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}'$.

Exercice. – Montrer que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}]$ et $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']] = [\mathfrak{h}', [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]]$.

Exercice. – Montrer que *l'algèbre dérivée* $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le plus petit idéal de $\mathfrak{g}$ (pour l'inclusion) tel que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie abélienne. On notera l'analogie avec la notion de *groupe dérivé*.

Remarque. – L'analogie avec le vocabulaire plus familier des K-algèbres associatives commutatives (idéaux, quotients, centre...) n'est évidemment pas fortuite. Les axiomes définissant ces deux structures sont essentiellement les mêmes, sauf que l'axiome de commutativité $xy = yx$ est remplacé par un axiome d'anticommutativité $[X, Y] = -[Y, X]$, et celui d'*associativité* $x(yz) = (xy)z$ est remplacé par l'identité de Jacobi. Il existe une théorie abstraite, appelée *théorie des opérades*, qui permet de construire beaucoup d'autres notions d'"algèbre". Mais bien-sûr, ces notions ne sont pas souvent aussi importantes que les algèbres associatives, ou de Lie.

Donnons maintenant deux manières de définir des algèbres de Lie.

3.1.4 *Algèbre de Lie associée à une algèbre associative.* Soit A une algèbre associative. Munissons A du crochet $[a, b] := ab - ba$.

Exercice. – Vérifier que $(A, [,])$ est une algèbre de Lie.

Le cas particulier qui nous intéresse le plus est bien-sûr $A = \mathrm{L}(V/K)$. L'exercice montre que ce que nous avons appelé jusqu'ici "algèbre de Lie" d'un groupe de Lie linéaire G est bien une algèbre de Lie au sens de la définition précédente. Par contre, pour G différent de $\mathrm{GL}(V/K)$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ne provient pas d'une algèbre associative.

3.1.5 *Dérivations d'une algèbre.* Soit A une K-algèbre associative. Une *dérivation* ∂ de A est un endomorphisme du K-espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibniz : $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$. L'ensemble $\mathrm{Der}(A)$ des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(A/K)$. Le composé $\partial\partial'$ de deux dérivations ∂, ∂' n'est en général pas une dérivation (autrement dit, $\mathrm{Der}(A)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\mathrm{L}(A/K)$), mais $[\partial, \partial'] := \partial\partial' - \partial'\partial$ est encore une dérivation de A. Ainsi, $\mathrm{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A/K)$. [7]

[7] Par exemple (voir cours de géométrie différentielle), soient M une variété différentiable, et $\mathcal{O}(M)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions différentiables sur M. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(M, \mathcal{T}M)$ des champs de vecteurs

De même, on définit une dérivation d'une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ comme un élément ∂ de $\mathrm{L}(\mathfrak{g}/K)$ vérifiant $\partial([X,Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$. On remarque que la formule (3.1.1.1) –qui traduit l'identité de Jacobi– signifie finalement que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$.

3.1.6 Définition.– *Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie. Une représentation de $\mathfrak{g}$ est une paire (V,ρ) composée d'un K-espace vectoriel V de dimension finie et d'un morphisme d'algèbres de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K).$$

Exemple. – Considérons l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$, $X \mapsto \mathrm{ad}(X)$. La formule de Jacobi s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([X,Y])(Z) &= [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= \mathrm{ad}(X)(\mathrm{ad}(Y)(Z)) - \mathrm{ad}(Y)(\mathrm{ad}(X)(Z)) \\ &= (\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X))(Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z), \end{aligned}$$

ce dernier crochet étant celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$ attachée à $\mathrm{L}(\mathfrak{g}/K)$, de sorte que $\mathrm{ad}([X,Y]) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$. En d'autres termes, $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, d'espace de représentation $V = \mathfrak{g}$ elle-même. On l'appelle la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. Elle est d'autant plus intéressante que le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ de $\mathfrak{g}$ est petit.

Une représentation (V,ρ) se note souvent abusivement simplement V. On sous-entend ρ en notant $X.v$ pour $\rho(X)(v)$.

Un K-sev W de V est dit *stable par* $\mathfrak{g}$ si $\forall X \in \mathfrak{g},\ X.(W) \subseteq W$. Le morphisme ρ induit donc un morphisme d'algèbres de Lie, toujours noté $\rho :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W/K)$. La représentation (W,ρ) ainsi obtenue est une *sous-représentation* de (V,ρ). De plus, ρ induit un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}((V/W)/K)$ et la représentation $(V/W,\rho)$ obtenue est appelée *représentation quotient.*

Exemple. – Si (V,ρ) est une représentation de $\mathfrak{g}$, le K-sev

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ X.v := \rho(X)(v) = 0\}$$

est stable par $\mathfrak{g}$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $V^{\mathfrak{g}}$ est triviale[8]. Plus généralement, si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, le K-sev $V^{\mathfrak{h}}$ est stable par $\mathfrak{g}$. En effet, si $X \in \mathfrak{g}$, on a pour tout $Y \in \mathfrak{h}$ et tout $v \in V^{\mathfrak{h}}$ l'égalité

$$Y.(X.v) = Y.(X.v) - X.(Y.v) = [Y,X].v = 0$$

puisque $[Y,X] \in \mathfrak{h}$. Noter que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $V^{\mathfrak{h}}$ se factorise par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

sur M, muni du crochet de Lie, est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathcal{O}(M))$.

[8]On a là un analogue des vecteurs fixes dans une représentation d'un groupe

3.2 Algèbres de Lie nilpotentes

3.2.1 DÉFINITION.– *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* K*. La* suite centrale descendante *de* $\mathfrak{g}$ *est la suite décroissante (au sens large) d'idéaux de* G *définie par*

$$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \ \textit{et} \ C^n(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})], \forall n > 1.$$

On dit que $\mathfrak{g}$ *est* nilpotente *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $C^n(\mathfrak{g}) = 0$*.*

En d'autres termes, $C^n(\mathfrak{g})$ est le K-sev de $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}) &= \mathrm{Vect}_K\left(\{[X_n,[X_{n-1},\cdots,[X_2,X_1]\cdots]],\ \text{avec } X_1,\cdots,X_n \in \mathfrak{g}\}\right). \\ &= \mathrm{Vect}_K\left(\{\mathrm{ad}(X_n)\mathrm{ad}(X_{n-1})\cdots\mathrm{ad}(X_2)(X_1),\ \text{avec } X_1,\cdots,X_n \in \mathfrak{g}\}\right). \end{aligned}$$

Exercice. – Vérifier par récurrence que $[C^r(\mathfrak{g}), C^s(\mathfrak{g})] \subset C^{r+s}(\mathfrak{g})$, pour $r, s \in \mathbb{N}$.

3.2.2 LEMME.– *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si et seulement si elle vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

i) Il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{h}_n = 0$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ *pour tout* i*.*

ii) Pour n *assez grand et pout tout* n*-uple* $X_1, \cdots, X_n$ *d'éléments de* $\mathfrak{g}$*,*

$$\mathrm{ad}(X_n)\mathrm{ad}(X_{n-1})\cdots\mathrm{ad}(X_2)(X_1) = 0.$$

Démonstration. Laissée au lecteur. □

Exercice. – Déduire de la caractérisation i) que toute sous-algèbre de Lie (resp. tout quotient) d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente.

Exercice. – Soit V un K-ev de dimension finie, et soit $\mathcal{V}$ un drapeau complet dans V, comme dans le paragraphe 1.3.7. Montrer que $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}/K), \mathfrak{b}(\mathcal{V}/K)] = \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)$, et plus généralement que

$$C^k(\mathfrak{b}(\mathcal{V}/K)) = \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K),\ \forall k \geqslant 1$$

En déduire que $\mathfrak{b}(\mathcal{V}/K)$ n'est pas nilpotente. Montrer ensuite que

$$C^k(\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)) = \{u \in \mathrm{L}(V/K),\ u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-k}, \forall i = k, \cdots, n\}.$$

En déduire que $\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)$ *est une algèbre de Lie nilpotente.*

3.2.3 THÉORÈME. (Engel)– *Soit* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(V/K)$ *telle que tout élément* X *de* $\mathfrak{g}$ *soit un endomorphisme nilpotent de* V*. Alors, il existe un drapeau* $\mathcal{V}$ *de* V *tel que* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)$*. En particulier,* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente.*

[Autrement dit : si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont trigonalisables et à valeurs propres toutes nulles, ils sont simultanément trigonalisables.]

Démonstration. Supposons que l'on ait déjà prouvé l'énoncé suivant :
(*) Pour $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V/K)$ formée d'éléments nilpotents, on a $V^{\mathfrak{g}} \neq 0$.

Alors le théorème en découle par récurrence sur $\dim(V)$. En effet, soit $v \in V^{\mathfrak{g}}$ non nul. Posons $\mathcal{V}_1 := K.v$ et notons $p : V \twoheadrightarrow V' := V/\mathcal{V}_1$ la projection de V sur son quotient par la droite $K.v = \mathcal{V}_1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation quotient $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V'/K)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $\mathcal{V}'$ dans V' tel que $\mathfrak{g}'$ soit contenue dans $\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}'/K)$. Rappelons que ceci signifie simplement que $\mathfrak{g}'.\mathcal{V}'_i \subset \mathcal{V}'_{i-1}$ pour tout $i > 0$. Posons alors $\mathcal{V}_i := p^{-1}(\mathcal{V}_{i+1})$. On a bien $\mathfrak{g}.\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_{i-1}$ pour $i > 1$, et on a aussi $\mathfrak{g}\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 = \{0\}$ par construction de $\mathcal{V}_1$. On a donc $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)$ comme voulu.

Il faut maintentant prouver l'énoncé *(*)*. Nous le ferons par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, on a $V^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ker}(X)$ pour tout X non nul de $\mathfrak{g}$. Comme un tel X est supposé nilpotent, son noyau est non nul, comme voulu. Supposons maintenant $\dim(\mathfrak{g}) > 1$, et supposons que l'on dispose d'un idéal $\mathfrak{h}$ non trivial, *i.e.* distinct de $\{0\}$ et de $\mathfrak{g}$. Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V/K)$ nous dit que $V^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$. De plus, $V^{\mathfrak{h}}$ est stable par l'action de $\mathfrak{g}$, laquelle se factorise par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ainsi l'hypothèse de récurrence appliquée à l'image de $\mathfrak{g}$ par la sous-représentation $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^{\mathfrak{h}})$ nous dit que $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \neq 0$. Or, on a $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Il reste donc à prouver l'existence d'un idéal $\mathfrak{h}$ non trivial. Choisissons pour cela une sous-algèbre de Lie propre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale. La représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$ restreinte à $\mathfrak{h}$ induit une représentation de $\mathfrak{h}$ sur le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'image de $\mathfrak{h}$ par cette représentation est formée d'endomorphismes nilpotents. En effet, d'après l'exercice ci-dessous, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(X)$ de $\mathfrak{g}$ est nilpotent. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence pour en déduire l'existence d'un élément $\overline{X} \neq 0$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ annulé par l'action de $\mathfrak{h}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ au-dessus de $\overline{X}$. On a donc $X \notin \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, X] = \mathrm{ad}(\mathfrak{h})(X) \subseteq \mathfrak{h}$. Ceci implique que $\mathfrak{h} \oplus K.X$ est une algèbre de Lie contenant $\mathfrak{h}$ comme idéal. Mais par maximalité de $\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{h} \oplus K.X = \mathfrak{g}$. Ainsi, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1. □

Exercice. – Soit A une K-algèbre associative et $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y] := xy - yx$ pour $x, y \in A$. Montrer que $\mathrm{ad}(x)^n(y) \in \mathrm{Vect}_K\{x^k y x^{n-k}, k = 0, \cdots, n\}$.

Voici une amélioration de la caractérisation ii) du lemme 3.2.2.

3.2.4 COROLLAIRE.– *Une K-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. La condition est nécessaire, vu la caractérisation ii) du lemme 3.2.2. Le fait que la condition soit suffisante est plus surprenant. Il découle du théorème précédent appliqué à l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe ad : $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$. En effet, ce théorème assure l'existence d'un drapeau $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_{i-1}$. Posons $\mathfrak{h}_i := \mathcal{V}_{\dim(V)-i}$. Alors, les $\mathfrak{h}_i$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$, et on applique le point i) du lemme 3.2.2.

□

Attention : le théorème et son corollaire ne signifient pas qu'une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{gl}(V/K)$ est formée d'endomorphismes nilpotents. Par exemple le centre de $\mathfrak{gl}(V/K)$ est certainement une algèbre de Lie nilpotente puisqu'abélienne, mais n'agit pas de manière nilpotente sur V !

3.3 Algèbres de Lie résolubles.

3.3.1 Définition.– *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K. La* suite dérivée *de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante (au sens large) de sous-algèbres de Lie de G définie par*

$$D^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \text{ et } D^n(\mathfrak{g}) := [D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})], \forall n > 1.$$

On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(\mathfrak{g}) = 0$.*

On voit facilement que $D^k(\mathfrak{g}) \subset C^k(\mathfrak{g})$ pour tout k, de sorte que toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

Exercice. – Montrer que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si on a l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

i) il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de $\mathfrak{g}$ tels que $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ pour tout i.

ii) il existe une suite de sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ de $\mathfrak{g}$ telles que pour $i = 1, ..., n-1$, $\mathfrak{h}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{h}_i$ à quotient $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ abélien.

En déduire que si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ le sont.

Exercice. – On dit qu'un groupe de Lie G est résoluble s'il admet une suite de sous-groupes normaux fermés à quotients successifs abéliens. Montrer qu'un groupe de Lie connexe G est résoluble si et seulement si $\mathrm{Lie}(G)$ est une algèbre de Lie résoluble.

Exemple. – Soit V un K-ev de dimension finie et $\mathcal{V}$ un drapeau complet de V. Les calculs faits dans un exercice de la section précédente montrent que $\mathfrak{b}(\mathcal{V}/K)$ est une algèbre de Lie résoluble.

Dans la suite de cette section, nous supposons $K = \mathbb{C}$. On pourrait plus généralement supposer K algébriquement clos de caractéristique nulle : le point important est que sur un tel corps, tout endomorphisme d'un K-ev de dimension finie admet un vecteur propre.

3.3.2 Théorème. (Lie)– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{C})$. Il existe un drapeau $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V}/K)$.*

Remarque. – Ce théorème est une généralisation du fait qu'une famille d'endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie qui commutent deux à deux est simultanément trigonalisable. En effet, le $\mathbb{C}$-ev engendré par une telle famille est une algèbre de Lie abélienne, donc résoluble.

Démonstration. Supposons que l'on ait déjà prouvé l'énoncé suivant :
(*) Pour $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V/K)$ résoluble, il existe un $v \in V$ vecteur propre de tous les $X \in \mathfrak{g}$.

Alors le théorème en découle par récurrence sur $\dim(V)$. En effet, soit v un tel vecteur propre. Posons $\mathcal{V}_1 := K.v$ et notons $p : V \twoheadrightarrow V' := V/\mathcal{V}_1$ la projection de V sur son quotient par la droite $K.v = \mathcal{V}_1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation quotient $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V'/K)$. Par le premier exercice ci-dessus, $\mathfrak{g}'$ est résoluble. Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $\mathcal{V}'$ dans V' tel que $\mathfrak{g}'$ soit contenue dans $\mathfrak{b}(\mathcal{V}'/K)$, ce qui signifie simplement que $\mathfrak{g}'.\mathcal{V}'_i \subset \mathcal{V}'_i$ pour tout $i \geqslant 0$. Posons alors $\mathcal{V}_i := p^{-1}(\mathcal{V}_{i+1})$. On a bien $\mathfrak{g}.\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_i$ pour $i > 0$, et on a aussi $\mathfrak{g}\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1$ par construction de $\mathcal{V}_1$. On a donc $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/K)$ comme voulu

Il nous faut maintenant prouver *(*)*, ce que nous ferons par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, le résultat est clair puisque tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie possède un vecteur propre. Supposons $\dim(\mathfrak{g}) > 1$, et supposons l'assertion *(*)* établie pour toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension $< \dim(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{h}$ un hyperplan de $\mathfrak{g}$ contenant $D\mathfrak{g}$ (noter que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g} \neq 0$). Alors, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et l'hypothèse de récurrence fournit un vecteur propre v de V commun à tous les éléments de $\mathfrak{h}$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par $X.v = \lambda(X)v$ pour tout X dans $\mathfrak{h}$. Posons

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, X.v = \lambda(X)v\},$$

le sous-espace "λ-propre" de V sous l'action de $\mathfrak{h}$, qui est donc non nul. Admettons un instant que V_λ est stable par $\mathfrak{g}$. Soit Y un générateur d'une droite supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme K est algébriquement clos, Y admet un vecteur propre $v' \in V_\lambda$. Alors, v', qui est propre pour $\mathfrak{h}$, l'est pour $\mathfrak{g}$ toute entière, et le théorème est démontré.

Il reste à prouver que V_λ est stable par $\mathfrak{g}$. Par l'égalité

$$X.Y.v = Y.X.v + [X,Y].v = \lambda(X)Y.v + \lambda([X,Y])v$$

valable pour tout X, Y, v dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, V_\lambda$, on est ramené à prouver que $\lambda([X,Y]) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. Pour cela, fixons un vecteur $w \neq 0$ de V_λ, et notons W le sous-espace de V engendré par les images de w sous tous les itérés $Y^{\cdot k}$ de Y. La formule $X.Y^{\cdot k}.w = Y.X.Y^{\cdot(k-1)}w + [X,Y].Y^{\cdot(k-1)}w$ montre par récurrence que W est stable sous $\mathfrak{h}$ et que $X.Y^{\cdot k}.w \equiv \lambda(X)Y^{\cdot k}.w$ modulo le sous-espace engendré par les $Y^{\cdot k'}.w, k' < k$. Donc $\mathrm{tr}(X_{|W}) = \dim(W).\lambda(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. Mais X et Y agissent sur W, donc $\dim(W).\lambda([X,Y]) = \mathrm{tr}([X_{|W}, Y_{|W}] = 0$. $\square$

On en déduit une caractérisation de la résolubilité en termes de représentations. On dit qu'une représentation (V, ρ) est *irréductible* si ses seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et V.

3.3.3 COROLLAIRE.– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est de dimension* 1.

Ce corollaire ne reste vrai pour les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie que si l'on se limite aux $\mathbb{C}$-représentations. Mais en général, il existe des $\mathbb{R}$-représentations irréductibles de dimension 2.

Exercice. – Montrer que la représentation “standard” $\mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ est irréductible.

Les deux résultats qui suivent sont, eux, encore valables pour les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Cela résulte de l'exercice suivant :

Exercice. – Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée. Montrer que $D^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = D^i(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$. En déduire que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ l'est.

3.3.4 Corollaire.– *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si son algèbre de Lie dérivée $D\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. La condition est en effet suffisante d'après le premier exercice du paragraphe. Pour montrer qu'elle est nécessaire, on peut supposer $K = \mathbb{C}$. On applique alors le théorème à la sous-algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{C})$. Le drapeau d'idéaux $\{\mathfrak{h}_i\}$ qu'il fournit vérifie pour tout $X \in D\mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ car $\mathfrak{gl}((\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1})/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est une algèbre de Lie abélienne. Ainsi, $\mathrm{ad}(X)$ agit de façon nilpotente sur $\mathfrak{g}$, donc aussi sur $D\mathfrak{g}$, et on conclut par le corollaire 3.2.4. □

3.3.5 Corollaire. (Critère de Cartan 1)– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(XY) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

Démonstration. Il s'agit de voir que tout élément X de $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est nilpotent, autrement dit, que ses valeurs propres sont nulles, ou encore, si $\overline{D}$ désigne l'endomorphisme de $V = \mathbb{C}^n$ donné, dans une base de V diagonalisant la partie semi-simple X_s de X, par la matrice complexe conjuguée de $D = X_s$, que $\mathrm{tr}(\overline{D}.X) = 0$. Comme $X \in D\mathfrak{g}$ est une combinaison linéaire de $[Y, Z]$, et que

$$\mathrm{tr}(\overline{D}[Y, Z]) = \mathrm{tr}([\overline{D}, Y]Z),$$

il suffit de montrer que $\mathrm{ad}(\overline{D})$ laisse stable $\mathfrak{g}$. Mais $\mathrm{ad}(\overline{D})$ s'exprime comme un polynôme en $\mathrm{ad}(D) = \mathrm{ad}(X_s)$, lequel vaut $(\mathrm{ad}(X))_s$, qui est lui même un polynôme en $\mathrm{ad}(X)$. Comme $\mathrm{ad}(X)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ laissant stable $\mathfrak{g}$, c'est terminé. □

Remarque. – On a utilisé le fait que si $X = X_s + X_u$ est la décomposition de Jordan d'un endomorphisme K-linéaire d'un K-ev V, alors $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X_s) + \mathrm{ad}(X_u)$ est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme $\mathrm{ad}(X)$ de $\mathrm{L}(V/K)$. En effet, on a déjà remarqué que $\mathrm{ad}(X_u)$ est nilpotent et il est clair que $\mathrm{ad}(X_s)$ et $\mathrm{ad}(X_u)$ commutent. Il reste donc à vérifier que $\mathrm{ad}(X_s)$ est semi-simple. Pour cela, on peut supposer $K = \mathbb{C}$ et choisir une base $e_1, \cdots, e_n$ de V telle que $X_s e_i = \lambda_i e_i$. Soit alors $E_{ij} = e_j^* e_i$ la base de $\mathrm{L}(V/K)$ correspondante. On calcule $\mathrm{ad}(X_s)(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$ et on en déduit que $\mathrm{ad}(X_s)$ est diagonalisable.

3.4 Algèbres de Lie semi-simples.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique nulle. D'après le premier exercice du paragraphe précédent, la somme de deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ est résoluble, et on peut donc parler du plus grand idéal résoluble $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, qu'on appelle le *radical* de $\mathfrak{g}$.

3.4.1 DÉFINITION.– *On dit que $\mathfrak{g}$ est* semi-simple *si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes.*

i) $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal abélien non nul.

ii) le radical de $\mathfrak{g}$ est nul.

En particulier, une algèbre de Lie semi-simple a un centre trivial, de sorte que sa représentation adjointe est fidèle (c'est-à-dire : injective).

On dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle n'a *pas d'idéal propre* (c'est-à-dire distinct de 0 ou $\mathfrak{g}$) et si elle n'est *pas abélienne*. Cette dernière condition n'est là que pour éviter l'algèbre de Lie "triviale" K ; on pourrait la remplacer par la condition $dim(\mathfrak{g}) > 1$.

Remarque. – On peut montrer (voir TD) qu'une algèbre de Lie simple est de dimension au moins 3. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est la seule algèbre de Lie complexe simple de dimension 3, tandis que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2$ sont les seules algèbres de Lie réelles simples de dimension 3.

3.4.2 DÉFINITION.– *Soit $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/K)$ une représentation de $\mathfrak{g}$. On note B_π la forme K-bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$*

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B_\pi(X, Y) := \mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y))$$

On vérifie aisément la propriété suivante, parfois appelée "associativité"

$$B_\pi([X, Y], Z) = B_\pi(X, [Y, Z]), \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Il s'ensuit que l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ relativement à B_π d'un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En particulier, le radical (ou "noyau") $\mathfrak{r}_{B_\pi} = \mathfrak{g}^\perp$ de B_π est un idéal. Quand $\pi = \mathrm{ad}$ est la représentation adjointe, la forme $B_{\mathrm{ad}} = B$:

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B(X, Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$$

s'appelle la *forme de Killing de* $\mathfrak{g}$.

Exemples : i) la forme de Killing de $\mathfrak{gl}_n(K)$ est $B(X, Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY) - 2(\mathrm{tr}\,X)(\mathrm{tr}\,Y)$. On utilise ici le fait que $\mathrm{tr}(A \mapsto XAY) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y)$.

ii) les formes de Killing de $\mathfrak{sl}_n(K), \mathfrak{so}_n(K), \mathfrak{sp}_{2n}(K)$ sont respectivement données par $B(X, Y) = c\,\mathrm{tr}(XY)$, avec $c = 2n, n - 2, 2n + 2$;

iii) si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

3.4.3 PROPOSITION. (Critère de Cartan 2)– *Une K-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de forme de Killing B, est résoluble si et seulement si $B(\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$.*

Démonstration. La CN découle du théorème de Lie et du fait que $\mathfrak{b}_n.\mathfrak{b}_n^{\text{nilp}} \subset \mathfrak{b}_n^{\text{nilp}}$. Réciproquement, supposons seulement que $B(D\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$. Par Cartan 1, $\text{ad}(D\mathfrak{g})$ est alors une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Comme $Ker(\text{ad})$ est abélienne, $D\mathfrak{g}$ est donc résoluble, donc $\mathfrak{g}$ également. □

3.4.4 THÉORÈME. (É. Cartan)– *Soit $\mathfrak{g}$ une K-algèbre de Lie, de forme de Killing B, de centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

ii) B est une forme bilinéaire non dégénérée.

iii) $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'idéaux, qui sont des algèbres de Lie simples.

iv) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est somme directe de représentations irréductibles.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. D'après Cartan 1, l'image par ad de l'orthogonal $\mathfrak{g}^\perp$ de $\mathfrak{g}$ relativement à B est résoluble, donc $\mathfrak{g}^\perp$ l'est aussi. Puisque $\mathfrak{g}$ est supposée semi-simple, l'idéal résoluble $\mathfrak{g}^\perp$ doit être nul. Or $\mathfrak{g}^\perp$ est le noyau de B, donc B est non dégénérée.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ L'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal, qui, sous (ii), a pour dimension la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après Cartan 1, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$ est résoluble. Supposons que $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$ sont non nul et soit $\mathfrak{r} = D^k(\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h})$ le dernier membre non nul de la suite dérivée de $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$. C'est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, donc pour $X \in \mathfrak{r}$, et tout $Y \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ de $\mathfrak{g}$ envoie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}$ dans 0, donc est de carré nul, et en particulier de trace nulle. Ainsi $X \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$, ce qui contredit la non nullité de $\mathfrak{r}$ et montre que l'hypothèse $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \{0\}$ était absurde. Il s'ensuit que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. De plus, la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, car c'est la restriction de B à $\mathfrak{h}$, qui ne rencontre $\mathfrak{h}^\perp$ qu'en 0. Idem pour $\mathfrak{h}^\perp$. En itérant, on obtient donc une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{h}_s$ en somme directe orthogonale d'idéaux de $\mathfrak{g}$ qui n'admettent pas d'idéaux propres, et qui ne peuvent être de dimension 1 (car un facteur de dimension 1 serait contenu dans $\mathfrak{g}^\perp$) ; ce sont donc des algèbres de Lie simples.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sous (iii), $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \oplus_i \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_i)$ est nul puisque les $\mathfrak{h}_i$ sont des algèbres de Lie simples ; comme ce sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, ce sont des sous-représentations de ad, et comme aucune n'a d'idéal propre, c'en sont des sous-représentations irréductibles.

$iv) \Rightarrow i)$ Comme une sous-représentation de ad est un idéal de $\mathfrak{g}$, et est irréductible si et seulement si c'est un idéal simple ou de dimension 1, (iv) implique que $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples. Comme une somme directe d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple, on conclut que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

□

Comme une algèbre de Lie simple coïncide avec son idéal dérivé, on déduit de (iii) que $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$ pour toute algèbre de Lie semi-simple. Mais il existe des algèbres de Lie vérifiant cette propriété sans être semi-simples.

Remarque. (Classification) – Le quotient d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par son radical $\mathfrak{r} = rad(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie semi-simple, et on peut montrer (théorème de Levi) qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ (qui n'est en général pas un idéal de $\mathfrak{g}$) supplémentaire de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}$. Le théorème de Cartan ramène donc essentiellement l'étude des algèbres de Lie à celle des algèbres de Lie simples. Pour $K = \mathbb{C}$, celles-ci ont été entièrement classifiées : à cinq exceptions près, toute algèbre de Lie complexe simple est du type $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), n \geqslant 2$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), n \geqslant 3, n \neq 4$, ou $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. On dispose d'une classification similaire, mais bien sûr plus longue, pour $K = \mathbb{R}$.

Remarque. (Lien avec les groupes) – La terminologie que nous avons introduite pour les algèbres de Lie en induit une pour les groupes de Lie *connexes*. On dit que G est nilpotent, résoluble, semi-simple, simple, réductif (cf. ci-desssous) si $\mathrm{Lie}(G)$ l'est. Cette nomenclature ne suffit pas tout à fait pour obtenir une classification des groupes de Lie linéaires, car plusieurs groupes de Lie connexes partagent la même algèbre de Lie (par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cependant, on montre que toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un *unique* groupe de Lie connexe et *simplement connexe* (pas nécessairement linéaire, cependant), d'où une classification pour ce type de groupes. Voici un exemple frappant de lien entre les propriétés du groupe et celles de son algèbre de Lie (non démontré ici). *Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathbb{R}$. Si G est compact, $\mathfrak{g}$ est réductive et la forme de Killing de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est définie négative. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si sa forme de Killing est définie, G est compact.*

Exercice. – (Algèbres de Lie réductives) En adaptant les arguments du théorème précédent, montrer l'équivalence des propriétés suivantes pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

i) Le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ est réduit à son centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
ii) $D\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.
iii) $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples ou abéliens.
iv) La représentation adjointe est somme directe de sous-représentations irréductibles.

Une algèbre de Lie qui vérifie ces propriétés est dite *réductive.*

De même que pour les algèbres de Lie résolubles, on peut caractériser les algèbres de Lie semi-simples par leurs représentations. On ainsi la propriété remarquable de "complète réductibilité" suivante :

3.4.5 Théorème. (H. Weyl)– *Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration. Soit V une représentation de $\mathfrak{g}$ et W une sous-représentation. On veut trouver un sous-espace supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W. Pour cela, il suffit de trouver un $\mathfrak{g}$-morphisme $p : V \longrightarrow W$ qui soit un projecteur sur W, *i.e.* $p^2 = p$ dans $\mathrm{L}(V/K)$, ou encore $p_{|W} = \mathrm{id}_W$. En effet on prendra $\mathrm{Ker}\, p$ comme supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W.

Munissons $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ de l'action de $\mathfrak{g}$ donnée par $X.\varphi := X \circ \varphi - \varphi \circ X$. Par définition, une application linéaire $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ est un $\mathfrak{g}$-morphisme si et seulement si elle appartient à $\mathrm{Hom}_K(V,W)^{\mathfrak{g}}$. Considérons le sous-espace $A \subset \mathrm{Hom}_K(V,W)$ formé des φ tels que $\varphi_{|W} \in K\,\mathrm{id}_W$ et le sous-espace $B \subset A$ des φ tels que $\varphi_{|W} = 0$. Ce que l'on veut montrer est :

$$A^{\mathfrak{g}} \setminus B \neq \emptyset.$$

En effet si $\varphi \in A^{\mathfrak{g}} \setminus B$, il existe $a \in K^\times$ tel que $\varphi_{|W} = a\,\mathrm{id}_W$ et $p := a^{-1}\varphi$ est alors un projecteur $\mathfrak{g}$-équivariant sur W, comme voulu.

On constate facilement que $\mathfrak{g}A \subset B$, de sorte que A et B sont des sous-représentations de $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ dont le quotient A/B est la représentation triviale de dimension 1 de $\mathfrak{g}$. Il nous suffira donc de trouver une K-droite $\mathfrak{g}$-stable L, supplémentaire de B dans A, puisqu'alors on aura $L \setminus \{0\} \subset A^{\mathfrak{g}} \setminus B$.

En d'autres termes, on est ramené au problème initial sauf que maintenant W est de codimension 1 dans V (remarquons que toute représentation de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ est triviale, car $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$).

Par récurrence sur $\dim_K(V)$, on peut supposer que W *est irréductible*. En effet, sinon on choisit $0 \neq W' \subsetneq W$, on applique l'hypothèse de récurrence à $W/W' \subset V/W'$, d'où une droite $\mathfrak{g}$-stable L' supplémentaire de W/W' dans V/W', puis, notant V' la préimage de L' dans V (de sorte que $L' = V'/W'$), on applique à nouveau l'hypothèse de récurrence à $W' \subset V'$ pour trouver une droite $\mathfrak{g}$-stable $L \subset V'$, complémentaire de W' dans V', et donc complémentaire de W dans V.

Il nous reste donc à traiter le cas : *W irréductible de codimension 1 dans V*. Remarquons que jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $\mathfrak{g}$ semi-simple ! Quitte à remplacer $\mathfrak{g}$ par un de ses quotients (nécessairement semi-simple), on peut supposer que V est une représentation *fidèle*, *i.e.* que $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est injective. Alors le même raisonnement que pour l'implication $i) \Rightarrow ii)$ du théorème précédent montre que la forme bilinéaire B_π sur $\mathfrak{g}$ est non dégénérée. Choisissons une base $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ sur K et notons $Y_1, \cdots, Y_n$ la base duale pour B_π. On appelle *opérateur de Casimir* de (V,π) l'endomorphisme suivant :

$$C_\pi := \sum_{i=1}^{n} \pi(X_i)\pi(Y_i) \in \mathrm{L}(V/K).$$

Notons que sa trace est donnée par $\mathrm{tr}(C_\pi) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\pi(X_i)\pi(Y_i)) = \sum_{i=1}^n B_\pi(X_i,Y_i) = n$. D'après le lemme ci-dessous, C_π est un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V. Comme $\pi(\mathfrak{g})V \subset W$, on a aussi $C_\pi V \subset W$, et en particulier W est stable par C_π. Puisque W est irréductible, le lemme de Schur nous dit que $C_{\pi|W}$ est soit nul, soit inversible. Comme $\mathrm{tr}(C_\pi) = \mathrm{tr}(C_{\pi|W}) = n \neq 0$, on voit que $C_{\pi|W}$ est inversible. Mais alors $\mathrm{Ker}(C_\pi)$ est le supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W cherché. □

Lemme. – *C_π est un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V.*

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On calcule

$$[\pi(X), C_\pi] = \sum_{i=1}^{n} [\pi(X), \pi(X_i)\pi(Y_i)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}[\pi(X),\pi(X_i)]\pi(Y_i) + \sum_{i=1}^{n}\pi(X_i)[\pi(X),\pi(Y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\pi([X,X_i])\pi(Y_i) + \sum_{i=1}^{n}\pi(X_i)\pi([X,Y_i]) \\
&= \sum_{i,j} B_\pi([X,X_i],Y_j)\pi(X_j)\pi(Y_i) + \sum_{i,j} B_\pi([X,Y_i],X_j)\pi(X_i)\pi(Y_j)
\end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que $B_\pi([X,X_i],Y_j) + B_\pi([X,Y_j],X_i) = 0$ pour tous i,j (associativité de B_π). $\square$

3.5 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

On a vu que les représentations irréductibles d'une algèbre de Lie résoluble sont toutes de dimension 1. Néanmoins il en existe une infinité non dénombrable. Par exemple pour $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}$, engendrée par un élément X, se donner une représentation (V,π) revient à se donner un endomorphisme $\pi(X)$ de V. Lorsque V est de dimension 1 c'est simplement la multiplication par un $\lambda \in \mathbb{C}$. Il y a donc autant d'irréductibles que de nombres complexes...

La situation est très différente pour les algèbres de Lie semi-simples. On sait en général classifier leurs représentations irréductibles, et on montre qu'il n'y en a qu'un nombre *fini*, à *dimension fixée.*

On étudie ici l'exemple de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Celle-ci est de dimension 3, et en voici une base pratique :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le crochet y est donnée par les relations

$$[H,X] = 2X \ , \ [H,Y] = -2Y \ , \ [X,Y] = H \qquad (*).$$

La forme de Killing $(x,y) \mapsto 4\,\mathrm{tr}(xy)$ est non dégénérée, donnée par

$$B(H,X) = B(H,Y) = 0,\ B(X,Y) = 4, \text{ et } B(H,H) = 8.$$

On connait déjà 3 représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$. La triviale (de dimension 1), la standard (*i.e.* l'inclusion $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, de dimension 2), et la représentation adjointe, de dimension 3 (qui est irréductible car $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est simple).

3.5.1 Théorème.– *Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe une représentation irréductible (V_m, π_m) de dimension $m+1$, et celle-ci est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Soit $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V/\mathbb{C})$ une représentation irréductible, λ_0 une valeur propre de $\pi(H)$, de partie réelle *minimale*, et v_0 un des vecteurs propres correspondant. De la relation

$$H(X.v_0) = X(H.v_0) + [H,X].v_0 = X(\lambda_0 v_0) + 2X(v_0) = (\lambda_0+2)X.v_0,$$

on déduit que si si $v_1 = X.v_0$ n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour H, de valeur propre $\lambda_1 = \lambda_0 + 2$. En itérant, on obtient une suite $\{v_j, j = 0, ..., m\}$ de vecteurs propres à valeurs propres distinctes, où m désigne le plus grand entier tel que $v_m \neq 0$. Alors, le sous-espace vectoriel W engendré par les v_j est stable sous H et X, mais aussi sous Y car

$$H(Y.v_0) = Y(H.v_0) + [H, Y].v_0 = (\lambda_0 - 2)Y.v_0,$$

donc $Y.v_0 = 0$ par minimalité de λ_0, tandis qu'on vérifie par récurrence sur j, à partir de la relation $YX = XY - H$, que $Y.v_j = -j(\lambda_0 + j - 1)v_{j-1}$. Par conséquent, $W = V$. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = D\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{tr}(\pi(H)) = 0$, d'où $\lambda_0 = -m$, et π est finalement donnée dans la base $\{v_j\}$ de V par

$$\pi(H)(v_j) = (2j - m)v_j\ ,\ \pi(X)(v_j) = v_{j+1}\ ,\ \pi(Y)(v_j) = j(m - j + 1)v_{j-1}\ ,$$

ou encore, dans la base $\{w_j = v_j/[m(m-1)...(m-j+1)]\}$ par

$$\pi(H)(w_j) = (2j - m)w_j\ ,\ \pi(X)(w_j) = (m - j)w_{j+1}\ ,\ \pi(Y)(w_j) = jw_{j-1}\ .(*)$$

Ceci montre l'unicité. Pour l'existence, il faut d'abord vérifier que les relations ci-dessus définissent bien une représentation (*i.e.* $\pi([x, y]) = [\pi(x), \pi(y)]$ pour tous x, y) ce qui est élémentaire. Il faut ensuite vérifier que cette représentation est bien irréductible. Or toute sous-représentation non nulle $W \subset V$ doit contenir un vecteur propre pour H, *i.e.* l'un des v_j. Mais alors les actions de X et Y montrent que W contient tous les v_j. □

Remarque. – Nous mentionnerons au chapitre suivant un modèle plus conceptuel pour ces représentations (V_m, π_m), en termes de dérivations de l'espace des polynômes homogènes à 2 variables de degré m. On peut aussi montrer que π_m est la représentations "puissance symétrique m-ème" de la représentation standard π_1. Plus précisément, on définit une représentation de $\mathfrak{g}$ sur le produit tensoriel $V_1 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$ (m facteurs) en posant $X(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := \sum_{i=1}^n v_1 \otimes \cdots \otimes Xv_i \otimes \cdots \otimes v_m$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit par permutation des facteurs, et les invariants $(V_1 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_1)^{\mathfrak{S}_m}$ sont stables sous $\mathfrak{g}$ et forment une sous-représentation irréductible isomorphe à (V_m, π_m). Vu le Théorème de complète réductibilité de Weyl, on peut finalement énoncer : *toute représentation complexe de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à une somme directe de puissances symétriques de la représentation standard.*

Remarque. – $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ possède aussi des représentations irréductibles de dimension infinie, dont la classification est aussi connue. De telles représentations ne sont pas des objets si exotiques, et ont leur importance en physique et en théorie des nombres.

4 Retour aux groupes : représentations et analyse harmonique

4.1 Représentations (généralités)

4.1.1 Définition.– *Soit G un groupe topologique. Une* représentation continue *de G est une paire (V,ρ) formée d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach V et d'un homomorphisme de groupes topologiques $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$.*

Lorsque V est de dimension finie, se donner ρ revient à se se donner une action continue $G \times V \longrightarrow V$ telle que pour tout g, l'application $\rho(g) : v \mapsto gv$ soit K-linéaire.

Sous-entendant ρ, on dit souvent que V est une représentation de G, et on écrit l'action de G que ρ induit sur V sous la forme $\rho(g)(v) = \rho(g)v = g.v = gv$.

4.1.2 *Vocabulaire de base.* Un vecteur v de V est dit *invariant* si $gv = v$ pour tout g dans G ; notation : $v \in V^G$.

Un $\mathbb{C}$-ss-ev W de V est dit *stable sous* G si gw appartient à W pour tout $(g,w) \in G\times W$. Lorsque W est fermé dans V (automatique si V est de dimension finie), on dit que (W,ρ) est une *sous-représentation* de (V,ρ). Dans ce cas le quotient V/W est naturellement muni d'une action linéaire continue de G que l'on appelle *représentation quotient.*

On dit que ρ est *irréductible* (parfois on précise *topologiquement irréductible*) s'il n'existe aucun sous-espace *fermé* W de V stable sous G et distinct de $\{0\}$ et de V.

Si V et W sont deux représentations continues de G, leur somme directe est la représentation $V \oplus W$ définie par $g.(v \oplus w) = gv \oplus gw$. Si une représentation V est somme directe de deux sous-représentations propres, on dit qu'elle est *décomposable.* Noter qu'une représentation indécomposable n'est pas forcément irréductible.

Un *morphisme* entre deux représentations V et W de G est un homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire continu $\varphi : V \to W$ tel que $\varphi(g.v) = g.\varphi(v)$ pour tout $(g,v) \in G \times V$. On dit aussi que φ est G-linéaire, ou que c'est un G-morphisme, ou encore que φ entrelace V et W. Les représentations V et W sont dites *équivalentes* (ou simplement *isomorphes*) s'il existe un G-isomorphisme bi-continu de l'une vers l'autre (son inverse est encore un G-morphisme).

4.1.3 *Représentations unitaires.* Si V est un espace de Hilbert on dit que ρ est *unitaire* si $\rho(G)$ est contenu dans $\mathrm{U}(V)$. Plus généralement, une représentation continue est dite *unitarisable* si elle est équivalente à une représentation unitaire.

Exemple. – Si G est fini, toute représentation (V,ρ) de dimension finie de G est unitarisable. En effet, il nous faut trouver un produit scalaire hermitien $\Psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ qui soit G-invariant, *i.e.* tel que $\rho(G) \subset \mathrm{U}(\Psi)$, ou encore tel que $\Psi(gv,gw) = \Psi(v,w)$ pour tous $g \in G$ et $v,w \in V$. Or, si Φ est un produit scalaire hermitien quelconque, la forme sesqui-linéaire Ψ définie par $\Psi(v,w) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi(gv,gw)$ est un produit hermitien G-invariant comme voulu.

Nous généraliserons ceci aux groupes compacts plus loin. En attendant, un des intérêts des représentations unitaires est que *tout sous-espace fermé stable admet un supplémentaire fermé stable.* Plus précisément, si $W \subset V$ est fermé et stable, alors $W^\perp$ est fermé stable et on a $V = W \oplus W^\perp$. En particulier, une représentation unitaire est indécomposable si et seulement si elle est irréductible. Une représentation unitaire de dimension finie est alors *complètement réductible* (*i.e.* somme directe de sous-représentations irréductibles).

4.2 Représentations de dimension finie

Comme on peut s'y attendre, la théorie est plus commode en dimension finie. On a notamment le

LEMME. (Lemme de Schur) – *Soient V et W deux représentations complexes irréductibles de dimension finie d'un groupe quelconque G, et φ un G-morphisme non identiquement nul de V vers W . Alors,*
i) φ est un isomorphisme ;
ii) si $V = W$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\varphi = \lambda.id_V$.

Démonstration. Le noyau (resp. l'image) de φ est un sous-espaces invariant de V (resp. W). L'irréductibilité de ces représentations entraîne la première assertion. Sous les hypothèses de la seconde, φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ (qui est algébriquement clos), et il suffit d'appliquer la première assertion au G-morphisme $\varphi - \lambda id_V$. $\square$

4.2.1 *Représentations dérivées.* Supposons que G est un groupe de Lie linéaire, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. D'après le paragraphe 2.2.2, toute représentation continue ρ comme ci-dessus induit une représentation $d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/K)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De manière explicite, on a la formule

$$d\rho(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (t \mapsto \rho(\exp(tX)))\,.$$

La théorie des représentations de G et celle de $\mathfrak{g}$ s'éclairent mutuellement. On a par exemple le lemme suivant :

LEMME. – *Supposons G connexe. Alors*

i) un sous-espace W de V est stable par $\rho(G)$ si et seulement si il est stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. En particulier, (V, ρ) est irréductible si et seulement si $(V, d\rho)$ est irréductible.

ii) un sous-espace W de V stable par $\rho(G)$ admet un supplémentaire stable par $\rho(G)$ si et seulement si il en admet un stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. En particulier, (V, ρ) est indécomposable si et seulement si $(V, d\rho)$ est indécomposable.

Démonstration. i) Le sens $\Rightarrow$ découle de la définition de $d\rho$. Réciproquement, supposons W stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. Alors l'égalité $\rho \circ \exp_G = \exp_{\mathrm{GL}(V)} \circ d\rho$ montre que W est stable par $\rho(\exp_G(\mathfrak{g}))$. Mais puisque G est connexe, il est engendré par l'image de $\exp_G$, et W est donc stable par $\rho(G)$. ii) découle de i). $\square$

Voici un corollaire remarquable.

Corollaire. – *Si G est un groupe semi-simple, toute représentation de dimension finie de G est complètement réductible.*

Démonstration. Vu le lemme précédent, cela découle du théorème de complète réductibilité de Weyl pour les algèbres de Lie semi-simples. □

Notons que cela s'applique en particulier aux groupes "classiques" (spéciaux linéaires, symplectiques, spéciaux unitaires, spéciaux orthogonaux). Dans le même ordre d'idées, voici un résultat utile dans un but de classification :

Lemme. – *Si $(V_1, \rho_1), (V_2, \rho_2)$ sont deux représentations de dimension finie d'un groupe de Lie connexe G, alors ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes si et seulement si $d\rho_1$ et $d\rho_2$ le sont.*

Démonstration. Par définition un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ est une équivalence de ρ_1 sur ρ_2 si pour tout $g \in G$ on a $\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$, et une équivalence de $d\rho_1$ sur $d\rho_2$ si pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $d\rho_2(X) \circ \varphi = \varphi \circ d\rho_1(X)$. Par le yoga maintenant habituel de l'exponentielle, ces deux conditions sont équivalentes. □

En guise d'application, nous allons revisiter les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et en déduire une classification des représentations continues irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

4.2.2 *Classification des représentations irréducibles de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *et groupes affiliés.* Soient m un entier $\geqslant 0$ et V_m l'espace des polynômes homogènes de degré m en deux variables, à coefficients dans $\mathbb{C}$. Le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ admet une représentation naturelle ρ_m sur V_m, donnée, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P = P(x, y)$ dans V_m par

$$\rho_m(g)(P) = g.P, \text{ avec } (g.P)(x, y) = P(ax + cy, bx + dy).$$

Notons que V_m est de dimension $m + 1$.

Théorème. – *Pour $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{SU}(2)$, les représentations $(\rho_m)_{|G}, m \in \mathbb{N}$ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. Soit $d\rho_m : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_m/\mathbb{C})$ la représentation dérivée de ρ_m. Reprenons la base (H, X, Y) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Par définition de ρ_m, on a les formules $\rho_m(e^{tH})(P(x, y)) = P(e^t x, e^{-t} y)$, $\rho_m(e^{tX})(P(x, y)) = P(x; tx + y)$ et $\rho_m(e^{tY})(P(x, y)) = P(x + ty, y)$, de sorte que

$$d\rho_m(H)(P) = (x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})(P),\ d\rho_m(X)(P) = x\frac{\partial}{\partial y}(P),\ d\rho_m(Y)(P) = y\frac{\partial}{\partial x}(P).$$

Dans la base $\{P_j(x, y) = x^j y^{m-j}, j = 0, ..., m\}$ de V_m, on a donc :

$$d\rho_m(H)(P_j) = (2j - m)P_j\ ,\ d\rho_m(X)(P_j) = (m - j)P_{j+1}\ ,\ d\rho_m(Y)(P_j) = jP_{j-1} \quad (**).$$

On reconnait là les formules donnant l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur la représentation π_m du théorème 3.5.1. On en déduit l'irréductibilité de $d\rho_m$ et donc celle de ρ_m. De plus, comme les $\mathbb{R}$-sous-algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ engendrent $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par $\mathbb{C}$-linéarité, on voit que $(d\rho_m)_{|\mathfrak{su}(2)}$ et $(d\rho_m)_{|\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})}$ sont aussi irréductibles. Par conséquent $(\rho_m)_{|\mathrm{SU}(2)}$ et $(\rho_m)_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ sont irréductibles. $\square$

Notons que ρ_0 est la représentation triviale, ρ_1 la représentation standard, et ρ_2 la représentation adjointe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On s'intéresse maintenant à la réciproque de ce théorème, c'est-à-dire à la classification des représentations continues irréductibles de dimension finie des groupes de Lie considérés.

4.2.3 THÉORÈME.– *Toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $G = \mathrm{SU}(2)$ *ou* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *est isomorphe à une (et une seule) des représentations* $(\rho_m)_{|G}, m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit (V, ρ) est une représentation (complexe) irréducible de G. Alors $d\rho$ est une représentation irréductible complexe de la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, donc s'étend en une représentation irréductible de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. D'après le théorème 3.5.1, il existe donc m tel que $d\rho \simeq (\pi_m)_{|\mathfrak{g}} = (d\rho_m)_{|\mathfrak{g}} = d(\rho_m)_{|G}$. D'après le lemme ci-dessus, cela implique que $\rho \simeq (\rho_m)_{|G}$. $\square$

Nous verrons au prochain paragraphe que toutes les représentations continues irréductibles du groupe compact $\mathrm{SU}(2)$ sont de dimension finie. Par contre, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, tout comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, possède des représentations irréductibles de dimension infinie. Il n'y a néanmoins pas de relation aussi simple entre les représentations de dimension infinie du groupe et celles de son algèbre de Lie.

Passons au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Les représentations ρ_m ne sont pas les seules irréductibles ; elles ont une propriété particulière relativement à la structure complexe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On les appelle "représentations holomorphes" de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Pour obtenir les autres, on remarque que la conjugaison complexe induit un automorphisme du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, dont la dérivée est la conjugaison complexe de la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On définit alors la *conjuguée* d'une représentation (V, ρ) comme la représentation $(V, \overline{\rho})$ obtenue en composant ρ avec la conjugaison de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

4.2.4 THÉORÈME.– *Toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *est isomorphe à un produit tensoriel* $\rho_m \otimes \overline{\rho}_n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. (Esquisse) Soit (V, ρ) une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Sa dérivée $d\rho$ est une représentation irréductible de la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et s'étend à la complexifiée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On montre que les irréductibles d'une somme directe s'obtiennent comme produits tensoriels des irréductibles de chacun des deux facteurs. Par ailleurs le plongement $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est donnée par $(\mathrm{id}, \overline{\mathrm{id}})$. $\square$

Exercice. – Montrer qu'une représentation ρ_m de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ se factorise par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si m est pair, et que la représentation ainsi obtenue est encore irréductible. Montrer que toute les irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ s'obtiennent ainsi.

Exercice. – Classifier les irréductibles de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice. – Classifier les irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

4.3 Représentations des groupes compacts

4.3.1 *Mesures de Haar.* Soit X un espace localement compact. Notons $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à support compact, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une *mesure* sur X est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X,\mathbb{R})$ qui est positive sur les fonctions positives ; elle est alors automatiquement continue : c'est en particulier une *distribution* sur X. Il est d'usage de noter l'évaluation d'une mesure μ sur une fonction f de l'une des manières suivantes :

$$\mu(f) = \langle \mu, f\rangle = \int_X f d\mu = \int_X f(x)d\mu(x).$$

Si un groupe G agit sur X, il agit sur les fonctions par la formule $(g.f)(x) := f(g^{-1}x)$, et dualement sur les formes linéaires et les mesures par la formule $g\mu(f) := \mu(g^{-1}f)$, ce que l'on peut aussi noter

$$g\mu(f) = \langle g\mu, f\rangle = \langle \mu, g^{-1}f\rangle = \int_X g^{-1}f d\mu = \int_X f(gx)d\mu(x).$$

Comme d'habitude, on dit que la mesure μ est invariante par G si $\mu = g\mu$ pour tout $g \in G$. Il n'existe pas toujours de mesure invariante sur X, et lorsqu'il en existe elles sont rarement uniques. Mais voici un cas particulier très utile.

Théorème. – *Supposons $X = G$, l'action étant la multiplication à gauche. Alors il existe une mesure G-invariante sur X, et elle est unique à multiplication par un réel positif près.*

Nous admettrons ce résultat. On peut l'obtenir comme conséquence d'un théorème de point fixe d'analyse fonctionnelle, dû à Markov et Kakutani. Dans le cas d'un groupe de Lie, on peut utiliser des techniques de géométrie différentielle qui relient mesures sur une variété et sections du fibré des formes différentielles de degré maximal, il reste alors à voir que ce dernier fibré est trivialisable dans le cas d'un groupe de Lie.

Une mesure comme dans le théorème est appelée *mesure de Haar à gauche* sur G. De même il existe des mesures de Haar *à droite* (relatives à l'action de G sur lui-même par multiplication à droite), qui sont toutes égales à un facteur près. En général, une mesure de Haar à gauche ne l'est pas à droite. Voici cependant un résultat notable, que nous admettrons aussi :

Théorème. – *Si G est compact, ou si G est un groupe de Lie réductif, toute mesure de Haar à gauche est aussi mesure de Haar à droite.*

Dans le cas où G est compact, il est d'usage de normaliser la mesure de Haar de sorte que $\mu(G) := \mu(1_G) = 1$.

Exemple. – Voici quelques exemples de mesures de Haar.
– pour le groupe additif $G = \mathbb{R}^n$, la mesure de Lebesgue $dx_1 \cdots dx_n$;
– pour le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*)^n$, la mesure $\mu = \frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}\cdots\frac{dx_n}{x_n}$
– pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la mesure $\mu = \det(x)^{-1}dx_{11}dx_{12}\cdots dx_{nn}$
– pour G fini, $\mu = |G|^{-1}\Sigma_{x\in G}\delta_x$, où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x ;
– pour $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}$, $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$.

Voici maintenant une application cruciale de l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe compact.

4.3.2 COROLLAIRE.– *Soit G un groupe compact, et ρ une représentation de G sur un espace de Hilbert V (par exemple sur un espace de dimension finie). Alors il existe un produit scalaire hermitien $\Psi : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\Psi(gv,gv) = \Psi(v,v)$ pour tout $g\in G, v\in V$, autrement dit tel que ρ soit une représentation unitaire pour ce produit scalaire.*

Démonstration. Si $\Phi : V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ est le produit scalaire initial sur V, alors, la forme sesquilinéaire

$$\Psi(v,w) := \int_G \Phi(xv,xw)d\mu(x)$$

répond à la question puisque μ est une mesure de Haar à droite. C'est d'ailleurs une généralisation directe de l'argument déjà rencontré pour les groupes finis. □

Le cas où V est de dimension finie a déjà des conséquences spectaculaires :

COROLLAIRE. – *Tout sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est contenu dans un conjugué de* $\mathrm{U}(n)$.

Démonstration. En effet, tous les produits hermitiens sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalents, et leurs groupes unitaires sont donc conjugués. Ainsi, avec les notations de la preuve précédente, $\mathrm{U}(\Psi)$ est conjugué à $\mathrm{U}(n)$ □

On démontre de même que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ esti contenu dans un conjugué de $\mathrm{O}(n)$.

COROLLAIRE. – *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.*

COROLLAIRE. – *Si G est un groupe de Lie compact, son algèbre de Lie est réductive.*

Démonstration. Appliquer le corollaire précédent à la représentation adjointe et utiliser l'une des caractérisations des algèbres de Lie réductives, *cf* Exercice 3.4.4. □

Remarque. – Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et V^* le dual conjugué de V, *i.e.* le $\mathbb{C}$-ev des formes semi-linéaires sur V. Tout produit hermitien Ψ sur V induit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$ qui envoie v sur la forme semi-linéaire $\Psi(v, -)$. Si maintenant (V, ρ) est une représentation de G, si le produit hermitien est G-invariant, et si l'on munit V^* de la représentation $\rho^*(g)\lambda := \lambda \circ \rho(g^{-1})$, alors l'isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$ est un G-isomorphisme. Par le lemme de Schur, il s'ensuit que *si* (V, ρ) *est iréductible, alors il y a un seul produit hermitien* G*-invariant sur* V *à un facteur près.*

Le cas où V est de dimension infinie est aussi très intéressant mais utilise un peu de "théorie spectrale", et plus précisément la théorie des opérateurs autoadjoints d'un espace de Hilbert.

4.3.3 *Application aux représentations unitaires.* Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de produit scalaire $(,)$ et de norme associée $|.|$. Par le théorème de représentabilité de Riesz, l'homomorphisme $H \longrightarrow H'$ qui envoie un vecteur v sur la forme linéaire continue $w \mapsto (w, v)$ est une bijection (semi-linéaire) de H sur son dual topologique H'. Il s'ensuit que tout opérateur $A \in \mathrm{L}(H/\mathbb{C})$ admet un adjoint $A^* \in \mathrm{L}(H/\mathbb{C})$ uniquement défini par les relations $(Av, w) = (v, A^*w)$ pour tout $v, w \in H$. On dit que A est *autoadjoint* si $A^* = A$. Comme en dimension finie, on vérifie que les valeurs propres d'un opérateur A autoadjoint sont réelles, et que deux sous-espaces propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Ce qui n'est pas clair en revanche, c'est si A possède effectivement des vecteurs propres.

En dimension finie, on sait qu'un endomorphisme autoadjoint (et plus généralement, normal) est diagonalisable dans une base orthonormée. Cela n'est pas vrai en général en dimension infinie. On dit qu'un opérateur A est *compact* si l'image par A de la boule unité de H est d'adhérence compacte (on dit aussi *relativement compacte*). Ceci équivaut à demander à ce que l'image de tout ensemble borné soit d'adhérence compacte.

Lemme. – *Soit A un opérateur* autoadjoint compact *sur un espace de Hilbert H. Alors*

i) l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ *des valeurs propres de A contient* $\pm||A||$.

ii) pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, le sous-espace propre $H(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{id}_H)$ *est de dimension finie.*

iii) H est somme directe Hilbertienne $H = \widehat{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} H(\lambda)$ *des sous-espaces propres de A.*

Le point iii) signifie que la somme directe est orthogonale et dense dans H (le chapeau signifie "complétion"). On peut montrer que $\mathrm{Sp}(A)$ est au plus dénombrable et sans point d'accumulation non nul.

Démonstration. i) Choisissons une suite v_n de points de H de norme 1 tels que $|Av_n|$ tende vers $||A||$ et que Av_n admette une limite, disons w. Alors,

$$|A^2 v_n - ||A||^2 v_n|^2 = |A^2 v_n|^2 - 2||A||^2 (A^2 v_n, v_n) + ||A||^4 \leqslant ||A||^4 - 2||A||^2 |Av_n|^2 + ||A||^4$$

tend vers 0, donc v_n tend vers le vecteur $v := Aw/||A||^2$. On a par passage à la limite $A^2 v = ||A||^2 v$, ou encore $(A - ||A||\, \mathrm{id}_H)(A + ||A||\, \mathrm{id}_H)v = 0$, ce qui montre que soit v est vecteur propre de valeur propre $-||A||$, soit $v' := Av + ||A||v$ est vecteur propre de valeur propre $||A||$.

ii) Le sous-espace propre $H(\lambda)$ est fermé, donc un sous-espace de Hilbert de H. Si $\lambda \neq 0$, sa boule unité est égale à sa propre image par l'opérateur compact $\frac{1}{\lambda}A$. Comme elle est bornée, elle est donc relativement compacte. Mais puisqu'elle est fermée, elle est même compacte. Il s'ensuit que $H(\lambda)$ est nécessairement de dimension finie.

iii) Soit F l'orthogonal de la somme des espaces propres de A. La restriction de A à F est un opérateur auto-adjoint compact. Si F est non nul, on peut lui appliquer i) d'où une contradiction. Ainsi F est nul, et par suite la somme des sous-espaces propres est dense. $\square$

Proposition. – *Toute représentation unitaire de G se décompose en une somme directe Hilbertienne de représentations irréductibles* de dimension finie.

En particulier, une représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute représentation unitaire de G contient une sous-représentation de dimension finie. En effet, la proposition suivra en appliquant ceci à l'orthogonal de la somme des sous-représentations de dimension finie (dont on sait déjà qu'elles sont sommes de sous-représentations irréductibles).

Pour le vérifier, construisons un opérateur autoadjoint compact non nul A sur V, invariant sous G, c'est-à-dire tel que $g.A := \rho(g)A\rho(g^{-1}) = A$ pour tout $g \in G$. Pour cela, soit π_v le projecteur orthogonal de V sur un vecteur v de norme 1 : $\pi_v(w) := (w, v)v$. Alors, $A = \int_G x.\pi_v = \int_G x\pi_v x^{-1} d\mu(x)$:

$$w \mapsto A(w) = \int_G (x^{-1}w, v)xvd\mu(x) = \int_G (w, xv)xvd\mu(x)$$

[car $(,)$ est G-invariant] convient : puisque μ est une mesure de Haar, il est G-invariant, il est, comme π_v, autoadjoint, et on vérifie, en approchant l'application continue $x \mapsto x.\pi_v$ par des applications localement constantes, qu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, donc compact. Soit alors $H(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{id}_V)$ un des sous-espaces propres de A, de dimension finie, fourni par la proposition précédente. Comme les $\rho(g), g \in G$, commutent avec A, W est bien stable sous G. $\square$

La preuve ci-dessus n'utilise pas la continuité de l'action de G. Seulement le fait que les applications $g \mapsto (w, gv)$ sont intégrables. Cette remarque permettra d'appliquer ce résultat de décomposition à la représentation *régulière unitaire*.

4.3.4 *La représentation régulière unitaire.* Soit G un groupe localement compact. Comme on l'a vu précédemment, les espaces de fonctions raisonnables (continues, ou/et bornées, ou/et à support compact, etc...) sur G sont munis de deux actions naturelles de G par translations à gauche $[gf(x) = f(g^{-1}x)]$ ou à droite $[gf(x) = f(xg)]$, parfois appelées représentations "régulières". Maintenant que l'on dispose de mesures invariantes par translation, on peut considérer des variantes L^2 de ces représentations. Par commodité pour la suite, nous choisirons *l'action par translations à droite*. Fixons donc une mesure de Haar *à droite* μ sur G. Sur l'espace $\mathcal{C}_c(G,\mathbb{C})$ des fonctions complexes continues à support compact sur G on dispose d'un produit scalaire hermitien, dit produit L^2, défini par $\langle f_1, f_2\rangle = \int_G f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu(x)$. Comme μ est invariante à droite, on a l'égalité (pour l'action par translations à droite)

$$\langle gf_1, gf_2\rangle = \int_G f_1(xg)\overline{f_2(xg)}d\mu(x) = \int_G f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu(x) = \langle f_1, f_2\rangle.$$

L'espace $\mathcal{C}_c(G,\mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme L^2 (il est simplement "préhilbertien"). On note $L^2(G) = L^2(G,\mathbb{C},\mu)$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion. La formule ci-dessus montre que l'action de G se prolonge à $L^2(G)$ et préserve le produit scalaire. Elle est donc donnée par un homomorphisme $G \longrightarrow \mathrm{U}(L^2(G))$. On prendra garde au fait que cet homomorphisme n'est cependant pas toujours continu, même pour G compact. Nous appellerons $L^2(G)$ la *représentation régulière unitaire (à gauche)* de G.

Exemple. – Pour $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $L^2(G)$ est l'espace L^2 sur le cercle, ou encore celui des "fonctions" 1-périodiques de carré intégrable.

Cet exemple est fondamental pour comprendre les motivations de l'analyse harmonique et de la théorie des représentations.

4.4 Analyse harmonique et décomposition spectrale

4.4.1 *Interprétation de la théorie de Fourier classique.* À toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admettant 1 pour période, on peut attacher son "développement de Fourier" $\Sigma_{r\in\mathbb{Z}} a_r(f)e^{2i\pi rt}$, avec $a_r(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi rt}dt$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Plus généralement, si f est de carré sommable sur $[0,1]$ ($f \in L^2([0,1],\mathbb{C},dx)$), cette série est encore bien définie, et converge vers f en moyenne quadratique (c'est-à-dire pour la norme L^2).

Réinterprétons ces faits bien connus en termes du groupe de Lie compact $G := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1 \simeq \mathrm{SO}(2)$.

- Une fonction continue 1-périodique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à une fonction continue $G \longrightarrow \mathbb{C}$.
- Parmi ces fonctions, celles de la forme $t \to e^{2i\pi rt}$, $r \in \mathbb{Z}$ s'identifient exactement aux *homomorphismes* continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ [Exercice : vérifier que tout homomorphisme continu est bien de cette forme]. Lues sur S^1, elles s'écrivent $\chi_r : S^1 \to \mathbb{C}^* : g \mapsto \chi_r(g) = g^r$.
- La mesure de Lebesgue dt sur $\mathbb{R}$ induit la mesure de Haar normalisée μ de G et on peut identifier $L^2([0,1],\mathbb{C},dx)$ à $L^2(G,\mathbb{C},\mu) = L^2(G)$.
- La variante L^2 de la théorie de Fourier classique nous dit alors : *la famille des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ forme une base hilbertienne de $L^2(G)$*. Le coefficient de Fourier $a_r(f)$ n'est autre que la composante $\langle f, \chi_r\rangle$ de f contre χ_r.

La théorie de Fourier ainsi reformulée se généralise facilement à tout groupe compact commutatif.

Proposition. – *Soit G un groupe compact commutatif et $\hat{G}$ l'ensemble des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Alors $\hat{G}$ est une base hilbertienne de $L^2(G)$. En d'autres termes, on a*

$$\forall f \in L^2(G),\ f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi.$$

On peut aussi obtenir des énoncés pour les fonctions continues comme par exemple :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{C}),\ f(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) \int_G f(x)\overline{\chi(x)} d\mu(x).$$

Le terme $\langle f, \chi \rangle = \int_G f(x)\overline{\chi(x)} d\mu(x)$ mérite le nom de "coefficient de Fourier". Notons d'ailleurs que, G étant compact, son image par $\chi \in \hat{G}$ est compacte donc contenue dans $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$, et on a donc $\overline{\chi(x)} = \chi(x)^{-1}$ pour tout $g \in G$.

4.4.2 *Cas non-commutatif : caractères.* Pour un groupe G compact mais non commutatif, nous disposons déjà de plusieurs ingrédients de la proposition précédente : mesure de Haar, espace de Hilbert $L^2(G)$ muni de son action de G. On dispose aussi des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ mais cette fois, il est clair que de tels morphismes ne sont pas suffisamment nombreux pour pouvoir constituer une base de Hilbert de $L^2(G)$. Par exemple dans le cas extrême du groupe simple $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, il n'y a pas de tel homomorphisme non trivial ! Du point de vue de la théorie des représentations, la spécificité des groupes commutatifs parmi les compacts est que *toute représentation irréductible d'un groupe compact commutatif est de dimension* 1.

L'idée est alors, pour obtenir un analogue de la proposition précédente de considérer l'ensemble $\hat{G}$ des *classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de dimension finie de G*. Le problème évident qui surgit est : comment associer une fonction à une représentation. La réponse est

Définition. – *Soit (V, ρ) une représentation continue de dimension finie d'un groupe topologique G. On appelle caractère de ρ la fonction (continue)*

$$\chi_\rho :\ g \in G \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)) \in \mathbb{C}.$$

L'égalité classique $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ montre qu'un caractère est une fonction *centrale* sur G, *i.e.* qui vérifie $f(ghg^{-1}) = f(h)$ pour tous $g, h \in G$ (on dit aussi "invariante par conjugaison"). Le sous-espace $L^2(G)^G$ des invariants par conjugaison de $L^2(G)$ est fermé, donc un espace de Hilbert. Par ailleurs, la même égalité classique montre que deux représentations équivalentes ont le même caractère. La généralisation souhaitée de la proposition s'énonce alors comme ceci :

4.4.3 Théorème.– *Soit G un groupe compact. L'ensemble $\{\chi_\rho, \rho \in \hat{G}\}$ des caractères de représentations irréductibles est une base hilbertienne de $L^2(G)^G$. En d'autres termes,*

on a
$$\forall f \in L^2(G)^G,\ f = \sum_{\rho\in\hat{G}} \langle f, \chi_\rho\rangle \chi_\rho.$$

Il existe aussi des variantes pour les fonctions continues comme :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G,\mathbb{C})^G,\ f(g) = \sum_{\rho\in\hat{G}} \chi_\rho(g) \int_G f(x)\overline{\chi_\rho(x)} d\mu(x).$$

Ici aussi on voit que $\overline{\chi_\rho(x)} = \chi_\rho(x^{-1})$ (mais $\neq \chi_\rho(x)^{-1}$) car les valeurs propres de $\rho(x)$ sont nécessairement de module 1. Il existe par ailleurs des conditions sur la famille des “coefficients de Fourier” $a_\rho(f) = \int_G f(x)\overline{\chi_\rho(x)}d\mu(x)$ pour que la convergence soit uniforme.

Remarque. – Ce théorème est une motivation claire pour les deux problèmes classiques de théorie des représentations :
– classifier les représentations irréductibles,
– calculer leur caractères.
Pour ces deux questions, les algèbres de Lie sont un auxiliaire très utile.

La partie la plus facile du théorème consiste à prouver que les caractères irréductibles $\chi_\rho, \rho \in \hat{G}$, forment une famille orthonormée de $L^2(G)$.

LEMME. – *Soient V et W deux représentations irréductibles de dimension finie de G.*
i) si W n'est pas isomorphe à V : $\langle \chi_V, \chi_W\rangle = 0$;
ii) si W est isomorphe à V : $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$.

Démonstration. Considérons d'abord le sous-espace U^G des vecteurs invariants d'une représentation (U, ρ_U) de dimension finie. L'endomorphisme $p = \int_G \rho_U(x)d\mu(x)$ de U est un projecteur de U sur U^G. Sa trace vaut donc : $\dim(U^G) = \mathrm{tr}(p) = \int_G \mathrm{tr}(\rho_U(x))d\mu(x)$, qui est le produit scalaire $\langle \chi_U, 1_G\rangle$. Appliquons ce résultat à la représentation $U = \mathrm{Hom}(V,W)$ définie par $g\varphi := \rho_W(g) \circ \varphi \circ \rho_V(g^{-1})$. D'après le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}(V,W)^G$ est de dimension 0 (resp. 1) si V et W ne sont pas (resp. sont) isomorphes. Ainsi $\langle \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}, 1_G\rangle = 0$ ou 1 suivant qu'on est dans le cas i) ou le cas ii). Pour conclure, il ne reste qu'à montrer la formule $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$. Celle-ci est élémentaire (choisir une base de V, une base de W, et calculer dans la base de $\mathrm{Hom}(V,W)$ associée), si l'on ne perd pas de vue que $\overline{\chi_V(x)} = \chi_V(x^{-1})$ pour tout x. □

Le reste du théorème 4.4.3 est une conséquence du théorème de “décomposition spectrale” suivant, qui précise la décomposition Hilbertienne de $L^2(G)$ de la proposition 4.3.3 en affirmant que toute représentation irréductible de G y apparaît avec une multiplicité égale à son degré. Avant de l'énoncer précisément, un peu de terminologie.

DÉFINITION. – *Soit (V,ρ) une représentation de dimension finie de G. Un* coefficient matriciel *de ρ est une fonction de la forme $c_{v,v^*} : g \mapsto (gv, v^*)$ où $v \in V$ et $v^* \in V^*$ (dual de V, l'accouplement entre l'espace et son dual est donc noté (v, v^*)).*

Un coefficient matriciel est continu donc appartient à $L^2(G)$. Remarquons que le caractère χ_ρ est somme de coefficients matriciels : si $v_1, \cdots, v_n$ est une base de V de base duale $v_1^*, \cdots, v_n^*$, alors $\chi_\rho = \sum_{i=1}^n c_{v_i, v_i^*}$.

Supposons maintenant ρ irréductible, et notons $L^2_\rho(G)$ le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par les coefficients matriciels de ρ. Il est de dimension finie, au plus $\dim(\rho)^2$, puisqu'engendré par les c_{v_i, v_j^*}. Par ailleurs il est stable sous G puisque $g.c_{v,v^*} = c_{gv,v^*}$.

4.4.4 Théorème. (Peter-Weyl)– *Soit G un groupe compact. Pour tout ρ, $L^2_\rho(G)$ est G-isomorphe à $V_\rho^{\dim(\rho)}$, et on a une somme directe hilbertienne*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\rho \in \hat{G}}} L^2_\rho(G)$$

Démonstration. Fixons une représentation irréductible (V, ρ) et choisissons un produit scalaire G-invariant $\langle ., . \rangle_V$. On rappelle qu'un tel produit scalaire existe et est unique à homothétie près. Pour v, v' on notera $c_{v,v'}$ le coefficient matriciel $g \mapsto \langle gv, v' \rangle_V$. L'espace $L^2_\rho(G)$ est donc engendré par ces fonctions.

Soit (W, π) une autre représentation irréductible de G, et $\langle ., . \rangle_W$ un produit scalaire invariant. Fixons $v' \in V$ et $w \in W$. Considèrons l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{v',w}: & V & \to & W \\ & v & \mapsto & \int_G \langle gv, v' \rangle_V \, g^{-1} w \, d\mu(g) \end{array}$$

Comme μ est une mesure de Haar, cette application est un G-morphisme.

Premier cas : W n'est pas isomorphe à V. Dans ce cas, le lemme de Schur nous dit que $\Phi_{v',w} = 0$, donc pour tous $v, v' \in V$ et $w, w' \in W$, on a

$$\begin{aligned} \langle c_{v,v'}, c_{w',w} \rangle &= \int_G \langle gv, v' \rangle_V \overline{\langle gw', w \rangle_W} \, d\mu(g) = \int_G \langle gv, v' \rangle_V \langle w, gw' \rangle_W \, d\mu(g) \\ &= \int_G \langle gv, v' \rangle_V \langle g^{-1} w, w' \rangle_W \, d\mu(g) = \langle \Phi_{v',w}(v), w' \rangle_W = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $L^2_\rho(G)$ et $L^2_\pi(G)$ sont orthogonaux.

Deuxième cas : V est isomorphe à W. On suppose alors $V = W$, et on sait que $\Phi_{v',w}$ est un scalaire $\lambda_{v',w}$. Par construction, celui-ci dépend linéairement de w et semi-linéairement de v'. Le calcul ci-dessus montre

$$\langle c_{v,v'}, c_{w',w} \rangle = \lambda_{v',w} \langle v, w' \rangle_V.$$

Par symétrie on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\langle c_{v,v'}, c_{w',w} \rangle = \lambda \langle w, v' \rangle_V \langle v, w' \rangle_V.$$

En prenant $v = w'$ et $v' = w$, on constate que $\lambda > 0$ et en particulier λ est non nul. Il s'ensuit que, si $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormée de V, alors les c_{e_i, e_j} pour $i, j = 1, \cdots, n$

forment une base orthogonale de $L^2_\rho(G)$, lequel est donc de dimension $\dim(\rho)^2$. On en déduit que le G-morphisme surjectif

$$\begin{array}{rcl} V_\rho^{\dim(\rho)} & \to & L^2_\rho(G) \\ (v_1,\cdots,v_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n c_{v_i,e_i^*} \end{array}$$

est aussi injectif, ce qui prouve la première assertion du théorème.

On a déjà prouvé que la somme $H_0 := \bigoplus_{\rho\in\hat{G}} L^2_\rho(G)$ est orthogonale. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est dense, autrement dit que l'orthogonal $H_0^\perp$ est nul. Supposons le contraire. Alors puisque $H_0^\perp$ est stable sous G, il contient d'après 4.3.3 une sous-représentation irréductible de dimension finie $\mathcal{V}$. Soit $\rho\in\hat{G}$ la classe d'isomorphisme de $\mathcal{V}$. Pour f non nulle dans $\mathcal{V}$, la fonction

$$F(g) = \int_G f(xg)\overline{f(x)}d\mu(x) = \langle g.f, f\rangle$$

est un coefficient matriciel de $\mathcal{V}$, donc appartient à $L^2_\rho(G)$. Montrons qu'elle lui est orthogonale, donc nulle. En effet, pour $v,v'\in V_\rho$,

$$\begin{aligned} \langle F, c_{v,v'}\rangle &= \int_G F(g)\overline{\langle gv,v'\rangle_V}d\mu(g) = \int_G\int_G f(gx)\overline{f(x)}.\overline{\langle gv,v'\rangle_V}d\mu(x)d\mu(g) \\ &= \int_G\int_G f(h)\overline{f(x)}\,\overline{\langle hx^{-1}v,v'\rangle_V}d\mu(x)d\mu(h) \\ &= \int_G \overline{f(x)}\left(\int_G f(h)\overline{\langle hx^{-1}v,v'\rangle_V}d\mu(h)\right)d\mu(x) \\ &= \int_G \overline{f(x)}\langle f, c_{x^{-1}v,v'}\rangle d\mu(x) = 0 \end{aligned}$$

À la deuxième ligne on a fait le changement de variable $gx=h$ grâce à l'invariance de μ, à la troisième ligne on a échangé les deux intégrales, et à la dernière ligne on utilise l'hypothèse $f\in H_0^\perp$. On a donc prouvé que la fonction F est nulle. En particulier $0 = F(e) = \int_G |f(x)|^2 d\mu(x)$, donc f aussi est nulle, contredisant l'hypothèse $H_0^\perp\neq 0$. $\square$

Au cours de la preuve, nous avons exhibé une base orthogonale $(c^\rho_{i,j})_{\rho\in\hat{G},1\leqslant i,j\leqslant\dim(\rho)}$ de $L^2(G)$. Cette base dépend du choix, pour chaque ρ d'une base orthonormée de V_ρ. Nous n'avons pas calculé les normes $||c^\rho_{i,j}||$ mais nous avons montré qu'il existe $\lambda_\rho>0$ tel que $||c^\rho_{i,j}||^2=\lambda_\rho$ pour tous $1\leqslant i,j\leqslant\dim(\rho)$. On peut calculer λ_ρ grâce à la relation $||\chi_\rho||=1$ déjà prouvée plus haut. En effet, l'égalité $\chi_\rho=\sum_{i=1}^{\dim(\rho)} c^\rho_{i,i}$ donne $\lambda_\rho=\frac{1}{\dim(\rho)}$.

Corollaire. – *La famille* $\left(\sqrt{\dim(\rho)}c^\rho_{i,j}\right)_{\rho\in\hat{G},1\leqslant i,j\leqslant\dim(\rho)}$ *de* $L^2(G)$ *en est une base Hilbertienne.*

4.4.5 *Fin de la preuve du théorème 4.4.3.* On sait déjà que les χ_ρ forment une famille orthonormée. Il reste à voir que toute fonction *centrale* f telle que $(f, \chi_\rho) = 0$ pour toute représentation irréductible (V, ρ) est nulle. Pour une telle V, posons $\varphi_V = \int_G \overline{f(g)}\rho(g)d\mu(g)$. Comme f est centrale et que μ est également invariante à droite, on voit que φ_V est un G-morphisme de V dans V, donc par Schur, une homothétie. Mais sa trace vaut $\langle f, \chi_V \rangle$, donc est nulle, donc $\varphi_V = 0$. En particulier, les coefficients $\langle f, c_{v,v'} \rangle$ pour $v, v' \in V$ sont tous nuls. Ceci étant valable pour toute ρ irréductible, f est nulle.